

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОГИБАЮЩЕЙ ПОЛЯ В ЛИНЕЙКЕ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ЛАЗЕРОВ И АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ

Д. В. Высоцкий*, А. П. Нанартович

Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований
142092, Троицк, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 26 марта 1998 г.

Выведено уравнение для плавной огибающей волнового поля, распространяющегося в плоскостной среде, обладающей эффектом резонансно малого рассеяния на одном периоде структуры. Обнаружено прямолинейное распространение огибающей поля в плоскости xz , x — по нормали к слоям. Указаны условия применимости этого уравнения. Для линейки полупроводниковых диодов со ступенчатой зависимостью от координат диэлектрической проницаемости проанализированы условия устойчивого распространения излучения и найдено в явном виде решение типа уединенного солитона.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблеме распространения излучения в слоисто-периодических средах посвящено огромное количество работ, включая монографии [1, 2]. В последние годы активно развиваются синтезируемые периодические структуры, перестраивающие существенным образом спектр распространяющихся волн (так называемые *photonics-band structures*). В лазерной физике особую роль играют брэгговские структуры, используемые как распределенная обратная связь [3] или возникающие естественным образом при рассеянии и четырехволновом взаимодействии. Как указывалось в [4], линейка полупроводниковых диодов при определенных размерах элементов структуры также может рассматриваться как аналог брэгговской структуры по отношению к боковому распространению излучения.

В обычных устройствах распределенной обратной связи, отражающих излучение, падающее на них по нормали, большой коэффициент отражения набирается на длине, включающей в себя много периодов структуры, $N \gg 1$. Это обусловлено тем, что обычно глубина модуляции диэлектрической проницаемости мала, $|\delta\epsilon| \ll \epsilon_0$, где ϵ_0 — среднее значение, а $\delta\epsilon$ — амплитуда модуляции (в общем случае комплексная) диэлектрической проницаемости. В диодной линейке $|\delta\epsilon|$ также мало; однако его следует сравнивать с малым углом падения излучения на слой, так как волновой вектор в среднем направлен по оси диодных лазеров, т.е. параллельно границам слоев. Типичная структура диодной линейки схематически изображена на рис. 1.

Малость отраженной доли излучения от одного периода распределенной обратной связи позволяет вывести дифференциальные уравнения для связанных волн [5], широко используемые в литературе. Аналогичные уравнения удастся вывести и для линейки диодов, представляющей собой резонансную структуру для боковых волн [6]. Причина,

* E-mail: dima@fly.triniti.troitsk.ru

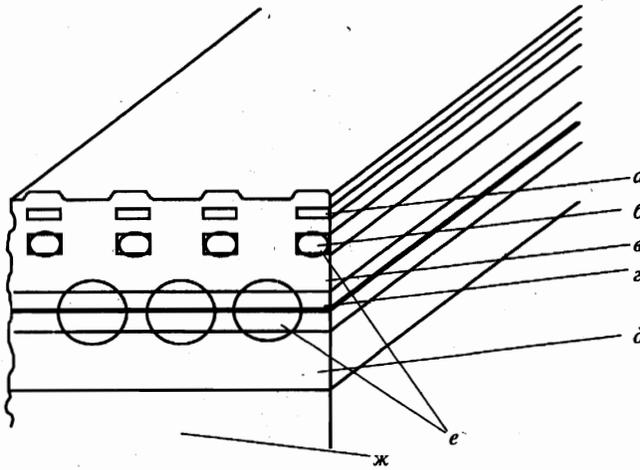


Рис. 1. Схема линейки полупроводниковых лазеров: *a* — $p\text{-GaAs}$ — добавочный поглотитель, *b* — $p\text{-Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$ — волновод, *в* — $p\text{-Al}_{0,6}\text{Ga}_{0,4}\text{As}$, *z* — GRIN — SCH — SQW — активная зона, *d* — $n\text{-Al}_{0,6}\text{Ga}_{0,4}\text{As}$, *e* — поле излучения, *ж* — n^+ -GaAs — подложка

по которой дифференциальные уравнения можно вывести, также заключается в малости коэффициента отражения боковой волны от одной ячейки периодической структуры. Однако эта малость обеспечена резонансным эффектом прохождения и имеет место, соответственно, для волн, боковой волновой вектор которых мало отличается от резонансного. Именно такие структуры и волны оказались весьма перспективными с точки зрения получения мощного когерентного излучения от диодной линейки [7]. С более общей точки зрения речь идет о периодических структурах, в которых ширина запрещенной зоны оказывается близка к нулю из-за соответствующего профиля ϵ (в квантовой механике — потенциала) на периоде.

В данной работе развивается подход, описанный в [8], для чего формулируются общие условия, необходимые для вывода уравнения для плавной огибающей в слоистой среде на основе теории матриц связи второго порядка. Для резонансной диодной линейки выводится нестационарное уравнение, описывающее распространение излучения с учетом нелинейности среды. В рамках полученного уравнения анализируется устойчивость по отношению к самофокусировке излучения и строятся стационарные решения, описывающие аналог самофокусировочного канала.

2. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Линейка диодов представляет собой довольно сложную структуру (см. рис. 1), распространение поля в которой следует описывать векторными уравнениями Максвелла. Однако в большинстве ситуаций в качестве первого приближения можно использовать скалярное уравнение Гельмгольца для когерентного поля. Так как размер активной зоны весьма мал, то структура поля в этом направлении, называемом поперечным, устанавливается быстро. Это дает основания усреднить уравнение Гельмгольца вдоль поперечного направления, в результате чего в усредненном уравнении возникают формфактор, учитывающий перекрытие поля с активной зоной, и эффективная диэлектрическая

постоянная, обусловленная усреднением произведения двумерного распределения поля и локального ϵ [7]:

$$\frac{d^2 \mathcal{U}(x)}{dx^2} + \mathcal{U}(x) (k^2 \epsilon(x) - \beta^2) = 0, \quad (1)$$

где $\mathcal{U}(x)$ — амплитуда волны, x — боковая координата, k — волновой вектор, β — константа распространения, $\epsilon(x)$ — эффективная диэлектрическая проницаемость среды, являющаяся периодической функцией x . Уравнение вида (1) возникает также в теории твердого тела и квантовой механике. Интерес к его свойствам поддерживается в последнее время исследованиями по нанотехнологии.

Одним из методов решения уравнения (1) с периодическим $\epsilon(x)$ является метод T -матриц. Вводя две базовые функции $f(x_m)$ и $g(x_m)$, являющиеся линейно независимыми решениями (1) на периоде с номером m (т. е. x_m определен внутри одной ячейки периодической структуры), представим общее решение (1) в виде

$$\mathcal{U} = a_m f(x_m) + b_m g(x_m). \quad (2)$$

Значения коэффициентов a и b в m -ом элементе связываются со значениями в $(m+1)$ -ом элементе посредством матрицы связи:

$$\begin{pmatrix} a_{m+1} \\ b_{m+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы T могут быть в общем случае выражены через значения функций $f(x_m)$ и $g(x_m)$ на границах ячейки [10]. При этом детерминант T равен единице.

Хорошо известно [11], что любая матрица тождественно удовлетворяет своему секулярному уравнению:

$$T^2 - \text{Sp} T \cdot T + E = 0, \quad (3)$$

где $\text{Sp} T = T_{11} + T_{22}$ — сумма диагональных элементов матрицы. Действуя левой частью секулярного уравнения на столбец амплитуд поля $\begin{pmatrix} a_{m-1} \\ b_{m-1} \end{pmatrix}$, получаем уравнение, связывающее между собой амплитуды f -волн в трех соседних ячейках:

$$a_{m+1} - \text{Sp} T \cdot a_m + a_{m-1} = 0. \quad (4)$$

Точно такое же уравнение справедливо и для g -волны, а значит, и для амплитуды полного поля \mathcal{U} . Из уравнения (4) немедленно следует необходимое условие медленности изменения амплитуды поля при переходе к соседней ячейке. Его можно записать в виде

$$|\text{Sp} T \pm 2| \ll 1. \quad (5)$$

Когда $\text{Sp} T = 2$, уравнение (4) означает равенство нулю дискретной производной второго порядка. Такое уравнение имеет, очевидно, два независимых решения $a_m = c_0$ и $a_m = c_1 m$. Второе решение можно заведомо считать плавно изменяющимся, если речь идет о большом числе ячеек в линейке, $N \gg 1$. В дальнейшем будем полагать, что это условие выполнено. Если $\text{Sp} T = -2$, заменой $\tilde{a}_m = (-1)^m a_m$ задача сводится к

предыдущей. Таким образом, условие (5) обобщает очевидный критерий, обычно используемый в теории распределенной обратной связи:

$$\|T - E\| \ll 1,$$

где $\| \cdot \|$ означает норму матрицы.

В альтернативном подходе к анализу уравнения (1), основанном на функциях Блоха, хорошо известно, что в спектре волн, распространяющихся в периодической решетке, возникают запрещенные зоны, центр которых соответствует брэгговским условиям. Собственное число λ , которое находят подстановкой степенного решения в (4), связано с блоховским вектором Q соотношением

$$\lambda = \exp(\pm iQ\Lambda),$$

где Λ — период структуры. Когда $\text{Sp} T = 2$, собственное число $\lambda = 1$ оказывается дважды вырожденным. Это соответствует исчезновению запрещенной зоны. При выполнении условия (5), соответственно, запрещенная зона мала. Условия обычной теории распределенной обратной связи соответствуют рассмотрению высоколежащих зон, ширина которых экспоненциально мала. Таким образом, на языке зонной теории условие плавности может быть сформулировано как требование узости запрещенных зон.

Поскольку случай $\text{Sp} T = -2$ простой заменой сводится к случаю $\text{Sp} T = 2$, ограничимся последним. Вводя величину $\Delta = \text{Sp} T - 2$, заменим дискретное уравнение (3) на дифференциальное, что допустимо для плавно меняющихся функций; как было отмечено выше, это уравнение справедливо для $\mathcal{U}(x, x_m)$, где $x = m\Lambda$ — плавная переменная:

$$\Lambda^2 \frac{d^2 \mathcal{U}(x, x_m)}{dx^2} = \Delta \cdot \mathcal{U}(x, x_m). \quad (6)$$

Величина Δ зависит от $\omega = kc$ (c — скорость света) и β как от параметров. Если выделить значения несущей частоты излучения ω_0 и постоянной распространения β_0 вблизи их значений, соответствующих чистому резонансу, когда $\text{Sp} T = \pm 2$, то $\Omega = \omega - \omega_0$ и $\delta\beta = \beta - \beta_0$ будут являться по существу переменными Фурье при разложении полного поля по плоским волнам. Представляя Δ как функцию Ω и β в виде разложения во степеням, имеем

$$\Delta = ic_4\Omega + ic_5\delta\beta + c_2\Omega^2 + c_3\Omega \cdot \delta\beta + c_1(\delta\beta)^2 + c_6. \quad (7)$$

Предполагая, что для интересующих нас решений реализуются достаточно плавные изменения поля во времени и вдоль оси распространения z , из (6) и (7) легко получить уравнение

$$\Lambda^2 \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} + c_1 \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z^2} + c_2 \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t^2} + c_3 \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z \partial t} + c_4 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + c_5 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} + c_6 \mathcal{U} = 0. \quad (8)$$

Для нахождения коэффициентов c_1, \dots, c_6 необходимо конкретизировать зависимость $\epsilon(x)$ в (1).

Из квантовой механики [9] известны формы потенциальных ям, на которых рассеяние отсутствует. В этих случаях следует ожидать, что в сконструированной периодической структуре из слоев с соответствующим профилем на периоде также возникнет аномально узкая запрещенная зона. Далее мы рассмотрим простейший вариант такой структуры, когда теоретические выкладки могут быть доведены до конца.

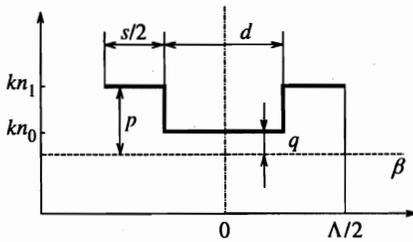


Рис. 2. Схема одного элемента линейки полупроводниковых лазеров в приближении эффективной диэлектрической проницаемости

3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ДИОДНОЙ ЛИНЕЙКИ В ПРИБЛИЖЕНИИ СТУПЕНЧАТОЙ $\epsilon(x)$

Обычно в теории диодных линеек $\epsilon(x)$ выбирается ступенчатой функцией с двумя значениями: ϵ_0 — в активном элементе, ϵ_1 — в пассивном промежутке. Мы ограничимся ниже линейкой (см. рис. 2), в которой усиление локализовано в антиволноводе шириной d , тогда как в зоне с большим показателем преломления шириной s может вноситься поглощение (зона a на рис. 1). Кроме того, учтем нелинейную часть комплексной диэлектрической проницаемости, которую запишем, следуя [12], в виде

$$\epsilon_n(x) = \Gamma(x) \left. \frac{d\epsilon}{dN} \right|_{N=N_0} (N(x) - N_0),$$

где $N(x)$ — концентрация носителей, N_0 — то же в отсутствие поля излучения, $\Gamma(x)$ — фактор, учитывающий перекрытие поля волны с активной областью в поперечном направлении.

Выбор базовых функций f и g , а также вывод выражений для элементов матрицы T , согласующихся с естественными условиями на боковых границах полупроводника, описаны в работе [10]. Ячейка периодической структуры показана на рис. 2. Функция $f(x_m)$ соответствует волне, проходящей через антиволноводный барьер при падении слева, тогда как $g(x_m)$ соответствует волне, падающей на антиволновод справа. В резонансной структуре, в которой внутри антиволновода укладывается $(l + 1)$ полуволн, а в волноводном промежутке — m полуволн (l и m — целые числа), в отсутствие усиления и поглощения волны f и g проходят ячейку без потерь, умножаясь лишь на число $(-1)^\sigma$, где $\sigma = l + m + 1$. В этом случае связь волн отсутствует. В действительности такая ситуация реализуется лишь для волны со строго определенными частотой и постоянной распространения $\beta = \beta_0$. Перерасеяние волн друг в друга возникает как при отклонении параметров ячейки от резонансных значений (при этом вообще исчезают волны, проходящие без рассеяния), так и для резонансной структуры для волн, отличных от резонансной. Если учесть, что в реальных структурах всегда есть поглощение или усиление, то понятно, что чистый резонанс практически ненаблюдаем. Однако, как показано численно [13] и затем аналитически [10], наибольший интерес для генерации в линейке представляют структуры и моды, которые можно назвать околорезонансными. В этом случае след матрицы T может быть представлен приближенно в виде [10]

$$\text{Sp } T = (-1)^\sigma (2 - F^2), \tag{9}$$

где

$$F^2 = \left(p_1 s + \frac{p_0}{q_0} q_1 d \right) \left(p_1 s + \frac{q_0}{p_0} q_1 d \right). \tag{10}$$

Здесь q_1 и p_1 определены как отличие комплексно-значного бокового волнового вектора в пределах антиволновода и межэлементного промежутка от их резонансных значений соответственно, т. е.

$$q_1 = q - q_0, \quad p_1 = p - p_0; \quad q_0 = \pi(l+1)/d, \quad p_0 = m\pi/s.$$

При этом величины векторов p и q определяются из уравнений

$$q^2 = k^2 \epsilon_0 - \beta^2, \quad p^2 = k^2 \epsilon_1 - \beta^2$$

(см. также рис. 2). Для типичных параметров лазерной диодной линейки

$$|\epsilon_1 - \epsilon_0| \ll \operatorname{Re} \epsilon_0,$$

т. е. скачок диэлектрической постоянной много меньше величины диэлектрической постоянной. Так как для длины волны излучения в пустоте λ выполняются условия $\lambda \ll s$, $\lambda \ll d$, то боковые углы, под которыми распространяется излучение, малы. Следовательно, $\beta \approx kn_0$ с точностью до малых поправок (здесь n_0 — средний показатель преломления). При расчете поперечных волновых векторов эти поправки играют решающую роль.

Для четного σ из (9) следует, что введенная выше величина $\Delta = -F^2$. Чтобы найти коэффициенты в (7) и (8), необходимо p_1 и q_1 выразить через $\delta\beta$ и Ω . Это легко сделать, используя приведенные выше явные выражения для p и q :

$$\begin{cases} p_1 p_0 = k\Omega\epsilon_1/c + k^2\delta\epsilon_s - \beta\delta\beta, \\ q_1 q_0 = k\Omega\epsilon_0/c + k^2\delta\epsilon_d - \beta\delta\beta, \end{cases} \quad (11)$$

где $2\delta\epsilon_s$ и $2\delta\epsilon_d$ — отстройки диэлектрической проницаемости соответственно в волноводной и антиволноводной зонах. Следует заметить, что в общем случае эти отстройки состоят из двух частей каждая: одна часть возникает из-за отклонения реальных параметров структуры от строго резонансных; вторая обусловлена изменением нелинейной составляющей диэлектрической проницаемости. Возможность оперирования с кусочно-постоянной нелинейной добавкой в ϵ в общем случае не очевидна и требует специального рассмотрения. С учетом приближенности исходной одномерной модели, а также роли диффузии носителей в полупроводниках можно полагать, что замена реального распределения нелинейной составляющей ϵ , усредненного, как отмечалось выше, по поперечной координате, на ступенчатое может удовлетворительно описать в нашем случае нелинейные эффекты в линейке. При этом в теории естественным образом появляется интенсивность полного поля, усредненная по активной (антиволноводной) и пассивной зонам соответственно. Используя (10), (11), представим $\Delta = -F^2$ в виде (7), откуда для коэффициентов c_1, \dots, c_6 получаем:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\beta^2 L^4, \\ c_2 &= -k^2 \epsilon^2 L^4 / c^2, \\ c_3 &= -2\beta k \epsilon L^4 / c, \\ c_4 &= ik^3 \epsilon [\delta\epsilon' L^4 + L_\epsilon^4] / c, \\ c_5 &= i\beta k^2 [\delta\epsilon' L^4 + L_\epsilon^4], \\ c_6 &= k^4 \delta\epsilon' L_\epsilon^4, \end{aligned} \quad (12)$$

где введены средняя проницаемость

$$\epsilon = (\epsilon_1 s + \epsilon_0 d) / \Lambda,$$

средняя отстройка

$$\delta\epsilon' = (s\delta\epsilon_s + d\delta\epsilon_d)/\Lambda$$

и характерные длины

$$L^4 = \Lambda(s/p_0^2 + d/q_0^2), \quad L_\epsilon^4 = \Lambda(s\delta\epsilon_s/p_0^2 + d\delta\epsilon_d/q_0^2).$$

Приведенные выражения для коэффициентов уравнения (8) являются одним из важных результатов работы, для иллюстрации возможностей применения которого далее будут решены конкретные задачи. Здесь следует отметить, что в уравнении (6) координата внутри ячейки x_m является свободным параметром. Зависимость от внутренней координаты входит в полное поле через функции $f(x_m)$ и $g(x_m)$, также, строго говоря, зависящие от переменных Фурье, по которым проводилось разложение в (7). Однако более тщательный анализ показывает, что при расчете полного поля можно пренебречь искажением базисных функций в пространственно-временных вариациях поля, поскольку их вклад оказывается по порядку величины в N раз меньше, чем для коэффициентов a_m, b_m . Аналогичным образом вариации коэффициентов преломления при условии сохранения близости к резонансу (5) также следует учитывать только при решении уравнения (8).

Отметим ряд предельных случаев, в которых уравнение (8) допускает простую интерпретацию. В частности, для резонансной структуры в пренебрежении нелинейностью, $\delta\epsilon_s = \delta\epsilon_d = 0$, усилением и поглощением имеем

$$c_4 = c_5 = c_6 = 0.$$

Тогда для стационарного распространения излучения вдоль z получаем гиперболическое уравнение, описывающее распространение по прямым линиям под углом:

$$\frac{\Lambda}{\sqrt{-c_1}} = \frac{\lambda}{2n_0\Lambda} \left[\frac{d^3}{\Lambda^3(l+1)^2} + \frac{s^3}{\Lambda^3 m^2} \right]^{-1/2}$$

Этот неожиданный вывод подтверждается экспериментом [14] по усилению излучения в наборе, состоящем из 21 антиволноводного элемента. На рисунках, представленных в [14], хорошо видно, что граница пучка, распространяющегося внутри набора, представляет собой прямую линию. Оценка дает угол, близкий к написанному выше. Следует отметить, что в случае, когда вначале излучение заполняет часть сечения резонатора однородно вдоль оси z , заполнение всего сечения также происходит волной в боковом направлении с постоянной скоростью, определяемой формулой $\Lambda/\sqrt{-c_2}$. Это также сильно отличается от обычного для плоскопараллельного резонатора «диффузионно-подобного» расплывания.

Наконец, когда структура заметно отличается от резонансной, так что в распространении излучения основную роль играют производные по z или t первого порядка, уравнение (8) приближается по свойствам к обычному параболическому уравнению оптики.

Поскольку реальные краевые или начальные условия зачастую оказываются такими, что вблизи (или вначале) поле нельзя представить в форме (3) с a_m и b_m , плавно изменяющимися от элемента к элементу, в этом случае естественная эволюция поля

в пространстве и во времени приведет к тому, что уравнение (8) с определенного расстояния (момента) станет применимым для дальнейшего описания. Однако при этом вопрос о краевых или начальных условиях требует специального рассмотрения.

Ниже будут рассмотрены задачи для бесконечного набора диодов, что соответствует приближению малых масштабов структур, в нашем случае захватывающих достаточно большое число элементов, однако меньшее полного числа элементов N .

4. САМОФОКУСИРОВКА ИЗЛУЧЕНИЯ С ПЛОСКИМ ФРОНТОМ

Рассмотрим стационарное распространение излучения в бесконечном наборе полупроводниковых лазеров. В этом случае $c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Решение в виде плоского фронта для огибающей поля $\mathcal{U}(x, z)$:

$$\mathcal{U} = E_0 \exp(i\delta\beta z), \quad (13)$$

соответствует $\Delta = 0$ (или $F = 0$), откуда получаем два допустимых значения для $\delta\beta$:

$$\delta\beta_1 = \frac{k\delta\epsilon'}{n_0}, \quad (14)$$

$$\delta\beta_2 = \frac{k}{n_0} \frac{L_c^4}{L^4}, \quad (15)$$

каждое из которых обращает в нуль одну из скобок в (10), здесь постоянная распространения взята приближенно $\beta \approx kn_0$. Зависимость от интенсивности в формулах (14), (15) входит неявно в отстройках $\delta\epsilon_s$ и $\delta\epsilon_d$ через концентрацию носителей. Легко проверить прямой подстановкой, что $\delta\beta_1$ соответствует распределению поля

$$\mathcal{U}_1 = f(x_m) + g(x_m),$$

тогда как решение с постоянной распространения $\delta\beta_2$ имеет вид

$$\mathcal{U}_2 = f(x_m) - g(x_m).$$

Структура поля для каждой из указанных волн иллюстрируется на рис. 3 для решетки с параметрами $l = 0$, $m = 3$. Заметим, что для чисто резонансной решетки и в отсутствие нелинейности эти решения были получены ранее в [4]. Второе из решений \mathcal{U}_2 , очевидно, невыгодно с точки зрения лазерного действия, так как поле в равной степени распределено по активной и пассивной зонам. Кроме того, для конечного числа элементов потери на излучение через края для распределения поля типа \mathcal{U}_2 будут велики.

Применим стандартный анализ на линейную устойчивость: введем возмущение поля $\tilde{E}(x, z)$, так что

$$\mathcal{U} = (E_0 + \tilde{E}) \exp(i\delta\beta z).$$

Линеаризованное уравнение для \tilde{E} запишется в виде

$$\Lambda^2 \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} + c_1 \left(\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} + 2i\delta\beta \frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} \right) + c_5 \frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} + (\tilde{E} + \tilde{E}^*) \left(i\delta\beta \frac{\partial c_5}{\partial I} + \frac{\partial c_6}{\partial I} \right) E_0^2 = 0, \quad (16)$$

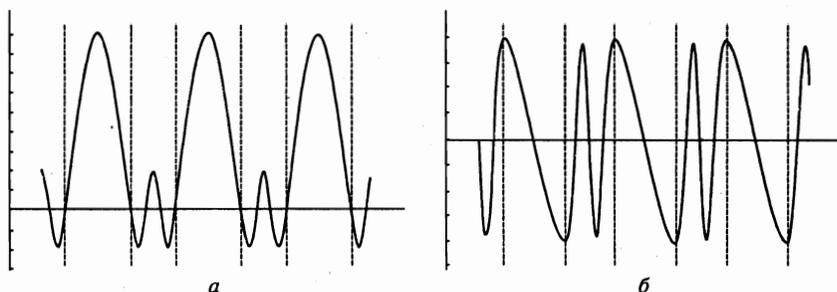


Рис. 3. Структура мод при $l = 0, m = 3$: a — мода $f + g$, соответствующая $\delta\beta_1$, b — мода $f - g$, соответствующая $\delta\beta_2$

где производные от коэффициентов уравнения (8) и $\delta\beta$ взяты при средней интенсивности в элементе $I_0 = |E_0|^2$. Раскладывая возмущение на плоские волны:

$$\vec{E} = \vec{a}(\kappa, \gamma) \exp(i\kappa x + \gamma z) + \vec{b}(\kappa, \gamma) \exp(-i\kappa x + \gamma^* z),$$

получаем дисперсионное уравнение:

$$\gamma^2 |A|^2 + 2\gamma(\text{Re}(AB^*) - Q^2 \text{Re } A) + Q^2(Q^2 - 2 \text{Re } B) = 0, \quad (17)$$

где

$$A = c_5 + 2i\delta\beta c_1, \quad B = i\delta\beta I_0 \partial c_5 / \partial I + I_0 \partial c_6 / \partial I, \quad Q^2 = \kappa^2 \Lambda^2 - c_1 \gamma^2.$$

Значения коэффициентов A, B , при которых при действительных значениях κ существуют γ с положительными значениями действительной части, соответствуют области неустойчивости распространения плоского фронта (самофокусировке). В соответствии с критерием Рауса—Гурвица уравнение (17) не имеет корней с положительной действительной частью (т. е. решение устойчиво), если выполняется система неравенств

$$\text{Re } A < 0, \quad (18)$$

$$|A|^2 - 2c_1 \kappa^2 \Lambda^2 + 2c_1 \text{Re } B > 0, \quad (19)$$

$$\text{Re } AB^* - \kappa^2 \Lambda^2 \text{Re } A > 0, \quad (20)$$

$$\kappa^2 (\kappa^2 \Lambda^2 - 2 \text{Re } B) > 0, \quad (21)$$

$$\kappa^2 \Lambda^2 |A|^2 (\text{Re } A)^2 + c_1 (\text{Re } AB^*)^2 > \text{Re } AB^* \text{Re } A (|A|^2 + 2c_1 \text{Re } B). \quad (22)$$

Из неравенства (18) следует, что решение с $\text{Re } A > 0$ неустойчиво для любых возмущений, тогда как при $\text{Re } A < 0$ возмущения нарастают только для некоторых значений κ , при которых нарушается хотя бы одно из неравенств (19)–(22), причем из выполнения (21) с учетом того, что $c_1 < 0$, следует (19), так что можно ограничить рассмотрение только неравенствами (20)–(22).

На практике стремятся к тому, чтобы поле было локализовано в основном в антиволноводной зоне, а для уменьшения расходимости излучения в дальней зоне желательно, чтобы размер излучающей зоны был близок к периоду структуры. Оба эти требования выполняются при $|p_0/q_0| \gg 1$. Коэффициент $\text{Re } A$ может быть записан при этом как

$$\text{Re } A = \mp \frac{\beta k^2 s d}{q_0^2} (\text{Im } \delta\epsilon_d - \text{Im } \delta\epsilon_s),$$

здесь верхний знак относится к $\delta\beta$, определяемому по формуле (14), нижний — по формуле (15). Так как в диодной линейке рассматриваемого типа усиление сосредоточено в антиволноводах, а в волноводный промежуток иногда специально добавляются потери, то получаем, что решение с $\delta\beta = \delta\beta_2$ неустойчиво, поэтому при дальнейшем анализе считается, что $\delta\beta = \delta\beta_1$.

Если ввести отстройку скачка диэлектрической проницаемости на границе антиволновода $\delta\epsilon = \delta\epsilon_d - \delta\epsilon_s$, то для коэффициента $\text{Re } AB^*$ может быть получено

$$\text{Re } AB^* = -\frac{k^6 \beta |\delta\epsilon|^2 s^2 d^2 I_0}{q_0^4} \text{Im} \left(\frac{d\delta\epsilon'}{dI} \right),$$

так что если $\text{Re } AB^* > 0$, как в практически важном случае, когда знак у производной определяется убыванием усиления с ростом интенсивности, то неравенство (20) выполняется для любых κ . Тогда самофокусировка происходит при выполнении хотя бы одного из условий:

$$\kappa^2 < K_0 \quad (23)$$

или

$$\kappa^2 < (K_0 - K_1) G d / s, \quad (24)$$

где введены обозначения

$$K_0 = \frac{2k^4 s d I_0}{q_0^2 \Lambda^2} \text{Re} \left(\delta\epsilon \frac{d\delta\epsilon'}{dI} \right),$$

$$K_1 = \frac{k^4 s d^2 |\delta\epsilon|^2}{q^2 \Lambda^3} \left(G + \frac{s}{d} \right),$$

$$G = \Lambda I_0 \text{Im} \left(\frac{d\delta\epsilon'}{dI} \right) / d \text{Im } \delta\epsilon.$$

Для дальнейшего упрощения необходимо конкретизировать вид зависимостей $\delta\epsilon_s$ и $\delta\epsilon_d$ от интенсивности. Так как в межэлементном пространстве перекрытие поля излучения с зоной усиления слабое, то пренебрегаем усилением в этой зоне. Отстройку диэлектрической проницаемости в межэлементном промежутке можно также считать не зависящей от интенсивности, полагая $\delta\epsilon_s = \Delta + i\alpha_T$, где Δ — действительная отстройка от резонансного значения, а α_T — дополнительные межэлементные потери. Отстройка проницаемости в антиволноводе определяется как [12]

$$\delta\epsilon_d = \epsilon_{20} \mathcal{P}(\alpha - i) / (1 + I/I_s),$$

где

$$\mathcal{P} = (J\tau_c / ed - N_0) / N_0$$

— безразмерный параметр, учитывающий усиление и отличие $N(x)$ от N_0 вследствие накачки, J — плотность тока инжекции, τ_c — спонтанное время жизни, e — заряд электрона, α — фактор уширения линии, I_s — интенсивность насыщения; $\epsilon_{20} = G\sigma_g n_0 / k$

(σ_g — сечение усиления, Γ — коэффициент, учитывающий перекрытие поля моды с активной зоной в боковом направлении).

Как следует из (23), (24), самофокусировка возможна при выполнении хотя бы одного из условий: $K_0 > K_1$ или $K_0 > 0$.

В сделанных предположениях первое условие в отсутствие потерь в межэлементном промежутке ($\alpha_T \neq 0$) сводится к квадратичному неравенству для $\tau = \Delta(1 + I_0/I_S)/(\epsilon_{20}\mathcal{P}) - \alpha$:

$$\tau^2(H + 1) - 2\tau + H - 1 < 0,$$

где

$$H = (1 + I_S/I_0)s/d.$$

Это неравенство имеет непустое множество значений только при $H < \sqrt{2}$, т.е. при достаточно больших интенсивностях:

$$I_0 > I_S/(\sqrt{2}d/s - 1).$$

При меньших интенсивностях остается только неравенство (23).

Условие $K_0 > 0$ может быть приведено к виду $\text{Re}((\alpha - i)\delta\epsilon) < 0$ или, в подробной записи,

$$\alpha\Delta + \alpha_T - \frac{\alpha^2 - 1}{1 + I_0/I_S}\epsilon_{20}\mathcal{P} > 0. \quad (25)$$

Таким образом, в отсутствие модуляции потерь и при не слишком большой интенсивности излучения при отстройке скачка проницаемости выше резонансного значения ($\text{Re} \delta\epsilon > 0$) происходит самофокусировка, а ниже — самодефокусировка, что совпадает с результатами численных расчетов [12].

При условии $|\gamma| \ll \delta\beta$ (что соответствует преобладанию параболического члена в исходном уравнении (8)) в уравнении (17) можно положить $Q = \kappa\Lambda$, сводя его к квадратному по γ . При больших положительных отстройках, $\Delta \gg |\epsilon_2|$, уравнение (17) можно переписать в виде

$$\tilde{\gamma}^2 + 2\tilde{\gamma} \left(Q_0^2 + Q^2 \frac{\epsilon_{20}\mathcal{P}}{\Delta(1 + I/I_S)} \right) + Q^2(Q^2 - 2\alpha Q_0^2) = 0, \quad (26)$$

где введены обозначения

$$\tilde{\gamma} = \gamma|A|, \quad Q_0^2 = k^4 s d^2 \epsilon_{20} \Delta \mathcal{P} / q^2 I_S \Lambda (1 + I_0/I_S)^2.$$

Из (26) находим, что максимальное значение $\tilde{\gamma}$ достигается при $Q^2 \approx \alpha Q_0^2$, так что максимальный инкремент развития возмущений

$$\gamma_{max} = \frac{k^2 d I_0}{\beta \Lambda I_S} \frac{\epsilon_{20} \mathcal{P}}{(1 + I_0/I_S)^2} \left((\alpha^2 + 1)^{1/2} - 1 \right),$$

достигается при характерном поперечном размере возмущения:

$$L_{char} = \frac{\Lambda \lambda^2}{2d^2} \frac{1 + I_0/I_S}{(\alpha \epsilon_{20} \Delta \mathcal{P} s I_0 / \Lambda I_S)^{1/2}}.$$

Условие, позволяющее уравнение (17) свести к квадратному, может быть записано как

$$\Delta \gg \frac{((\alpha^2 + 1)^{1/2} - 1) \epsilon_{20} \mathcal{P} I_0}{(1 + I_0/I_s)^2 I_s}, \quad (27)$$

в то же время условие малости изменения поля на одном периоде, $|Q| \ll 1$, приводит к неравенству

$$\frac{(\alpha \epsilon_{20} \Delta \mathcal{P} s I_0 / \Lambda I_s)^{1/2}}{1 + I_0/I_s} \ll \frac{\lambda^2}{2d^2}. \quad (28)$$

При мощности накачки вблизи порога генерации ($\mathcal{P} \sim 1$) условия (27), (28) выполняются одновременно для всего диапазона значений Δ , малых по сравнению со скачком проницаемости на границе антиволновода.

5. РЕШЕНИЯ СОЛИТОННОГО ТИПА В ЛИНЕЙКЕ ДИОДНЫХ ЛАЗЕРОВ

В работе [15] было показано с помощью численных расчетов, что помимо решений в виде плоского фронта в линейке диодных лазеров возможны также решения типа уединенной волны — солитона. Размеры такого солитона малы по сравнению с размерами всей линейки, но должны быть велики по сравнению с размерами одного элемента. Ниже строится подобное решение в модели плавной огибающей поля при условии слабого превышения мощности накачки над пороговой.

Используем модель лазерного резонатора в виде однородной в продольном направлении среды с распределенными потерями, отвечающими за вывод излучения из резонатора [16]. Кроме того, продольная координата и время входят в (8) симметричным образом, так что уравнение (8) в общем случае сводится к уравнению двух переменных. Действительно, если провести не зависящую от поля замену координат

$$\tilde{x} = L^2 k^2 x / \Lambda, \quad \tilde{t} = kct/\epsilon + kz/n_0,$$

то (8) запишется как

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \tilde{t}^2} + i \left(\delta \epsilon' + \frac{L_\epsilon^4}{L^4} \right) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \tilde{t}} + \frac{L_\epsilon^4}{L^4} \delta \epsilon' \mathcal{U} = 0. \quad (29)$$

Дисперсионное уравнение, соответствующее плоским волнам огибающей, как легко видеть из (29), представляет собой алгебраическое уравнение второго порядка. Пренебрегая мнимыми частями диэлектрической проницаемости, дисперсионное уравнение можно проиллюстрировать на плоскости волновых векторов $\delta\beta$ и k_x (см. рис. 4). Величины $\delta\beta_{1,2}$ на рис. 4 определяются формулами (14) и (15). Штрихами показана дисперсионная кривая для строгого резонанса, где точка (0, 0) является точкой вырождения. Для неравной нулю отстройки (которая может быть обусловлена нелинейной зависимостью $\delta\epsilon_s$ и $\delta\epsilon_d$ от поля) пара прямых превращается в две ветви гиперболы. При этом возникает запрещенная зона. Таким образом, для линейки с параметрами, отличающимися от резонансных, есть интервал постоянной распространения $\delta\beta_1 < \delta\beta < \delta\beta_2$ (или $\delta\beta_2 < \delta\beta < \delta\beta_1$), где плоские волны запрещены. Если теперь строить решение,

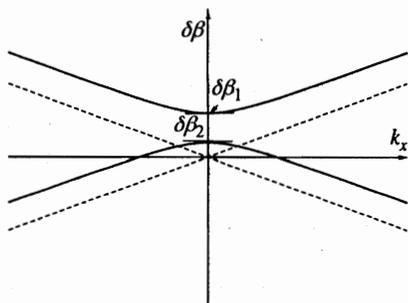


Рис. 4. Возникновение зоны при отстройке от резонанса в линейке лазеров: штриховые линии — дисперсионные кривые в строгом резонансе, сплошные линии — дисперсионные кривые при положительной отстройке скачка проницаемости от резонанса

взяв для интенсивности света равной нулю $\delta\beta$ из указанного интервала, то подбором параметров можно добиться, чтобы с ростом интенсивности исходная дисперсионная кривая трансформировалась так, чтобы $\delta\beta$ вышло за границы запрещенной зоны (напомним, что $\delta\beta_1$ и $\delta\beta_2$ зависят от интенсивности света). В такой ситуации, очевидно, уравнение (29) должно допускать солитонное решение.

Трансляционно-инвариантное решение (29) представляется как

$$\mathcal{U} = \exp(-i\theta\tilde{t})\hat{\mathcal{U}}(\tilde{x} - v\tilde{t}),$$

где θ — свободный параметр, v — скорость перемещения структуры (θ и v вещественные). Тогда (29) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial^2 \hat{\mathcal{U}}}{\partial \xi^2} (1 - v^2) + \left(\delta\epsilon' + \frac{L_\epsilon^4}{L^4} - 2\theta \right) i v \frac{\partial \hat{\mathcal{U}}}{\partial \xi} + \left(\frac{L_\epsilon^4}{L^4} - \theta \right) (\delta\epsilon' - \theta) \hat{\mathcal{U}} = 0, \quad (30)$$

здесь $\xi = \tilde{x} - v\tilde{t}$. Уравнение (30) с зависящими от интенсивности коэффициентами при первой производной и свободном члене было исследовано как следствие из обобщенного уравнения Гинзбурга—Ландау в работе [17]. Там же было показано, что оно допускает в качестве решений как плоские фронты (им соответствуют неподвижные точки в фазовом пространстве уравнения (29)), так и пространственно-ограниченные структуры (им соответствуют сепаратрисы, соединяющие неподвижные точки, в приложении к оптическим системам см., например, [18]): фронты, солитоны, источники и стоки. Вместе с тем, анализ (30) сильно затруднен даже для простейших вариантов зависимости усиления от интенсивности поля вследствие комплексности всех величин в уравнении.

При накачке, близкой к пороговой, мнимая часть отстройки проницаемости в антиволноводе мала по сравнению с действительной и интенсивность мала по сравнению с интенсивностью насыщения, что позволяет представить отстройку в антиволноводе как

$$\delta\epsilon_d = \delta\epsilon_0 - \epsilon_2 |\mathcal{U}|^2 / I_S,$$

где $\delta\epsilon_0$, ϵ_2 — вещественные параметры, I_S — интенсивность насыщения. Тогда в приближении сильного удержания поля в антиволноводе, $|p_0| \gg |q_0|$, и в отсутствие модуляции потерь зависящие от поля коэффициенты в уравнении (30) могут быть записаны как

$$\delta\epsilon' - \theta = \frac{s}{\Lambda} \delta\epsilon - \theta_1 - \epsilon_2 \frac{d}{\Lambda} \frac{|\mathcal{U}|^2}{I_S},$$

$$\frac{L_\epsilon^4}{L^4} - \theta = -\theta_1 - \epsilon_2 \frac{|\mathcal{U}|^2}{I_S},$$

где $\theta_1 = \theta - \delta\epsilon_0$ — перенормированный свободный параметр, $\delta\epsilon$ — отстройка скачка диэлектрической проницаемости между волноводной и антиволноводной зонами. В этом случае существует решение в виде неподвижного ($v = 0$) солитона, имеющее вид

$$\hat{\mathcal{U}} = \left(\frac{\theta_1 \delta\epsilon I_S}{\epsilon_2 [(d + \Lambda)\theta_1/s - \delta\epsilon]} \right)^{1/2} \text{ch}^{-1} \left(\sqrt{\theta_1 \delta\epsilon \frac{s}{\Lambda} \xi} \right). \quad (31)$$

Очевидные из (31) условия существования такого солитона суть $\theta_1 \delta\epsilon > 0$ — отсутствие распространения излучения при $I = 0$, и $\epsilon_2((d + \Lambda)\theta_1/s - \delta\epsilon) > 0$ — снятие запрета на прохождение при интенсивности больше некоторой пороговой, что подтверждает качественные соображения, высказанные выше.

Рисунок 5 иллюстрирует полную структуру солитона. Небольшие скачки на границах элементов периодической структуры возникают из-за того, что огибающая солитона реально охватывает около трех элементов. Это означает, что переход к непрерывной переменной, использованный нами при выводе основного уравнения (8), вносит заметную ошибку. Однако в целом очевидно, что форма солитона отражает рис. 5 правильно.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе выведено уравнение для плавной огибающей волнового поля в плоскостойкой среде, характеризующейся слабым рассеянием на одном периоде, обусловленном резонансными эффектами. Обнаружено, что при исходно эллиптическом типе уравнения Гельмгольца в переменных (x, z) уравнение для огибающих может превратиться в гиперболическое, описывающее распространение поля в слоистой среде под определенным углом. Указаны условия, при которых можно воспользоваться понятием плавной огибающей и применять это уравнение. Для линейки со ступенчатой зависимостью от координат диэлектрической проницаемости проанализированы условия устойчивого распространения излучения с плоским фронтом и найдено в явном виде нелинейное решение типа уединенного солитона.

Работа была выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-19203).

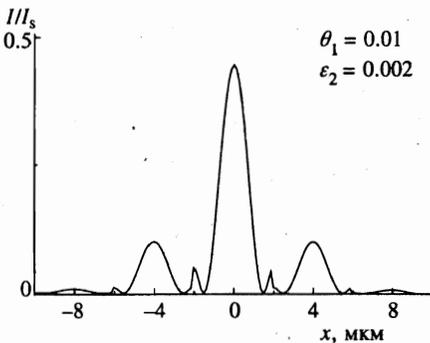


Рис. 5. Профиль нормированной на интенсивность насыщения интенсивности фундаментального солитона в линейке диодных лазеров при отстройке скачка диэлектрической проницаемости от резонансного $\delta\epsilon = 0.003$

Литература

1. Л. А. Бреховских, *Волны в слоистых средах*, Наука, Москва (1973).
2. P. Yeh, *Optical Waves in Layered Media*, Wiley, New York (1988).
3. Н. Н. Ильичев, Л. А. Малютин, П. П. Пашинин и др., Письма в ЖТФ **8**, 460 (1982).
4. С. А. Zmudzinski, D. Botez, and L. J. Mawst, *Appl. Phys. Lett.* **60**, 1049 (1992).
5. H. Kogelnik and C. V. Shank, *J. Appl. Phys.* **43**, 2327 (1972).
6. А. Р. Напартович and D. Botez, *Proc. SPIE* **2994**, 600 (1997).
7. D. Botez, in *Diode Laser Arrays*, ed. by D. Botez and D. R. Scifres, Cambridge University Press (1994).
8. V. V. Likhanskii and A. P. Napartovich, *Proc. SPIE* **1840**, 256 (1991).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматгиз, Москва (1963).
10. D. Botez and A. P. Napartovich, *IEEE J. Quant. Electron.* **30**, 975 (1994).
11. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва (1975).
12. R. F. Nabiev and D. Botez, *IEEE J. Select. Topics. Quantum Electron.* **1**, 138 (1995).
13. D. Botez, L. J. Mawst, G. L. Peterson, and T. J. Roth, *IEEE J. Quant. Electron.* **26**, 482 (1990).
14. С. Zmudzinski, D. Botez, L. J. Mawst et al., *IEEE J. Select. Topics. Quant. Electron.* **1**, 129 (1995).
15. R. F. Nabiev, P. Yeh, and D. Botez, *Opt. Lett.* **18**, 1612 (1993).
16. Я. И. Ханин, *Динамика квантовых генераторов*, Сов. Радио, Москва (1966).
17. W. van Saarloos and P. C. Hohenberg, *Physica D* **56**, 303 (1992).
18. Н. Н. Розанов, *Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах*, Наука, Москва (1997).