

ГИДРОДИНАМИКА МОДУЛИРОВАННЫХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

А. В. Тюрина, Г. А. Эль*

*Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн
Российской академии наук
142092, Троицк, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 16 сентября 1998 г.

Развиты аналитические подходы к интегрированию недиагонализуемых систем Уиллза, описывающих генерацию и распространение нелинейных модулированных волн конечной амплитуды в бездиссипативных диспергирующих средах. В общем виде сформулированы естественные условия сшивки для таких систем, являющиеся аналогом условий Гуревича—Питаевского для усредненной системы Кортевега—де Вриза. Получены точные соотношения между гидродинамическими величинами по разные стороны от бездиссипативной ударной волны — аналог ударной адиабаты в обычной диссипативной гидродинамике, — впервые предложенные на основании физических соображений в [4]. Аналитически определены границы автомодельной бездиссипативной ударной волны как функции скачка плотности. Рассмотрены конкретные примеры.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что применимость точных аналитических методов в теории нелинейных диспергирующих волн ограничена вполне интегрируемыми малоамплитудными приближениями общих, «неинтегрируемых», систем уравнений [1]. Такие «неинтегрируемые» системы естественным образом возникают в физике плазмы, гидродинамике волн на поверхности жидкости, магнитной гидродинамике и др. Многие из них обладают рядом общих свойств, не зависящих от физической природы описываемых явлений, и имеют весьма характерную структуру. Приведем несколько примеров.

а) Гравитационные волны на поверхности жидкости небольшой глубины [2]:

$$\begin{aligned}\partial_t h + \partial_x(hu) &= 0, \\ \partial_t u + u\partial_x u + \partial_x h + \varepsilon^2 \partial_{xxx}^3 h &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь h — глубина жидкости, u — горизонтальная компонента скорости, ε — малый дисперсионный параметр (равновесная глубина).

б) Ионно-звуковые волны в двухтемпературной ($T_e \gg T_i$) бесстолкновительной плазме [3–5]:

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0, \\ \partial_t u + u\partial_x u + \partial_x \varphi &= 0, \\ \varepsilon^2 \partial_{xx}^2 \varphi &= e^\varphi - \rho.\end{aligned}\tag{2}$$

*E-mail: el@center.izmiran.troitsk.ru

Здесь ρ и u — плотность и скорость ионов, φ — электрический потенциал, ε — радиус Дебая.

в) Магнитозвуковые волны в холодной плазме, движущейся поперек магнитного поля [6–8]:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \frac{B}{\rho} \partial_x B &= 0, \\ \varepsilon^2 \partial_x \left(\frac{1}{\rho} \partial_x B \right) &= B - \rho. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь u и ρ — скорость и плотность плазмы, B — напряженность магнитного поля; $\varepsilon = c/\omega_p$, где ω_p — плазменная частота электронов.

Все упомянутые системы имеют четвертый порядок относительно пространственных производных и обладают как минимум четырьмя независимыми законами сохранения [5]. При обращении дисперсионного параметра ε в нуль системы (1)–(3) переходят в уравнения идеальной гидродинамики Эйлера с различными показателями адиабаты Пуассона γ : $\gamma = 2$ в случаях (1) и (3) и $\gamma = 1$ в случае (2). Системы такого типа обычно называют дисперсионно-гидродинамическими.

Другой общей особенностью указанных систем (1)–(3) является отсутствие у них свойства полной интегрируемости. Как следствие, одним из немногих точных результатов в этой области до сих пор остается лишь существование бегущих однофазных решений $f(kx - \omega t)$ ограниченной амплитуды. Если амплитуда волны превышает некоторое критическое значение a_{cr} , решение в виде бегущей волны перестает существовать (см., например, [9]): при этом само описание с помощью однопоточковой дисперсионной гидродинамики типа (1)–(3) также перестает быть справедливым. В настоящей работе исследуются лишь однопоточковые течения с $a < a_{cr}$.

Физически интересные нелинейные решения дисперсионно-гидродинамических систем возникают в задачах об эволюции гладких возмущений (рис. 1а). На начальной стадии эволюции таких возмущений главную роль играет нелинейность, приводящая при некотором времени $t = t_c$ к возникновению особенности опрокидывания с бесконечной производной (градиентная катастрофа) [10]. При $t > t_c$ вблизи точки опрокидывания благодаря дисперсии генерируются нелинейные осцилляции [5]. Осцилляторная область расширяется со временем, занимая все большую область пространства (рис. 1б). Так как зона осцилляций возникает в ситуации, когда в обычной диссипативной гидродинамике возникла бы ударная волна, изучаемую волновую структуру обычно называют бездиссипативной (бесстолкновительной) ударной волной [9]. Точные аналитические результаты работ [11–13] и др. для вполне интегрируемых систем, а также результаты численных расчетов для неинтегрируемых систем [4] позволяют сделать правдоподобные общие предположения о структуре решений, описывающих бездиссипативные ударные волны.

1. Решение дисперсионно-гидродинамической системы в области бездиссипативной ударной волны может быть представлено в виде модулированной однофазной бегущей волны.

2. На одном из фронтов бездиссипативной ударной волны обращается в нуль амплитуда волны (линейный фронт $x^-(t)$), а на противоположном — волновое число (солитонный фронт $x^+(t)$).

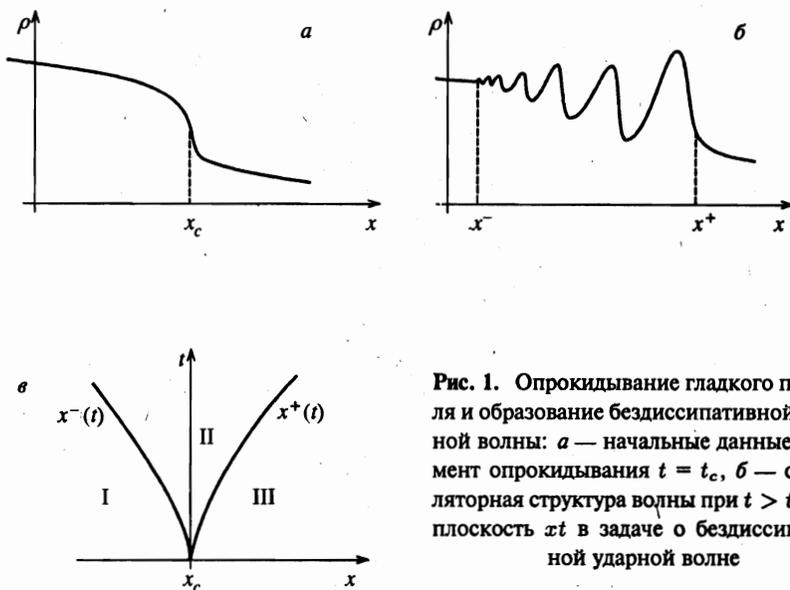


Рис. 1. Опрокидывание гладкого профиля и образование бездиссипативной ударной волны: а — начальные данные в момент опрокидывания $t = t_c$, б — осцилляторная структура волны при $t > t_c$, в — плоскость xt в задаче о бездиссипативной ударной волне

Последнее условие позволяет в разд. 3 настоящей работы сформулировать естественные условия сшивки решения модуляционных уравнений в области бездиссипативной ударной волны с решениями уравнений идеальной гидродинамики Эйлера во внешних областях. Предположение о том, что в области бездиссипативной ударной волны осцилляции носят квазистационарный характер, позволяет использовать для построения решения метод Уизема [6, 14] — обобщение метода ВКБ на теорию нелинейных уравнений в частных производных. Впервые этот метод был применен к задаче о бездиссипативной ударной волне Гуревичем и Питаевским [15], которые построили точное решение уравнений Уизема, обеспечивающее непрерывную сшивку среднего течения в области осцилляций (область II на рис. 1б) с гладким внешним течением вне бездиссипативной ударной волны (области I и III на рис. 1б). В работе [15] аналитически исследуется случай небольших начальных возмущений в виде ступеньки, когда исходная дисперсионно-гидродинамическая система сводится к уравнению Кортевега—де Вриза (КдВ). Более общие решения уравнений КдВ—Уизема были построены в работах [16–19] и др. Ключевым фактом использования в этих работах при построении точных аналитических решений является диагонализуемость уравнений Уизема в случае уравнения КдВ, т.е. существование инвариантов Римана [6, 20, 22]. Для нелинейного уравнения Шредингера с дефокусировкой аналогичные исследования были проведены в работах [23–27] и др.

Численный анализ устойчивости режимов Гуревича—Питаевского для уравнения КдВ проводился в [28]. Влияние малых диссипативных поправок на структуру решения уравнения КдВ—Уизема было аналитически изучено в работах [29, 30].

Существование римановой структуры уиземовских систем является следствием точной интегрируемости исходного уравнения (системы). Отметим, что хотя малые диссипативные поправки не разрушают риманову структуру модуляционной системы (см. [29, 30]), их учет приводит к появлению правых частей, делающих систему неинте-

грируемой (в смысле существования общего локального решения). В настоящей работе изучаются неинтегрируемые системы без диссипации. Для неинтегрируемых систем типа (1)–(3) модуляционные уравнения могут быть выписаны путем формального применения рецепта Уизема — усреднения нужного числа законов сохранения по периоду однофазного бегущего решения $f(kx - \omega t)$. Искомые уравнения описывают медленное изменение локальных интегралов движения (их число равно дифференциальному порядку системы относительно пространственных производных). Медленность изменения означает малость характерной длины осцилляций по сравнению с размером осциллирующей области. Для случаев систем (2), (3) рецепт Уизема был реализован в работе [5], в которой были исследованы асимптотические режимы автомодельной бездиссипативной ударной волны вблизи ее границ — линейного $x^-(t)$ и солитонного $x^+(t)$ фронтов (см. рис. 1а), — положение которых предполагалось известным.

В настоящей работе развиваются аналитические подходы к интегрированию недиагонализуемых модуляционных систем Уизема. Основным методом исследования является метод характеристик, применимость которого не зависит от свойств диагонализуемости. Так как изучаемая задача является нелинейной, то поведение характеристик определяется не только структурой коэффициентов системы, но и конкретным изучаемым решением. В разд. 4 мы показываем, что на семействе решений (мы называем ее задачей опрокидывания) вдоль некоторых кривых в плоскости xt — фронтов этой волны — происходит вырождение общих уравнений Уизема, так что модуляционная система приобретает локальную риманову структуру. Более того, оказывается, что при этом локальные инварианты Римана перемещаются на решении задачи опрокидывания вдоль характеристик через «уиземовскую» зону так же, как это происходит с обычными римановскими переменными в диагонализуемом случае. Указанное свойство позволяет:

1) получить соотношение между гидродинамическими переменными по обе стороны бездиссипативной ударной волны — аналог ударной адиабаты в обычной диссипативной гидродинамике;

2) сформулировать и доказать общую теорему о примыкающем течении в бездиссипативной дисперсионной гидродинамике;

3) получить точные аналитические выражения для границ автомодельной бездиссипативной ударной волны в виде функций скачка плотности на ее границах (разд. 5).

Общая конструкция исследования недиагонализуемых уравнений Уизема на семействе решений задачи опрокидывания проиллюстрирована конкретными примерами, в качестве которых рассмотрены: модуляционная система КдВ в гидродинамической форме, не использующей факт диагонализуемости уравнений КдВ—Уизема (разд. 6); модуляционная система для нелинейных ионно-звуковых волн, соответствующая уравнениям (2) (разд. 7). Найдены точные аналитические выражения для границ автомодельной ионно-звуковой бездиссипативной ударной волны. Полученные формулы входят в полном соответствии с результатами прямых численных расчетов [4].

2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ФОРМА МОДУЛЯЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Как показано в [5], усредненные уравнения, не обладающие инвариантами Римана, удобно представлять в виде гидродинамической системы для параметров движения среды и возбужденных волн: средней плотности $\bar{\rho} \equiv n$, средней скорости потока $\bar{u} \equiv v$,

плотности энергии осцилляций $\overline{\rho u} - \bar{\rho} \bar{u} = A^2$ и плотности волн (волнового числа) k . Усреднение проводится на семействе однофазных бегущих решений вида $f(x - Ut)$, где U — фазовая скорость:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv)}{\partial x} + \frac{\partial A^2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{n} \frac{\partial P(n)}{\partial x} + \frac{\partial E^2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial A^2}{\partial t} + \frac{\partial(VA^2)}{\partial x} + A^2 \frac{\partial v}{\partial x} + E^2 \frac{\partial n}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(kU)}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь

$$E^2 = E^2(n, k, A^2), \quad V = v + W(n, k, A^2), \quad U = v + U_1(n, k, A^2) \tag{5}$$

— функции, конкретный вид которых определяется при усреднении законов сохранения исходной системы дисперсионной гидродинамики по быстрым осцилляциям (детали см. в [5]). Для дальнейшего будут важны лишь некоторые общие свойства этих функций, определяющие асимптотические свойства системы (4).

Нестационарное течение, описываемое системой (4), можно условно разделить на две части: медленное гидродинамическое движение, характеризуемое переменными n и v ($P(n)$ — обычное гидродинамическое давление), и квазистационарные нелинейные осцилляции с плотностью энергии A^2 и волновым числом k . Разумеется, эти движения не являются независимыми. Члены $\partial A^2 / \partial x$ и $\partial E^2 / \partial x$ в первых двух уравнениях описывают влияние осцилляций на плотность и скорость гидродинамического потока. И наоборот, члены $A^2 \partial v / \partial x$ и $E^2 \partial n / \partial x$ в уравнении переноса энергии нелинейных волн характеризуют влияние на осцилляции изменений параметров гидродинамического течения.

Рассмотрим теперь некоторые формальные предельные случаи.

2.1. Волны нулевой амплитуды, $A^2 = 0$

Из анализа, проведенного в [5], следует, что при $A \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} E^2 &\propto A^2, \\ V &\rightarrow \partial \omega_0 / \partial k, \\ U &\rightarrow \omega_0 / k. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\omega = \omega_0(k, n, v)$ — обычное линейное дисперсионное соотношение, в котором, однако, константы ρ_0, u_0 , относительно которых происходит линеаризация,

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho_1 e^{i(kx - \omega t)}, \\ u &= u_0 + u_1 e^{i(kx - \omega t)}, \end{aligned}$$

заменены медленно меняющимися параметрами среднего течения n, v . Величины V, U , таким образом, превращаются в обычные линейные групповую и фазовую скорости,

которые теперь также зависят не только от k , но и от гидродинамических переменных n и v . Из (4)–(6) следует, что система (4) имеет точную редукцию

$$\begin{aligned} A^2 &= 0, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{n} \frac{\partial P(n)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega_0(k, n, v)}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Первые два уравнения системы (7) представляют собой уравнения эйлеровской гидродинамики, которые могут быть получены из исходной системы, содержащей пространственные производные высоких порядков, непосредственным устремлением дисперсионного параметра к нулю. Третье — закон сохранения числа волн — в рассматриваемом случае нулевой амплитуды носит чисто-формальный характер. Тем не менее именно это уравнение содержит важную информацию об асимптотическом поведении характеристик системы (4).

2.2. Солитоны, $k = 0$

Сразу оговоримся, что «солитонами» в настоящей работе мы называем формальные решения систем дисперсионной гидродинамики в виде уединенных волн. Разумеется, такие решения в общем случае не обладают многими свойствами настоящих солитонов в точно интегрируемых системах, в частности, столкновение «неинтегрируемых» солитонов не является упругим и сопровождается излучением (см., например, [31]). При $k \rightarrow 0$ имеем из [5] следующие асимптотики:

$$E^2 \propto A^2 \propto k, \quad V - U \propto k.$$

Величина $\zeta = A^2/k = O(1)$ имеет смысл средней энергии одного колебания и остается конечной при устремлении k к нулю. Уравнение для ζ , следующее из (4), имеет вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \zeta \left[\frac{\partial v}{\partial x} + f(k, n, \zeta) \frac{\partial n}{\partial x} \right] + \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x} [k\zeta(V - U)] = 0, \quad (8)$$

где

$$f(k, n, \zeta) = E^2/A^2 = O(1).$$

Таким образом, у системы (4) существует еще одна точная редукция:

$$\begin{aligned} k &= 0, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nv) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{n} \frac{\partial P(n)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + U_s(n, v, \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \zeta \left[\frac{\partial v}{\partial x} + f(0, n, \zeta) \frac{\partial n}{\partial x} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$U_s(n, v, \zeta) = \lim_{k \rightarrow 0} U. \tag{10}$$

Следует отметить, что в отличие от полной системы (4), имеющей четвертый порядок, редуцированные системы (7), (9) состоят из трех уравнений. Это, очевидно, является следствием слияния двух семейств характеристик в линейном и солитонном пределах. В первом случае кратная характеристическая скорость совпадает с линейной групповой скоростью $\partial\omega_0/\partial k$, а во-втором — со скоростью солитона U_s . Подчеркнем, что системы (7), (9) обладают по крайней мере двумя инвариантами Римана — это инварианты идеальной гидродинамики Эйлера [10]:

$$\partial_t J_{\pm} + V_{\pm} \partial_x J_{\pm} = 0, \tag{11}$$

где

$$J_{\pm}(n, v) = v \pm \int \frac{c_s(n)}{n} dn \tag{12}$$

— инварианты Римана,

$$c_s^2(n) = dP(n)/dn, \tag{13}$$

c_s — скорость звука,

$$V_{\pm}(n, v) = v \pm c_s \tag{14}$$

— характеристические скорости. Полагая J_+ или J_- постоянным ($J_{\pm} = \text{const}$ является точным решением системы (11)), всегда можно диагонализировать оставшуюся систему двух уравнений. Существенно, что эти свойства не зависят от диагонализуемости полной модуляционной системы. То обстоятельство, что при $A^2 = 0$ и $k = 0$ в системе (4) эйлеровские уравнения «отщепляются», позволяет описать с ее помощью бездиссипативную ударную волну, соединяющую два эйлеровских режима.

3. ЕСТЕСТВЕННЫЕ УСЛОВИЯ СПИВКИ ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧЕ ОПРОКИДЫВАНИЯ

Пусть решение уравнений Эйлера с опрокидывающимися вправо монотонными начальными данными (рис. 1а)

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x) \tag{15}$$

имеет вид

$$\rho = \rho_e(x, t), \quad u = u_e(x, t). \tag{16}$$

Тогда при $t > t_0$, где t_0 — момент опрокидывания (без ограничения общности положим $t_0=0$), в плоскости xt решения полной системы, содержащей дисперсионные члены, выделяется осцилляторная область бездиссипативной ударной волны (рис. 1б,

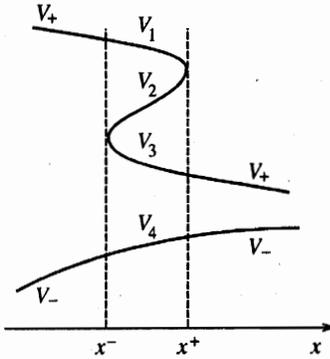


Рис. 2. Поведение характеристических скоростей в бездиссипативной ударной волне

в), ограниченная кривыми $x^-(t)$ — задний фронт — и $x^+(t)$ — передний фронт. Поведение средних величин в этой области описывается уиземовской системой (4). Вне области бездиссипативной ударной волны по-прежнему справедливы уравнения Эйлера для переменных ρ, u , которые имеют ту же риманову форму (11):

$$\partial_t r_{\pm} + W_{\pm} \partial_x r_{\pm} = 0, \tag{17}$$

где

$$r_{\pm} = J_{\pm}(\rho, u), \quad W_{\pm} = V_{\pm}(\rho, u). \tag{18}$$

Сформулируем теперь граничные условия для модуляционной системы (4), позволяющие сшить среднее течение в уиземовской области с гладким течением (9) на (неизвестных заранее) границах $x^{\pm}(t)$. Прежде всего отметим, что число характеристик во внешней и внутренней областях различно, поэтому шивка может происходить лишь в точках, в которых сливаются пары семейств характеристик уиземовской системы, т. е. при $A^2 = 0$ (7) и при $k = 0$ (9). С самого начала ограничимся случаем отрицательной дисперсии, когда генерация волны ($A^2 \rightarrow 0$) происходит на заднем фронте, а образование солитонов ($k \rightarrow 0$) — на переднем (см. [15, 4, 5]).

Линии $x^{\pm}(t)$, разделяющие два аналитически различных режима, представляют собой, согласно свойствам квазилинейных гиперболических систем [32], характеристики (в нашем случае — огибающие кратных характеристик, т. е. каустики) на изучаемом семействе решений. Рассмотрим подробнее поведение характеристик в уиземовской области. Характеристические уравнения модуляционной системы (4) имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = V_i(n, v, k, A^2), \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{19}$$

где V_i — характеристические (групповые) скорости — собственные числа матрицы коэффициентов модуляционной системы (4). Ограничимся случаем вещественных и, вообще говоря, различных V_i , что является условием гиперболичности. Пусть $V_1 \geq V_2 \geq V_3 \geq V_4$. Тогда условия непрерывной шивки характеристик на каустических поверхностях принимают следующий вид (см. рис. 2):

при $x = x^-(t)$

$$\begin{aligned} V_2(n, v)|_{x^-} &= V_3(n, v)|_{x^-} = \frac{dx^-}{dt}, \\ V_1(n, v)|_{x^-} &= W_+(\rho^-, u^-), \\ V_4(n, v)|_{x^-} &= W_-(\rho^-, u^-); \end{aligned} \tag{20}$$

при $x = x^+(t)$

$$\begin{aligned} V_2(n, v)|_{x^+} &= V_1(n, v)|_{x^+} = \frac{dx^+}{dt}, \\ V_3(n, v)|_{x^+} &= W_+(\rho^+, u^+), \\ V_4(n, v)|_{x^+} &= W_-(\rho^+, u^+), \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} \rho^\pm &\equiv \rho_e(x^\pm, t), \\ u^\pm &\equiv u_e(x^\pm, t). \end{aligned}$$

Будем называть сформулированную задачу (4), (20), (21) *задачей опрокидывания*. Подчеркнем, что задача опрокидывания ставится не для исходной системы, а для ее уравнений Уизема.

Нельзя не отметить сходства качественного поведения характеристических скоростей в задаче опрокидывания (рис. 2) с поведением инвариантов Римана в решении задачи Гуревича—Питаевского для вполне интегрируемых систем [4, 25, 27]. Качественный ход характеристик в плоскости xt , соответствующий условиям (20), (21), изображен на рис. 3.

Приведем еще одну форму условий сшивки (20), (21). Как следует из анализа, проведенного в настоящем разделе, при $A^2 = 0$ и при $k = 0$ модуляционная система вырождается и у нее появляются инварианты Римана $J_\pm(n, v)$ (12). Для рассматриваемой задачи эта структура носит локальный (в плоскости (x, t)) характер, так как соответствующие связи между величинами реализуются на решении лишь вдоль границ бездиссипативной ударной волны. Поэтому римановы переменные $J_\pm(n, v)$ будем называть локальными инвариантами Римана.

Условия (20), (21) тогда могут быть переписаны как условия сшивки локальных инвариантов Римана модуляционной системы с инвариантами внешней эйлеровской гидродинамики $r_\pm \equiv J_\pm(\rho, u)$ на фронтах бездиссипативной ударной волны.

При $x = x^-(t)$

$$\begin{aligned} A^2 &= 0, \\ J_+|_{x^-} &= r_+|_{x^-}, \\ J_-|_{x^-} &= r_-|_{x^-}. \end{aligned} \tag{22}$$

При $x = x^+(t)$

$$\begin{aligned} k &= 0, \\ J_+|_{x^+} &= r_+|_{x^+}, \\ J_-|_{x^+} &= r_-|_{x^+}. \end{aligned} \tag{23}$$

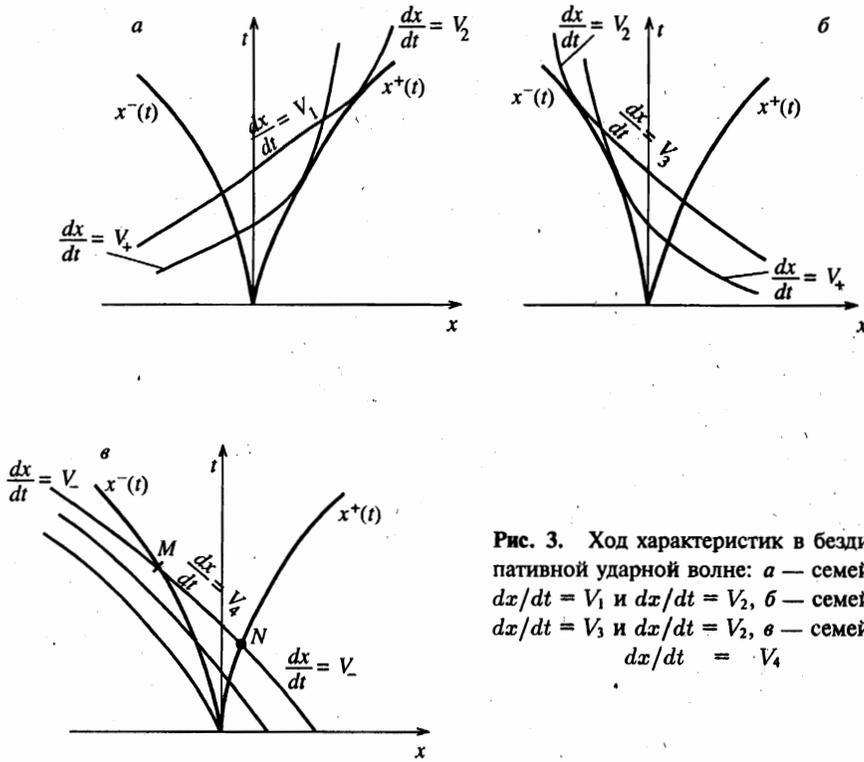


Рис. 3. Ход характеристик в бездиссипативной ударной волне: а — семейства $dx/dt = V_1$ и $dx/dt = V_2$, б — семейства $dx/dt = V_3$ и $dx/dt = V_2$, е — семейство $dx/dt = V_4$

Подчеркнем еще раз, что $J_{\pm} = J_{\pm}(n, v)$ — «внутренние» (уиземовские) переменные, а $r_{\pm} = r_{\pm}(\rho, u)$ — «внешние» (эйлеровские).

Наконец, используя соотношения (12), (18), приведем представление условий (22), (23) в терминах непрерывной сшивки средних плотности и скорости течения.

При $x = x^-(t)$

$$\begin{aligned} A^2 &= 0, \\ n(x^-, t) &= \rho^-, \\ v(x^-, t) &= u^-. \end{aligned} \tag{24}$$

При $x = x^+(t)$

$$\begin{aligned} k &= 0, \\ n(x^+, t) &= \rho^+, \\ v(x^+, t) &= u^+. \end{aligned} \tag{25}$$

В заключение отметим, что выполнение условий сшивки для среднего гидродинамического течения не гарантирует непрерывности волновых переменных и их производных на фронтах. Последнее не противоречит физической постановке, математически же существование таких разрывов оказывается возможным благодаря гиперболичности изучаемых уравнений [32]. Как показывают результаты работ [5, 15], на границах

x^{\pm} возникают разрывы: на солитонном фронте обращаются в бесконечность производные $\partial A^2/\partial x$ и $\partial k/\partial x$ (это так называемый сингулярный разрыв [15]), а в точке генерации терпит разрыв сама величина k (в этой точке нарушается закон сохранения числа волн) и, вообще говоря, производная $\partial A^2/\partial x$. Следует также иметь в виду, что наличие особенностей в решении задачи для модуляционных уравнений является следствием асимптотического характера метода Уизема; в точном решении (если оно существует) сингулярностей нет.

4. ПЕРЕНОС ЗНАЧЕНИЙ ЛОКАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ РИМАНА ЧЕРЕЗ УИЗЕЛОВСКУЮ ЗОНУ. УСЛОВИЯ ПЕРЕХОДА ЧЕРЕЗ БЕЗДИССИПАТИВНУЮ УДАРНУЮ ВОЛНУ И ТЕОРЕМА О ПРИМЫКАЮЩЕМ ТЕЧЕНИИ

Рассмотрим семейство характеристик, соответствующее скорости V_4 (рис. 3в). Выделим некоторую характеристику, пересекающую границы бездиссипативной ударной волны в точках M и N . Тогда, как мы покажем, для этой характеристики выполняется соотношение

$$J_-(M) = J_-(N), \tag{26}$$

т. е. на решениях задачи опрокидывания значение локального инварианта Римана переносится через область бездиссипативной ударной волны вдоль «своей» характеристики. Для диагональных систем условие (26) является очевидным следствием постоянства соответствующего инварианта Римана вдоль характеристики. В общем (недиагональном) случае это соотношение является нетривиальным и требует обоснования.

Рассмотрим некоторую величину R , задаваемую обыкновенным дифференциальным уравнением вдоль произвольной гладкой кривой Γ , $x = x_{\Gamma}(t)$, соединяющей точки M и N :

$$D_{\Gamma}R_4 = f(\Gamma) \tag{27}$$

с граничным условием

$$R_4(M) = J_-(M). \tag{28}$$

Функция

$$f(\Gamma) = \sum_{i=1}^4 l_i^4(y) |_{\Gamma} D_{\Gamma}u_i \tag{29}$$

задается вдоль Γ на решении задачи опрокидывания $y_i(x, t)$, которое будем здесь считать известным. Оператор D_{Γ} означает дифференцирование вдоль Γ ; $\mathbf{l}^{(4)}$ — левый собственный вектор матрицы коэффициентов модуляционной системы (1), отвечающий скорости V_4 , $y = (n, v, k, A^2)$. Подчеркнем, что характеристики $dx/dt = V_4$ на обоих фронтах сшиваются с эйлеровскими характеристиками из одного и того же семейства $dx/dt = W_-$ (см. (20), (21)).

Нетрудно видеть, что при $A^2 = 0$ уравнение (27) имеет общий интеграл, не зависящий от кривой Γ , и этот интеграл есть не что иное, как инвариант Римана

$J_-(n, v)$ [10, 32]. Действительно, при $A^2 = 0$ вследствие редукции (7) вектор $I^{(4)}$ переходит в левый собственный вектор матрицы коэффициентов эйлеровской системы, соответствующий скорости W_- (14). Поэтому функция $f(\Gamma)$ совпадает в этом пределе с характеристической формой эйлеровской гидродинамики и является полной производной D_Γ , независимо от кривой Γ [32, 33]. Аналогичное утверждение имеет место и для $k = 0$. Таким образом,

$$R_4|_{A^2=0} = R(n, v) = J_-(n, v) + C^1, \quad (30)$$

$$R_4|_{k=0} = R(n, v) = J_-(n, v) + C^2 \quad (31)$$

— интегралы уравнения (27) на интересующем нас семействе решений. Важно, что сами интегралы (30), (31) являются локальными и их значения не зависят от глобальных свойств решения. Поэтому соотношение между константами интегрирования C^1 и C^2 легко устанавливается с помощью естественного требования совпадения локальных интегралов (30) и (31) при устремлении ширины бездиссипативной ударной волны к нулю. В данном случае, очевидно, $C^1 = C^2 \equiv C$, и из (28) следует, что $C = 0$. Отметим, что в дальнейшем возникнет ситуация, когда вопрос о соотношении между константами интегрирования окажется не столь тривиальным. Итак, $R = R(\Gamma)$ является непрерывной функцией кривой Γ и принимает на ее концах значения

$$R_4(M) = J_-(M), \quad R_4(N) = J_-(N). \quad (32)$$

Пусть теперь кривая Γ является характеристикой, задаваемой уравнением $dx/dt = V_4$ на решении рассматриваемой задачи. Тогда выражение в правой части уравнения (27) совпадает с характеристической формой [14, 32, 33] модуляционной системы (4), соответствующей скорости V_4 , и поэтому

$$D_4 R_4 = 0, \quad (33)$$

где

$$D_4 = \frac{\partial}{\partial t} + V_4(x, t) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Теперь из (32) немедленно следует соотношение (26). Подчеркнем, что, несмотря на внешнее сходство выражения (33) с римановой формой уравнений диагонализующих квазилинейных систем, величина $R_4(x, t)$, вообще говоря, не является «настоящим» инвариантом Римана, так как D_4 является линейным дифференциальным оператором, задаваемым на решении задачи опрокидывания. Разумеется, для диагонализующих систем зависимость от решения пропадает, и R_4 становится локальной функцией зависимых переменных u_i , т. е. превращается в обычный инвариант Римана. Следствием соотношения (26) и условий сшивки (22), (23) является существенное ограничение, накладываемое на инварианты внешнего гидродинамического течения, прилегающего к бездиссипативной ударной волне, а именно,

$$r_-(M) = r_-(N). \quad (34)$$

Заметим, что в приведенных выше рассуждениях предполагалось, что интегрирующий множитель, обеспечивающий существование полной производной D_Γ в правой части

выражения (28), равен единице. Это справедливо для эйлеровской гидродинамики и, соответственно, выполняется вблизи границ бездиссипативной ударной волны для уиземовской характеристики $dx/dt = V_4$, соединяющей два эйлеровских режима. Тем не менее нетрудно показать, что сформулированное утверждение о переносе локального инварианта Римана вдоль характеристики (через уиземовскую зону) может быть обобщено и на случай интегрирующего множителя, отличного от единицы в одной или нескольких областях существования локального инварианта. В результате правило переноса локального инварианта оказывается справедливым не только для характеристик $dx/dt = V_4$, но и для характеристик из любого другого семейства, на котором в нескольких областях xt существует локальная риманова структура. Это использовано в следующем разделе, где эксплуатируется перенос данных вдоль характеристик $dx/dt = V_1$ и $dx/dt = V_3$. Напомним, что условие (34) относится к произвольной отдельно взятой характеристике из изучаемого семейства. Однако, если течение слева или справа от бездиссипативной ударной волны является простой волной или постоянно, то инвариант r_- постоянен во всей этой области и, соответственно, вдоль границы. Тогда из (34) следует соотношение, связывающее значения гидродинамических переменных по обе стороны от такой бездиссипативной ударной волны:

$$r_-(\rho^-, u^-) = r_-(\rho^+, u^+). \quad (35)$$

Таким образом, значение инварианта Римана идеальной гидродинамики переносится через уиземовскую зону, несмотря на то что сами уравнения Уизема инвариантами Римана не обладают.

Условие (35) играет в дисперсионной гидродинамике ту же роль, что и ударная адиабата в обычной диссипативной гидродинамике [10]. Подчеркнем, что соотношение (35) относится к волнам, движущимся вправо. Аналогичные результаты можно получить и для волн, распространяющихся влево, — в этом случае сохраняться при переходе через бездиссипативную ударную волну будет инвариант r_+ . Впервые соотношение (35) было предложено в [4] на основании физических соображений.

Соотношение (35) позволяет также сформулировать общую теорему о примыкающем течении [10, 32, 34] в дисперсионной гидродинамике. Если течение по одну сторону от бездиссипативной ударной волны постоянно ($\rho = \rho_0, u = u_0$), то течение по другую сторону непременно является простой волной. Действительно, одно из семейств характеристик переносит значение «своего» инварианта Римана через бездиссипативную ударную волну, а это и означает, что течение по другую сторону является простой волной (или, как частный случай, является постоянным).

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ФРОНТОВ БЕЗДИССИПАТИВНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ УИЗЕМА

Обратимся теперь к одной из наиболее важных нелинейных задач гидродинамики — задаче о распаде начального разрыва. Как показано в [4, 26], в результате распада разрыва по обе стороны от него образуются две волны — бездиссипативная ударная волна и волна разрежения — в различных комбинациях в зависимости от начальных данных. Между этими волнами возникает область плато, в которой течение постоянно¹⁾.

¹⁾ В некоторых случаях вместо плато возникает вакуумная зона [4, 26].

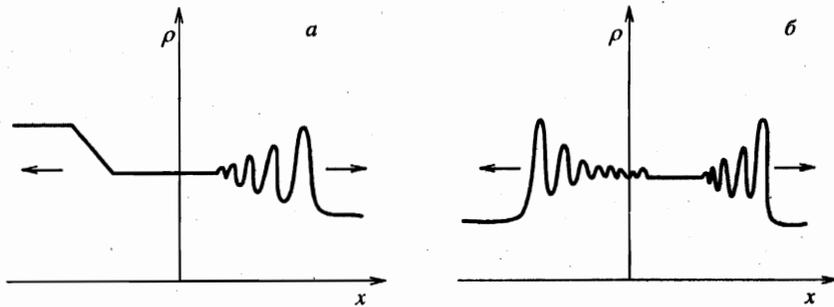


Рис. 4. Типичные картины распада разрыва в дисперсионной гидродинамике: *a* — слева — волна разрежения, справа — бездиссипативная ударная волна, *б* — две бездиссипативные ударные волны, бегущие в разные стороны

Типичные картины распада разрыва изображены на рис. 4. То, что произвольный разрыв, параметризуемый четырьмя константами ρ^\pm, u^\pm , не может быть «защит» в общем случае одной бездиссипативной ударной волной, следует из наличия дополнительного соотношения (35), уменьшающего число независимых параметров до трех. Искомая сшивка достигается введением двух волн, бегущих в разные стороны. Гидродинамические величины по обе стороны волны, бегущей вправо, связаны соотношением (35). Для волны, бегущей влево, как уже указывалось, имеем аналогичное соотношение

$$r_+(\rho^-, u^-) = r_+(\rho^+, u^+). \quad (36)$$

Заметим, что одно из соотношений, (35) либо (36), автоматически выполняется и в случае, если одна из образующихся волн является волной разрежения — в этом случае оно является следствием постоянства соответствующего инварианта Римана уравнений идеальной гидродинамики. Эволюция бездиссипативной ударной волны описывается автомодельными ($\tau = x/t$) решениями соответствующей модуляционной системы. Мы ограничимся рассмотрением бездиссипативных ударных волн, бегущих вправо. Можно не интересоваться точной структурой решения в области бездиссипативной ударной волны, ограничившись лишь эйлеровскими уравнениями, но введя в них разрыв, занимающий конечную область в автомодельных переменных от τ^- до τ^+ [4]. В [4] были численно определены значения τ^- и τ^+ как функции скачка плотности на разрыве для ионно-звуковой бездиссипативной ударной волны. Для аналитического решения этой задачи, как оказывается, достаточно знания локальной римановой структуры и асимптотического поведения характеристик модуляционной системы вблизи фронтов бездиссипативной ударной волны. Пусть, как и ранее, постоянные значения плотности и скорости перед волной равны ρ^+ и u^+ , а за ней — ρ^- и u^- . Не ограничивая общности, примем $u^+ = 0$, что соответствует переходу в бегущую систему координат. Прежде всего учтем, что автомодельная бездиссипативная ударная волна описывается решениями модуляционной системы в виде центрированной простой волны. Это означает, что семейство характеристик, соответствующее скорости V_2 , образует веер из прямых с центром в точке $(0,0)$, а границы бездиссипативной ударной волны — прямые $x = \tau^- t$ и $x = \tau^+ t$ — представляют собой кратные характеристики (рис. 5).

Прямолинейные характеристики внешнего течения, соответствующие скорости V_+ , «протыкают» фронт бездиссипативной ударной волны. Затем они искривляются и на противоположном фронте сливаются с характеристикой из центрированного семейства.

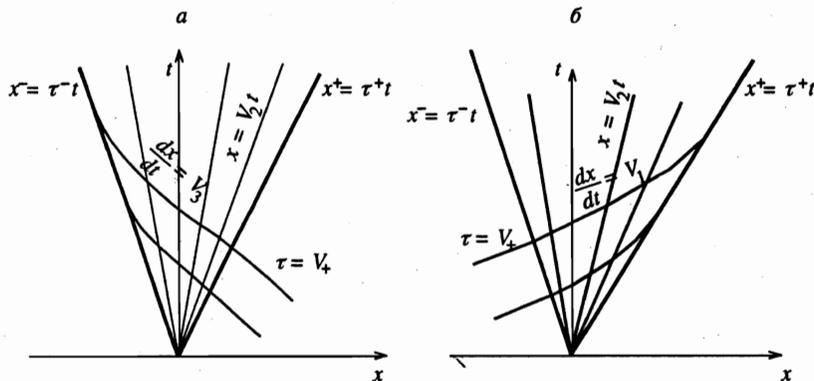


Рис. 5. Характеристики в центрированной простой бездиссипативной ударной волне: а — семейства $dx/dt = V_2$ и $dx/dt = V_3$, б — семейства $dx/dt = V_2$ и $dx/dt = V_1$

Следует отметить важное отличие рассматриваемого особого случая простой волны от описанной в разд. 2 общей ситуации, в которой границы не являются характеристиками, а представляют собой огибающие, имеющие в каждой точке кратное характеристическое направление (см. рис. 3а, б). На рис. 5 не показано описанное ранее семейство характеристик $dx/dt = V_4$, так как никаких принципиальных изменений по сравнению с общим случаем (рис. 3в) оно не претерпевает (разумеется, характеристики во внешней области становятся прямолинейными).

Рассмотрим теперь для определенности задний фронт волны $x^- = \tau^- t$, на котором обращается в нуль амплитуда $A^2 = 0$ и выполняются условия сшивки (24) $v^- = u^-$, $n^- = \rho^-$. Как было показано в разд. 2, кратная характеристическая скорость в этом случае совпадает с линейной групповой скоростью генерируемой волны, т. е.

$$\omega'_0(k_0, u^-, \rho^-) = \tau^-, \tag{37}$$

где k_0 — волновое число, с которым происходит нелинейная генерация на заднем фронте [5]. Таким образом, задача определения координаты τ_- сводится к нахождению зависимости $k_0(u^-, \rho^-, \rho^+)$. Для отыскания k_0 необходимо определить локальный инвариант Римана, соответствующий кратной характеристической скорости при $A^2 = 0$, а затем приравнять его внешнему инварианту r_+ , приходящему с эйлеровскими характеристиками на передний фронт бездиссипативной ударной волны. Опишем эту процедуру подробнее.

Условие перехода (35) принимает вид $r_-(\rho^-, u^-) = r_+(\rho^+, 0)$ и позволяет определить величину u^- как функцию ρ^+, ρ^- . В результате имеем лишь два нетривиальных параметра ρ^+ и ρ^- , характеризующих автомодельную задачу. Рассмотрим теперь систему (7), в которой положим постоянным гидродинамический инвариант $J_-(n, v)$ (этот инвариант в бездиссипативной ударной волне сшивается с $r_-(\rho^+, \rho^-)$ (см. (16)), т. е.

$$J_-(n, v) = r_-(\rho^+, \rho^-) = \text{const.} \tag{38}$$

Условие (38) автоматически обеспечивает сшивку на заднем фронте и определяет зависимость $v(n)$ в системе (7). Сама система принимает при этом вид

$$\begin{aligned} \partial_t J_+(n) + V_+(n) \partial_x J_+(n) &= 0, \\ \partial_t k + \partial_x \omega_0(k, n) &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Так как (39) является гиперболической системой второго порядка, она всегда может быть диагонализирована [32]. Один из ее инвариантов Римана уже указан — это $J_+(n) \equiv J_+(n, v(n))$, второй с необходимостью существует и может быть найден в виде $J_0 = J_0(k, n)$. Этот инвариант, согласно результатам разд. 4, переносится через уиземовскую зону вдоль характеристики $dx/dt = V_3$ (см. рис. 5а), т. е.

$$J_0(k_0, \rho^-) = r_+(u^+ = 0, \rho^+). \quad (40)$$

Уравнение (40) дает искомую зависимость $k_0(\rho^+, \rho^-)$. Отметим, что инвариантом Римана является любая функция $f(J_0)$, поэтому для определения конкретной зависимости $J_0(k, n)$, входящей в (40), необходимо наложить на J_0 естественное условие

$$J_0(k = 0, n) = J_+(n), \quad (41)$$

которое обеспечивает совпадение рассматриваемых инвариантов при устремлении ширины бездиссипативной ударной волны к нулю (напомним, что $k = 0$ на переднем фронте, а величина J_0 вычисляется на заднем, поэтому рассмотрение предела $J_0(k \rightarrow 0)$ эквивалентно вычислению J_0 для бездиссипативной ударной волны бесконечно малой интенсивности).

Совершенно аналогичным образом может быть вычислена и координата переднего фронта τ^+ . Для этого следует определить инварианты Римана системы (9) с интегралом (38), а затем приравнять локальный инвариант $J_s(n, \zeta)$, соответствующий скорости U_s , внешнему инварианту $r_+(u^-, \rho^-)$ (перенос происходит вдоль характеристики $dx/dt = V_1$). Условие для бездиссипативной ударной волны нулевой интенсивности, аналогичное (41), имеет вид

$$J_s(n, \zeta = 0) = J_+(n). \quad (42)$$

В результате получаем зависимость

$$\zeta_s = \zeta_s(\rho^-, \rho^+), \quad (43)$$

где ζ_s — значение величины ζ на солитонном фронте τ^+ .

Автомодельная координата солитонного фронта (см. (21)) определяется кратной характеристической скоростью при $k = 0$, которая совпадает со скоростью солитона U_s (10) (напомним, что $v(\tau^+ = u^+ = 0)$):

$$\tau^+ = U_s(\rho^+, 0, \zeta_s) \equiv U_s(\rho^-, \rho^+). \quad (44)$$

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных примеров.

6. УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА—де ВРИЗА

Рассмотрим уравнение КдВ в виде

$$\partial_t u + u \partial_x u + \partial_{xxx}^3 u = 0. \quad (45)$$

Модуляционная система уравнения КдВ обладает инвариантами Римана [6, 20]. Соответствующая задача о распаде разрыва,

$$\begin{aligned} u(0, x) &= 0, & x > 0, \\ u(0, x) &= 1, & x \leq 0, \end{aligned} \tag{46}$$

была полностью исследована в [15]. Вычислим координаты фронтов бездиссипативной ударной волны, пользуясь общей техникой, описанной в настоящем разделе (т. е. без использования римановой формы полной модуляционной системы). Условия сшивки, аналогичные условиям (24), (25), для средней (усредненной по осцилляциям) величины $\eta \equiv \bar{u}$ принимают следующий вид:

при $\tau = \tau^-$

$$A^2 = 0, \quad \eta = 1, \tag{47}$$

при $\tau = \tau^+$

$$k = 0, \quad \eta = 0. \tag{48}$$

Соотношение (35) можно считать выполненным автоматически, так как внешнее течение в гидродинамике КдВ с необходимостью является простой волной. Выпишем дисперсионное соотношение для линейных волн КдВ на эволюционирующем гидродинамическом фоне $\eta(x, t)$:

$$\omega_0(k, \eta) = k\eta - k^3. \tag{49}$$

Соотношение (49) позволяет сразу получить редукцию модуляционной системы для линейного фронта, аналогичную (7):

$$\begin{aligned} A^2 &= 0, \\ \partial_t \eta + \eta \partial_x \eta &= 0, \\ \partial_t k + \partial_x (k\eta - k^3) &= 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Из (50) легко находится искомый локальный инвариант Римана:

$$J_0(k, \eta) = \eta - 3k^2/2. \tag{51}$$

Роль гидродинамического инварианта J_+ играет сама величина η (см. (39)). Отметим, что условие (41) выполнено, так как $J_0(0, \eta) = \eta$. Тогда для k_0 имеем уравнение $J_0(k_0, 1) = 0$, дающее $k_0^2 = 2/3$ (см. (40)). Отсюда сразу находим (см. (37))

$$\tau^- = \frac{\partial \omega_0}{\partial k} \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 1 \right) = -1. \tag{52}$$

Для переднего (солитонного) фронта имеем следующую редукцию модуляционной системы КдВ [5]:

$$\begin{aligned} k &= 0, \\ \partial_t \eta + \eta \partial_x \eta &= 0, \\ \partial_t \zeta + U_s(\eta, \zeta) \partial_x \zeta + \zeta \partial_x \eta &= 0, \end{aligned} \tag{53}$$

где

$$U_s(\eta, \zeta) = \eta + 2\zeta^{2/3}/3.$$

Из (53) находим локальный инвариант Римана, постоянный вдоль солитонного фронта:

$$J_s(\eta, \zeta) = \eta + \zeta^{2/3}. \quad (54)$$

Условие (42) выполняется, поскольку $J_s(\eta, 0) = \eta$. Перенос локального инварианта Римана вдоль семейства характеристик $dx/dt = V_1$ дает уравнение $J_s(0, \zeta_s) = 1$, из которого следует, что $\zeta_s = 1$. Тогда (см. (44))

$$\tau^+ = U_s(0, \zeta_s) = 2/3. \quad (55)$$

Найденные значения τ^\pm соответствуют результатам работы [15].

7. НЕЛИНЕЙНЫЕ ИОННО-ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим систему (2), описывающую нелинейные течения в неизотермической плазме. Модуляционная система для уравнений (2) была получена в [5]. Как уже отмечалось, отсутствие инвариантов Римана у этой системы не позволяет построить точное решение задачи опрокидывания известными методами. Тем не менее наличие локальной римановой структуры, обеспечиваемой режимом генерации бездиссипативной ударной волны, позволяет аналитически вычислить координаты фронтов бездиссипативной ударной волны.

7.1. Задний фронт ионно-звуковой бездиссипативной ударной волны

Для определения заднего фронта бездиссипативной ударной волны достаточно лишь знания линейного дисперсионного соотношения, которое в изучаемом случае имеет вид [5]

$$\omega_0(k, v, n) = k(v + \gamma^{1/2}), \quad (56)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{1 + k^2/n}. \quad (57)$$

Тогда для определения локального инварианта Римана имеем систему трех уравнений при $A^2 = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_t J_\pm + V_\pm \partial_x J_\pm &= 0, \\ \partial_t k + \partial_x (k(v + \gamma^{1/2})) &= 0, \end{aligned} \quad (58)$$

где

$$J_\pm(n, v) = v \pm \ln n, \quad V_\pm = v \pm 1. \quad (59)$$

Условия (22), (35) фиксируют инвариант J_- :

$$v - \ln n = u^- - \ln \rho^- = - \ln \rho^+. \quad (60)$$

Из (60) следует

$$u^- = \ln \Delta, \quad v = \ln(n/\rho^+), \quad (61)$$

где

$$\Delta = \rho^- / \rho^+ \quad (62)$$

— скачок концентрации, который теперь является единственным параметром задачи.

С учетом (61) система (58) принимает вид

$$\partial_t J_+ + [\ln(n/\rho^+) + 1] \partial_x J_+ = 0, \quad (63)$$

$$\partial_t k + \partial_x [k(\ln(n/\rho^+) + \gamma^{1/2})] = 0,$$

где

$$J_+(n) = 2 \ln n - \ln \rho^+.$$

Диагонализация системы (63) приводит к следующим инвариантам Римана:

$$J_1 = J_+(n), \quad (64)$$

$$J_2 = \ln n + \ln \gamma + \frac{2}{1 + \gamma^{1/2}}.$$

Локальный инвариант Римана $J_0(k, n) = f(J_2(k, n))$ находится с помощью условия (41), которое в данном случае принимает вид

$$f(J_2(0, n)) = J_+(n). \quad (65)$$

Из (64), (65) следует, что

$$f(x) = 2(x - 1) - \ln \rho^+. \quad (66)$$

Тогда

$$J_0(k, n) = 2 \left(\ln n + \ln \gamma + \frac{2}{1 + \gamma^{1/2}} - 1 \right) - \ln \rho^+. \quad (67)$$

Величина $\gamma_0 = 1/(1 + k_0^2/\rho^-)$ определяется из условия (40) переноса локального инварианта Римана J_0 вдоль характеристик $dx/dt = V_3$:

$$2 \left(\ln \rho^- + \ln \gamma_0 + \frac{2}{1 + \gamma_0^{1/2}} - 1 \right) - \ln \rho^+ = \ln \rho^+. \quad (68)$$

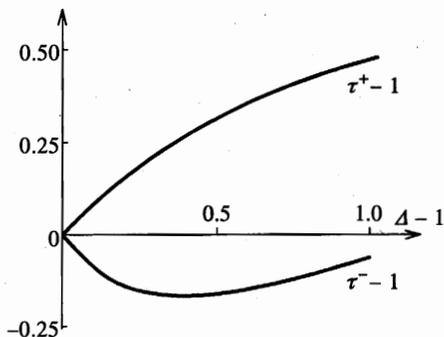


Рис. 6. Автомодельные границы ионно-звуковой бездиссипативной ударной волны τ^- и τ^+ как функции скачка плотности $\Delta = \rho^-/\rho^+$

В результате для координаты заднего фронта

$$\tau^- = (\partial\omega_0/\partial k)|_{n=\rho_2, \gamma=\gamma_0} = \ln \Delta + \gamma_0^{3/2} \tag{69}$$

имеем уравнение

$$\ln [\Delta \cdot (\tau_*^-)^{2/3}] = \frac{(\tau_*^-)^{1/3} - 1}{(\tau_*^-)^{1/3} + 1}, \tag{70}$$

где $\tau_*^- = \tau^- - \ln \Delta$. Зависимость $\tau^-(\Delta)$ представлена на рис. 6 и обнаруживает полное совпадение с результатами численного счета [4].

7.2. Передний фронт ионно-звуковой бездиссипативной ударной волны

Нахождение координат переднего фронта автомодельной ионно-звуковой бездиссипативной ударной волны идеологически ничем не отличается от проведенных ранее вычислений для заднего фронта, однако сопряжено с громоздкими выкладками. Это связано со сложностью коэффициентов модуляционной системы (4) для нелинейных ионно-звуковых волн в солитонном пределе (см. [5]). Мы приведем здесь лишь окончательный результат. Неявная зависимость координаты переднего фронта τ^+ от скачка плотности Δ на границах бездиссипативной ударной волны дается уравнением

$$\ln \Delta = \int_1^{\tau^+} \frac{z-1}{z} \frac{3a_-z - a_+z^{-1} + 2a'_-z^2 + 2a'_+}{a_-z^2 + a_-z + a_+z^{-1} - 2a_- - a_+} dz, \tag{71}$$

где

$$a_+(z) = -z^{1/4} \int_{-z^2/2}^{\psi(z)} (z-y)^{1/2} \left\{ -z + \frac{\exp[(z^2-y^2)/2] - 1}{z-y} \right\}^{-1/2} y dy, \tag{72}$$

$$a_-(z) = z^{-1/4} \int_{-z^2/2}^{\psi(z)} (z-y)^{1/2} \left\{ -z + \frac{\exp[(z^2-y^2)/2] - 1}{z-y} \right\}^{-1/2} dy.$$

Верхний предел интегрирования $\psi(z)$ задается алгебраическим уравнением

$$(-2\psi)^{1/2} - z + \frac{\exp(\psi + z^2/2) - 1}{z} = 0. \tag{73}$$

График $\tau^+(\Delta)$, построенный по формулам (71)–(73), приведен на рис. 6 и также соответствует результатам прямых численных расчетов [4].

Авторы выражают признательность А. А. Крылову, В. В. Ходоровскому и А. В. Гуревичу за многочисленные полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке фонда CRDF (грант RM1-145). Г. А. Эль благодарит также Российский фонд фундаментальных исследований за частичную финансовую поддержку (грант 96-01-01453).

Литература

1. Ф. Калоджеро, в сб. *Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов*, ред. В. Г. Барьяхтар, В. Е. Захаров, Наукова думка, Киев (1990), с. 65.
2. В. И. Карпман, *Нелинейные волны в диспергирующих средах*, Наука, Москва (1973).
3. Б. Б. Кадомцев, *Коллективные явления в плазме*, Наука, Москва (1976).
4. А. В. Гуревич, А. П. Мещеркин, *ЖЭТФ* **87**, 1277 (1984).
5. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, Г. А. Эль, *ЖЭТФ* **98**, 1605 (1990).
6. G. V. Whitham, *Proc. Roy. Soc. A* **283**, 238 (1965).
7. А. В. Гуревич, А. П. Мещеркин, *Труды ФИАН СССР* **165**, 207 (1986).
8. Г. А. Эль, в сб. *Волновые процессы в приземной плазме*, под ред. Б. С. Моисеева, Наука, Москва (1992), с. 163.
9. Р. З. Сагдеев, *Вопросы теории плазмы*, под ред. М. А. Леонтовича, Атомиздат, Москва (1964), вып. 4, с. 20.
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
11. P. D. Lax and C. D. Levermore I–III, *Comm. Pure Appl. Math.* **36**, 253, 571, 809 (1983).
12. S. Venakides, *Comm. Pure Appl. Math.* **38**, 883 (1985).
13. P. Deift, S. Venakides, and X. Zhou, *IMR* № 6, 285 (1997).
14. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).
15. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **65**, 590 (1973).
16. F. R. Tian, *Comm. Pure Appl. Math.* **46**, 1093 (1993).
17. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, Г. А. Эль, *ЖЭТФ* **101**, 1797 (1992).
18. G. A. El, *Phys. Lett. A* **222**, 393 (1996).
19. V. Dubrovin, *Amer. Math. Soc. Transl.* **179**, 35 (1997).
20. H. Flaschka, M. G. Forest, and D. W. McLaughlin, *Comm. Pure Appl. Math.* **33**, 739 (1980).
21. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *УМН* **44**, 28 (1989).
22. С. П. Царев, *ДАН СССР* **282**, 534 (1985).
23. M. G. Forest and J. E. Lee, in *Oscillation Theory Computation and Methods of Compensated Compactness*, ed. by C. Dafermos et al., Springer-Verlag (1986), p. 35.
24. М. В. Павлов, *ТМФ* **71**, 351 (1987).
25. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, *ЖЭТФ* **92**, 1684 (1987).
26. G. A. El, V. V. Geogjaev, A. V. Gurevich, and A. L. Krylov, *Physica D* **87**, 186 (1995).
27. G. A. El and A. L. Krylov, *Phys. Lett. A* **203**, 77 (1995).
28. В. В. Авиллов, С. П. Новиков, *ДАН СССР* **294**, 325 (1987).
29. В. В. Авиллов, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *ДАН СССР* **295**, 345 (1987).
30. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **93**, 871 (1987).
31. А. Е. Кудрявцев, *Письма в ЖЭТФ* **22**, 82 (1975).
32. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, Москва (1978).
33. Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, Москва (1964).
34. Л. В. Овсянников, *Лекции по основам газовой динамики*, Наука, Москва (1981).