

УЛУЧШЕНИЕ КВАНТОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗЛУЧЕНИЯ БЕЗЫНВЕРСНОГО ТРЕХУРОВНЕВОГО Λ -ЛАЗЕРА В КАСКАДНЫХ СХЕМАХ

Ю. М. Голубев*, Г. Р. Ершов

*Научно-исследовательских институт физики
Санкт-Петербургского государственного университета
193904, Санкт-Петербург, Петродворец, Россия*

Поступила в редакцию 5 мая 1998 г.

Показано, что при возбуждении трехуровневого лазера пуассоновским светом генерация остается субпуассоновской в соответствии с работой [1] только в условиях, когда нет обратного воздействия на возбуждающий лазер (слабая связь). В каскадных схемах, в которых каждый трехуровневый Λ -лазер возбуждает своим излучением следующий за ним Λ -лазер, возможно достичь любой степени подавления дробового шума.

1. ВВЕДЕНИЕ

Особенностью лазерной среды, состоящей из трехуровневых атомов, является то, что она способна генерировать неклассический (субпуассоновский) свет без каких-либо дополнительных усилий с нашей стороны (типа, например, организации регулярной накачки, как для двухуровневого субпуассоновского лазера, рассмотренного в работе [2]). Это внутреннее свойство системы [1] связано с тем, что трехуровневые атомы, как оказывается, автоматически формируют своеобразную отрицательную обратную связь, которая в конечном счете стабилизирует излучение. Как будет видно далее, в варианте Λ -схемы (слабое поле накачки, возбуждающее атом из основного состояния в самое верхнее, и поле генерации, находящееся в резонансе между верхним атомным уровнем и средним), который мы будем здесь рассматривать, эффективность накачки оказывается зависящей от мощности генерации и уменьшается с ростом мощности поля генерации. В этих условиях флуктуации поля накачки в какой-то мере могут быть скомпенсированы и не приводят к соответствующим флуктуациям поля генерации, как это должно было бы быть в отсутствие отрицательной обратной связи. Действительно, например, положительная флуктуация в поле накачки приводит сначала к положительной флуктуации заселенности верхнего лазерного уровня, а следовательно, и генерации. В следующий момент это приведет к отрицательной флуктуации в накачке и, следовательно, к отрицательной флуктуации в генерации. Таким образом, на определенном временном интервале флуктуации в генерации оказываются скомпенсированными и не зависящими от флуктуаций в исходном поле накачки. Именно вследствие этого механизма обеспечивается субпуассоновская лазерная генерация даже в условиях пуассоновской накачки. Эта ситуация представляется крайне привлекательной, ведь для ее реализации требуется не больше усилий, чем при создании обычного лазера. Но в то же время вполне очевидны и ее недостатки. Отрицательная обратная связь отслеживает только

*E-mail: yuri_golubev@pop.convey.ru

внутрирезонаторное поле и не может стабилизировать излучение, вышедшее из резонатора, и, поскольку процесс покидания резонатора фотонами случаен, наблюдаемый свет не может быть таким же хорошим в плане его квантовых свойств, как внутрирезонаторное поле.

Таким образом, лазер на трехуровневых атомах, по-видимому, является наиболее простой системой для экспериментальной демонстрации возможности генерации субпуассоновского света. В то же самое время эта система в чистом виде навряд ли окажется перспективной в качестве источника неклассического света, пригодного для сверхточных и сверхчувствительных оптических измерений, поскольку для экспериментальной практики выигрышным может оказаться подавление дробового шума на порядки. Как понятно даже из качественных соображений, ограничения здесь носят принципиальный характер. Рассматривая подобный лазер изолированно, мы никак не сможем его улучшить в нашем смысле, не улучшая чего-то, имеющего к нему отношения (например, превращая пуассоновскую накачку в субпуассоновскую). Тем не менее, на наш взгляд, следует проанализировать одну очевидную возможность, которая может дать нужный эффект улучшения квантовых характеристик поля генерации. Эта возможность связана с построением каскадной схемы, в которой каждый предыдущий лазер с не очень хорошими квантовыми свойствами возбуждает активную среду последующего лазера, квантовые свойства излучения которого становятся уже более выразительными и т. д.

Строя квантовую теорию трехуровневого Λ -лазера, мы не будем обсуждать самый общий случай, как это делается в работе [1], а ограничимся физическими условиями, при которых на лазерном переходе нет инверсии заселенностей, но, как будет показано, тем не менее имеется усиление. Этот наш выбор не является принципиальным и связан только с тем, что для демонстрации эффекта обострения квантовых свойств излучения в каскадных схемах достаточно рассмотреть какой-то частный случай.

При исследовании каскадной схемы возникает следующая теоретическая проблема. Формально процесс возбуждения первого в каскаде лазера когерентным (пуассоновским) светом может быть учтен введением в гамильтониан взаимодействия s -числового возбуждающего поля. При этом, как мы только что обсудили, процесс генерации развивается таким образом, что поле генерации становится субпуассоновским. И уже второй в каскаде и далее все остальные лазеры будут возбуждаться неклассическим светом. Подобная накачка уже не может быть введена как s -числа в гамильтониан. Теоретический подход теперь должен учитывать, что не только поле генерации, но и поле накачки неклассическое. Мы будем здесь использовать метод кинетического уравнения для полевой матрицы плотности, которая описывает все участвующие в каскаде когерентные поля.

2. КАСКАДНАЯ СХЕМА С ВНУТРИРЕЗОНАТОРНЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ АКТИВНЫХ СРЕД

На рис. 1 схематически представлена мысленная экспериментальная ситуация, которую мы хотим здесь обсудить. Это каскад лазеров, первый из которых 1, возбуждается заданным внешним пуассоновским электромагнитным полем. Вследствие этого возникает генерация, которая затем сама возбуждает лазер 2, далее лазер — 3 и т. д. Мы здесь выбрали часто встречающийся в экспериментальной практике вариант внутрирезонаторного возбуждения активных сред, при котором среды возбуждающего и

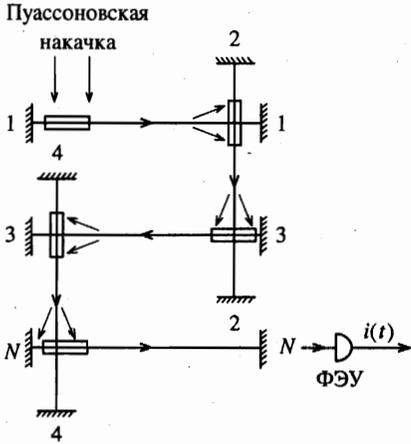


Рис. 1.

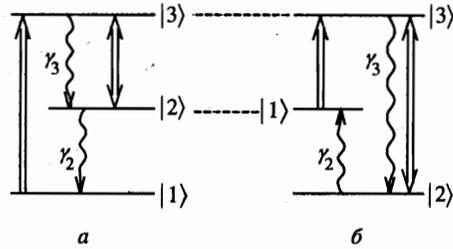


Рис. 2.

возбуждаемого лазеров располагаются в одном и том же резонаторе. При этом необходимо принимать во внимание, что процесс возбуждения активной среды может существенно повлиять на возбуждающий лазер. Для нас наиболее интересным будет, например, случай, когда потери из моды возбуждающего лазера будут в основном определяться не выходом поля через зеркало собственного оптического резонатора, а возбуждением активной среды возбуждаемого лазера. Понятно, что условия генерации в отсутствие и присутствии возбуждаемого лазера будут тогда совершенно разными. Этот случай будем называть случаем сильной связи между лазерами. Другой предельный случай (слабая связь), когда появление возбуждаемого лазера практически незаметно для возбуждающего, тоже физически интересен и важен.

Чтобы каскадная схема могла бы действовать, мы должны обеспечить резонансные условия. Для этого мы можем предположить, например, что имеются два сорта активных лазерных сред (рис. 2), которые чередуются в каскаде от лазера к лазеру. Нетрудно понять, что математически обе эти среды полностью эквивалентны (все формулы для них совершенно одинаковы). Действительно, как в одной, так и в другой на переходах $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ и $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ действуют когерентные поля, а на переходах $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ и $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ — некогерентные процессы, которые феноменологически описываются совершенно одинаково, независимо от их причины и от того, как они называются (спонтанным распадом или слабой некогерентной накачкой).

Для определенности будем полагать, например, что активная среда лазера 1 (и всех других лазеров с нечетными номерами) состоит из атомов с энергетической структурой, представленной на рис. 2а, а активная среда четных лазеров — из атомов на рис. 2б. Мы полагаем, что в первом лазере на переходе $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ происходит возбуждение атомов из основного состояния в верхнее лазерное. Это осуществляется внешним пуассоновским электромагнитным полем. Лазерная генерация происходит на переходе $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$. Для простоты полагаем, что все атомные переходы являются разрешенными. Однако в расчетах будем учитывать спонтанное излучение только на лазерном переходе $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$ со скоростью γ_3 и на переходе $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ со скоростью γ_2 . В активной среде лазера 2 в отсутствие когерентных полей вследствие спонтанной эмиссии $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$ и слабой некогерентной накачки (например, в газовом разряде или слабым спектрально широким

внешним электромагнитным полем) все атомы в стационарных условиях оказываются на уровне $|1\rangle$. Когерентное воздействие излучения лазера 1 на переходе $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ приводит к заселению верхнего лазерного уровня и к возникновению лазерной генерации $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$.

План работы следующий. В разд. 3 обсуждаются важные для наших построений элементы полуклассической теории лазера, получены вспомогательные формулы для атомных заселенностей и когерентностей в условиях безынервной генерации и полезные соотношения для мощностей генерации возбуждаемого и возбуждающего лазеров.

В разд. 4 обсуждается квантостатистическая теория генерации лазера на трехуровневых атомах при возбуждении активной среды излучением другого вспомогательного пуассоновского или субпуассоновского лазера. Рассматриваются наиболее важные моменты в построении кинетического уравнения для матрицы плотности поля генерации и поля возбуждающего лазера в безынервном приближении и приближении малых фотонных флуктуаций.

Спектр фототока при регистрации излучения одиночного трехуровневого лазера при возбуждении его излучением пуассоновского или субпуассоновского лазера рассмотрен в разд. 5.

В разд. 6 проведено обобщение теории, развитой в разд. 4 и 5, на случай каскадной схемы, состоящей из N трехуровневых лазеров, первый из которых в каскаде возбуждается излучением пуассоновского лазера, а затем сам возбуждает следующий трехуровневый лазер и т. д.

В Приложении обсуждается в деталях методика вывода кинетического уравнения для полей генерации в каскаде.

3. ПОЛУКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЛАЗЕРНОЙ ГЕНЕРАЦИИ

3.1. Стационарное поведение атома во внешних полях накачки и генерации

При построении статистической теории будем предполагать, что основные параметры задачи только слабо флуктуируют около соответствующих полуклассических значений. При таком подходе удастся линеаризовать теорию, упрощая тем самым математическую ситуацию. При этом существенную роль должны играть явные выражения для самих полуклассических величин (таких как, например, матричные элементы атомной матрицы плотности), описывающих поведение атома при его взаимодействии с двумя классическими полями: полем генерации и полем накачки.

В этом разделе будет рассматриваться полуклассическая теория лазерной генерации со средой, состоящей из атомов, энергетическая структура которых представлена на рис. 2.

Поведение атома определяется системой уравнений для матричных элементов атомной матрицы плотности $\hat{\sigma}$, которая с учетом внешних полей и релаксационных процессов имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} &= 2\gamma_2 \sigma_{22} - g_0 (\alpha_0 \sigma_{13} + \alpha_0^* \sigma_{31}) = 0, \\ \dot{\sigma}_{33} &= -2\gamma_3 \sigma_{33} + g_0 (\alpha_0 \sigma_{13} + \alpha_0^* \sigma_{31}) + g_1 (\alpha_1 \sigma_{23} + \alpha_1^* \sigma_{32}) = 0, \\ \dot{\sigma}_{13} &= -\gamma_3 \sigma_{13} - g_0 \alpha_0^* (\sigma_{33} - \sigma_{11}) + g_1 \alpha_1^* \sigma_{12} = 0, \\ \dot{\sigma}_{12} &= -\gamma_2 \sigma_{12} - g_0 \alpha_0^* \sigma_{32} - g_1 \alpha_1 \sigma_{13} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{\sigma}_{23} = -(\gamma_2 + \gamma_3)\sigma_{23} - g_1 \alpha_1^* (\sigma_{33} - \sigma_{22}) + g_0 \alpha_0 \sigma_{21} = 0,$$

Сюда необходимо добавить условие нормировки

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 1. \quad (2)$$

Здесь α_0 и α_1 — комплексные амплитуды поля накачки и поля генерации, нормированные таким образом, чтобы величины $n_0 = |\alpha_0|^2$ и $n_1 = |\alpha_1|^2$ имели бы смысл числа фотонов в моде накачки и в моде генерации. Часто употребляемыми характеристиками поля являются частоты Раби $\Omega_1 = g_1 |\alpha_1|$ и $\Omega_0 = g_0 |\alpha_0|$; g_0 и g_1 — константы дипольного взаимодействия атома с полями накачки и генерации.

При записи системы уравнений гамильтониан взаимодействия выбирался в форме

$$\hat{V}' = i g_0 (\alpha_0 |3\rangle\langle 1| - \alpha_0^* |1\rangle\langle 3|) + i g_1 (\alpha_1 |3\rangle\langle 2| - \alpha_1^* |2\rangle\langle 3|), \quad (3)$$

где $|i\rangle\langle k|$ ($i, k = 1, 2, 3$) — проекционные операторы, определенные на атомных состояниях.

Нетрудно понять, что эта система уравнений совершенно одинакова для обеих физических ситуаций, представленных на рис. 2.

В стационарных условиях (все производные по времени равны нулю) система уравнений (1) превращается в алгебраическую и может быть относительно легко решена. Явные выражения для стационарных матричных элементов имеют вид

$$\sigma_{11} = 1, \quad \sigma_{22} = \frac{i_0}{1 + i_1}, \quad \sigma_{33} = \frac{\bar{i}_0}{(1 + i_1)(1 + \bar{i}_1)}, \quad (4)$$

$$\sigma_{13} = \frac{g_0 \alpha_0^*}{\gamma_3} \frac{1}{1 + i_1}, \quad \sigma_{12} = \frac{g_1 \alpha_1 g_0 \alpha_0^*}{\gamma_2 \gamma_3} \frac{1}{1 + i_1}, \quad \sigma_{23} = -\frac{g_1 \alpha_1^*}{\gamma_3} \frac{\bar{i}_0}{(1 + i_1)(1 + \bar{i}_1)}. \quad (5)$$

Безразмерные мощности полей накачки и генерации задаются через параметры задачи в виде

$$i_0 = \frac{\Omega_0^2}{\gamma_2 \gamma_3}, \quad i_1 = \frac{\Omega_1^2}{\gamma_2 \gamma_3}, \quad \bar{i}_0 = i_0 \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, \quad \bar{i}_1 = i_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_3}. \quad (6)$$

При записи стационарных решений мы требовали, чтобы

$$\Omega_0, \gamma_2 \ll \gamma_3. \quad (7)$$

Как видим, при выбранных условиях только малая часть атомов оказывается возбужденной. Действительно,

$$\sigma_{33}, \sigma_{22} \ll \sigma_{11}, \quad (8)$$

причем, заселенность состояния $|2\rangle$ всегда намного больше заселенности состояния $|3\rangle$:

$$\sigma_{33} \ll \sigma_{22}. \quad (9)$$

В дальнейшем будем называть условие (7) безынверсным приближением.

3.2. Укороченные уравнения генерации

Рассмотрим физическую систему, состоящую из возбуждающего одномодового и возбуждаемого одномодового лазеров, как единый двухмодовый лазер с комплексными амплитудами генерации α_0 (возбуждающая мода) и α_1 (возбуждаемая мода). Как хорошо известно, может быть записано следующее равенство:

$$\dot{\alpha}_1 = -g_1 N_1 \sigma_{32} - \frac{\kappa_1}{2} \alpha_1. \quad (10)$$

Здесь N_1 — полное число атомов в активной среде возбуждаемого лазера, κ_1 — резонаторная ширина моды возбуждаемого лазера. Подставляя сюда явное выражение для матричного элемента $\sigma_{32} = \sigma_{23}^*$ (5), получим уравнение лазерной генерации в возбуждаемой моде. Оно, разумеется, зависит от генерации в возбуждающей моде.

Для α_0 может быть записано аналогичное уравнение. При этом мы должны учесть, что возбуждающая мода взаимодействует с двумя резонансными средами: со средой возбуждающего лазера и со средой возбуждаемого лазера в процессе ее возбуждения.

Знак величины σ_{32} укажет, имеет ли место на лазерном переходе усиление или поглощение. Выделив составляющие, пропорциональные двухквантовой разности заселенностей ($\sigma_{11} - \sigma_{22}$), мы тем самым выделим члены (если они окажутся), ответственные за рамановское рассеяние.

Как видно из выражения (5), величина σ_{32} отрицательна, и, следовательно, на лазерном переходе имеет место усиление. Кроме того, когерентность лазерного перехода зависит от заселенности верхнего лазерного уровня, но не от двухквантовой разности заселенностей, как это должно было бы быть при рамановском рассеянии. Таким образом, имея в виду сделанный выше вывод, что на лазерном переходе нет инверсии заселенностей, мы можем прийти к однозначному заключению, что в данном случае речь может идти только о безынервной лазерной генерации, характерной для многоуровневых атомных систем [3].

Запишем теперь уравнение (10) в явном виде в безынервном приближении:

$$\dot{\alpha}_1 = \left(\frac{\kappa}{2} \frac{\tilde{i}_1}{1 + \tilde{i}_1} \frac{n_0}{n_1} - \frac{\kappa_1}{2} \right) \alpha_1 = 0. \quad (11)$$

Здесь n_0 и n_1 — полуклассические решения для чисел фотонов внутри одного и другого резонаторов, величина

$$\kappa = \frac{\bar{\kappa}}{1 + \tilde{i}_1}, \quad \bar{\kappa} = \frac{2g_0^2 N_1}{\gamma_3}, \quad (12)$$

имеет физический смысл скорости поглощения возбуждающего света в возбуждаемой среде (или скорости возбуждения активной среды возбуждаемого лазера). Эта скорость зависит от уровня мощности генерации возбуждаемого лазера. Из (11) в случае насыщения ($\tilde{i}_1 \gg 1$) следует полезное соотношение:

$$\frac{n_0}{n_1} = \frac{\kappa_1}{\kappa}, \quad (13)$$

откуда нетрудно получить

$$\tilde{i}_1 = \frac{g_1}{g_0} \sqrt{\frac{\bar{\kappa}}{\kappa_1}} i_0, \quad \kappa = \frac{g_0}{g_1} \sqrt{\frac{\kappa_1 \bar{\kappa}}{i_0}}. \quad (14)$$

4. ТЕОРИЯ ГЕНЕРАЦИИ ИЗОЛИРОВАННОГО ЛАЗЕРА С ПУАССОНОВСКИМ И СУБПУАССОНОВСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

4.1. Общий вид основного кинетического уравнения

Квантостатистическая теория излучения каскадной схемы лазеров будет строиться на основе теории для изолированного лазера. В этом и следующем разделах будем полагать, что имеется только один трехуровневый лазер, среда которого возбуждается излучением другого вспомогательного лазера. Нам удобно не конкретизировать возбуждающий лазер, оставляя тем самым возможность на последнем этапе выбрать или пуассоновское возбуждение, или субпуассоновское. Напоминаем, что частично этот вопрос исследовался в работе [1]. Здесь же будет обсужден вопрос не только о внутрирезонаторной ситуации, но и наблюдении, причем, будет показано, что физический результат наблюдения существенно зависит от условий возбуждения лазера. Будут рассматриваться две физические ситуации: когда возбуждающий лазер не «замечает» появления или исчезновения возбуждаемого лазера (слабая связь между лазерами) и когда обратное влияние очень существенно (сильная связь).

Для описания статистических свойств лазерной генерации будем использовать метод кинетического уравнения для матрицы плотности ρ поля генерации исследуемого лазера и поля генерации возбуждающего лазера, полагая их в теории равноправными. В традиционных подходах возбуждающее поле обычно вводится как заданное. В нашем подходе мы сможем принять во внимание как неклассичность возбуждающего поля, что принципиально важно в каскадных схемах с трехуровневыми лазерами, так и обратное влияние возбуждаемого лазера на возбуждающий, связанное с особенностями трехуровневых схем.

Чтобы основное кинетическое уравнение могло быть выделено, мы должны предположить, что движение атомных переменных происходит много быстрее, чем движение полевых переменных. Это стандартное требование кинетической теории может быть в лазерных условиях удовлетворено предположением о достаточно большой добротности оптических резонаторов обоих лазеров. Если это условие выполнено, то мы можем представить искомое кинетическое уравнение в следующем виде:

$$\dot{\rho} = \left(r_0 \hat{S}_0 - \frac{\kappa_0}{2} \hat{R}_0 \right) \rho + \left(\hat{S}_1 - \frac{\kappa_1}{2} \hat{R}_1 \right) \rho. \quad (15)$$

Здесь операторы \hat{R}_0 и \hat{R}_1 ответственны за затухание внутрирезонаторных квантованных полевых осцилляторов возбуждающего и возбуждаемого лазеров со скоростями κ_0 и κ_1 ; операторы \hat{S}_1 и \hat{S}_0 ответственны за нелинейное взаимодействие лазерных полей с активными средами; r_0 — средняя скорость возбуждения верхнего лазерного уровня активной среды возбуждающего лазера.

Будем стремиться записать уравнение (15) в явном виде, используя диагональное представление Глаубера. Таким образом, $\rho = \rho(\alpha_0, \alpha_1, t)$, где α_0 и α_1 — как и прежде, комплексные амплитуды поля накачки и поля генерации, которые теперь являются собственными числами соответствующих операторов уничтожения:

$$a_j |\alpha_j\rangle = \alpha_j |\alpha_j\rangle, \quad [a_j, a_j^\dagger] = 1, \quad j = 0, 1. \quad (16)$$

Для операторов затухания полевых осцилляторов в представлении Глаубера имеют место хорошо известные выражения:

$$\hat{R}_j = -\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \alpha_j + \text{с.с.} \quad (17)$$

Для целей дальнейшего изложения нам удобно до определенного предела не фиксировать явное представление оператора \hat{S}_0 , которое, разумеется, зависит от того, какой лазер выбирается в качестве возбуждающего. Это означает, например, что в варианте теории, основанном на приближении малых фотонных флуктуаций, который мы здесь используем, не будут записываться в явном виде два коэффициента, относящиеся к возбуждающему лазерному излучению, а именно, Γ_0 — скорость затухания фотонных флуктуаций и ξ_0 — статистический параметр Манделя.

Здесь и далее будем рассматривать два варианта возбуждающих лазеров. В первом варианте будет использован традиционный лазер типа того, который рассмотрен, например, в работе [4]. Как известно, в режиме насыщения излучение этого лазера чисто пуассоновское. Явное выражение для оператора \hat{S}_0 в диагональном представлении можно найти в [5]. Этот случай будем в дальнейшем называть случаем пуассоновского возбуждения. Второй вариант субпуассоновского возбуждения теоретически легко достигается с помощью первого заменой оператора \hat{S}_0 на оператор $\hat{S}_0 - \hat{S}_0^2/2$ [2].

Хотя вычисление оператора \hat{S}_1 является одной из основных задач этой теории, тем не менее, поскольку это чисто теоретическая проблема, содержащая громоздкие вычисления, она будем рассматриваться отдельно в Приложении. Здесь же мы воспользуемся формулами из Приложения, перечислив те основные шаги, которые должны быть сделаны (и делаются в Приложении).

В качестве первого шага записываем достаточно очевидное уравнение для матрицы плотности $\hat{F}(t)$ двухмодовой генерации (поля генерации и поля накачки) и одиночного атома, энергетическая структура которого с учетом атомных релаксаций представлена на рис. 2. Затем в этом уравнении переходим к диагональному представлению Глаубера, т. е. к уравнению для матрицы плотности $\hat{F}(\alpha_0, \alpha_1, t)$. Эта матрица остается операторной по отношению к атомным переменным. Удобство диагонального представления состоит, в частности, в том, что в уравнении в явном виде возникают члены, ответственные за квантование электромагнитного поля. Они могут быть отделены от «классической» по отношению к полю части по очень простому признаку: это слагаемые с производными по комплексным амплитудам поля, отбрасывая которые, мы получим уравнение (1), описывающее поведение одиночного атома во внешних классических полях с амплитудами α_0, α_1 .

На следующем шаге факторизуем матрицу плотности в виде $\hat{F} = \hat{\sigma}\rho + \hat{\pi}$, где $\hat{\sigma}(t)$ — матрица плотности, описывающая поведение одиночного атома в двух внешних «классических полях» с амплитудами α_0, α_1 ; $\rho(\alpha_0, \alpha_1, t)$ — матрица плотности поля двухмодовой генерации, $\hat{\pi}(\alpha_0, \alpha_1, t)$ — матрица, описывающая корреляции между атомом и полями генерации.

Из исходного уравнения для матрицы плотности $\hat{F}(\alpha_0, \alpha_1, t)$ одиночного атома и двух полей генерации при наличии уравнения для атомной матрицы плотности $\hat{\sigma}$ получаем систему уравнений для матриц ρ и $\hat{\pi}$ (параметрически зависящих от $\hat{\sigma}$). Решая уравнение относительно $\hat{\pi}$, получим эту величину как функцию ρ . Подставляя ее в уравнение для ρ , получим замкнутое уравнение только для полевой матрицы плотности. Один из возможных подходов к этой проблеме состоит в принятии так называемого кинетического приближения. Мы должны предположить, что время корреляции поля с веществом должно быть много меньше времени релаксации полевых переменных. Роль времени корреляции в данном случае играет период обращения атома по уровням за счет

взаимодействия с полем накачки, с полем генерации и за счет некогерентных процессов. Роль же времени релаксации, как обычно в лазерных задачах, играет время жизни фотона в оптическом резонаторе. Кинетическое приближение позволяет нам при решении уравнений для атомной матрицы $\hat{\sigma}$ и для матрицы корреляций $\hat{\pi}$ ограничиться написанием только стационарных решений. Когда речь идет о чисто атомном движении, как в уравнении для $\hat{\sigma}$, то это совершенно понятно, поскольку это движение самое быстрое и атом за короткое время успевает прийти в стационарное состояние. Несколько сложнее ситуация относительно уравнения для $\hat{\pi}$, в котором присутствует как атомное, так и полевое движения. Однако здесь может быть применено адиабатическое приближение, когда на первом этапе мы просто пренебрегаем изменением полевых переменных, ищем стационарное решение задачи, а затем учитываем временные изменения полевых переменных в этом стационарном решении.

Переход к стационарным уравнениям превращает систему дифференциальных уравнений в систему алгебраических уравнений, которая относительно легко может быть решена. Эта схема позволяет нам получить явную зависимость $\hat{\pi} = \hat{\pi}(\rho, \hat{\sigma})$, т. е. в явном виде выражение для скорости изменения матрицы плотности поля генерации за счет взаимодействия с одиночным атомом.

И, наконец, на последнем шаге мы должны учесть наличие в резонаторе N_1 статистически независимых одинаковых атомов. Для этого приращение полевой матрицы плотности ρ из-за взаимодействия с одним атомом умножается на N_1 , в результате чего получаем величину $\dot{\rho}$ как функцию ρ , т. е. искомое развитие полевой матрицы из-за взаимодействия полей со средой.

4.2. Приближение малых фотонных флуктуаций

Обычно в лазерной физике обсуждаются такие характеристики поля, как амплитуды (числа фотонов) и фазы (разности фаз). Поэтому в теории удобно перейти от комплексных амплитуд α_j ($j = 0, 1$) к полярным координатам u_j, φ_j :

$$\alpha_j = \sqrt{u_j} \exp(i\varphi_j), \quad j = 0, 1. \quad (18)$$

Сделаем предположение, вполне обычное для задач статистической лазерной физики, что числа фотонов как в возбуждающем, так и в возбуждаемом лазерах в стационарных режимах генерации слабо флуктуируют около своих полуклассических стационарных значений:

$$u_j = n_j + \epsilon_j, \quad n_j \gg \epsilon_j. \quad (19)$$

Разумеется, этот вариант возможен только для тех физических условий, когда в резонаторе накапливается большое число фотонов. Полуклассические решения для n_j могут быть найдены в формулах (13), (14).

Принимая во внимание полуклассические решения и результаты, полученные в Приложении, можем записать кинетическое уравнение для фотонной матрицы плотности

$$\rho(\epsilon_0, \epsilon_1, t) = \iint \rho(\epsilon_0, \varphi_0, \epsilon_1, \varphi_1, t) d\varphi_0 d\varphi_1, \quad (20)$$

которое имеет следующую форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\varepsilon_0, \varepsilon_1, t) = & \Gamma_0 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \delta_1 \varepsilon_1) \rho + \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} (\varepsilon_1 - \delta_0 \varepsilon_0) \rho + \\ & + D_0 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varepsilon_0^2} + D_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varepsilon_1^2} + D_{01} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varepsilon_0 \partial \varepsilon_1} + \{ \dots \}. \end{aligned} \quad (21)$$

Как видим, здесь оказывают влияние флуктуации возбуждающего поля на флуктуации поля генерации (за счет линейной связи, определяемой коэффициентом δ_0), что совершенно естественно и ожидаемо. Но, кроме того, имеется и обратное влияние (δ_1), что связано с особенностью трехуровневой схемы, в которой в канале возбуждения коэффициент поглощения оказывается зависящим от поля генерации (5). Через $\{ \dots \}$ обозначена совокупность производных по ε всех более высоких порядков.

Сначала выпишем те коэффициенты в безынерсном приближении, которые не зависят от типа возбуждающего лазера:

$$\Gamma_1 = \kappa_1 \frac{i_1}{i_1 + 1} \frac{2\bar{i}_1 + 1}{\bar{i}_1 + 1}, \quad \Gamma_1 \delta_0 = \kappa, \quad \Gamma_0 \delta_1 = \kappa_1 \frac{i_1 + \gamma_3/\gamma_2}{i_1 + 1}, \quad (22)$$

$$D_1 = -\kappa_1 n_1, \quad D_{01} = \kappa_1 n_1 \frac{i_1 + \gamma_3/\gamma_2}{i_1 + 1}, \quad D_0 = \Gamma_0 \xi_0 n_0.$$

Эти формулы пригодны для любого типа возбуждающего лазера, что будет для нас в дальнейшем важно, поскольку именно это позволит нам переходить к изучению каскадных схем на столь простой основе. Выбирать тип возбуждающего лазера возможно выбором коэффициентов Γ_0 и ξ_0 . Смысл коэффициента Γ_0 — это скорость затухания фотонных флуктуаций в возбуждающей генерации (в присутствии возбуждаемого лазера); ξ_0 — параметр Манделя, характеризующий внутривибрационные фотонные флуктуации возбуждающего лазера (в отсутствие возбуждаемого лазера).

При возбуждении излучениями пуассоновского лазера в режиме насыщения $\xi_0 = 0$ и субпуассоновского лазера в режиме насыщения $\xi_0 = -1/2$. Для обоих случаев $\Gamma_0 = \kappa_0 + \kappa$.

5. ФОТОДЕТЕКТИРОВАНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ЛАЗЕРА

5.1. Уравнения для средних величин

При детектировании излучения одномодового лазера спектр фототока может быть записан в форме:

$$i_{\omega}^{(2)} = i_{shot}^{(2)} \left(1 + \frac{2\kappa_1}{n_1} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \overline{\varepsilon_1(0)\varepsilon_1(t)} e^{i\omega t} dt \right), \quad (23)$$

где i_{shot} — дробовой ток. Таким образом, мы должны найти явное представление средней величины $\overline{\varepsilon_1 \varepsilon_1(t)}$. Основное кинетическое уравнение (21) стандартными способами позволяет записать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_1(t)} &= -\Gamma_1 \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_1(t)} + \Gamma_1 \delta_0 \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_0(t)}, \\ \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_0(t)} &= -\Gamma_0 \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_0(t)} + \Gamma_0 \delta_1 \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_1(t)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Решения этой системы будут зависеть от начальных условий, т. е. от выражений $\overline{\varepsilon_1 \varepsilon_0}$ и $\overline{\varepsilon_1^2}$ в стационарных условиях. Чтобы определить эти стационарные выражения, сюда необходимо добавить еще следующую систему уравнений, которая также следует из основного кинетического уравнения:

$$\begin{aligned} \overline{\dot{\varepsilon}_1^2} &= -2\Gamma_1 \overline{\varepsilon_1^2} + 2\Gamma_1 \delta_0 \overline{\varepsilon_0 \varepsilon_1} + 2D_1 = 0, \\ \overline{\dot{\varepsilon}_0 \varepsilon_1} &= -(\Gamma_0 + \Gamma_1) \overline{\varepsilon_0 \varepsilon_1} + \Gamma_0 \delta_1 \overline{\varepsilon_1^2} + \Gamma_1 \delta_0 \overline{\varepsilon_0^2} + D_{01} = 0, \\ \overline{\dot{\varepsilon}_0^2} &= -2\Gamma_0 \overline{\varepsilon_0^2} + 2\Gamma_0 \delta_1 \overline{\varepsilon_0 \varepsilon_1} + 2D_0 = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь необходимо подчеркнуть, что уравнения (24), (25) являются точным следствием уравнения (21), и члены $\{\dots\}$ с высокими производными не дают сюда вклада в точном смысле слова.

Используем формулы (22) в режиме насыщения, т. е. при условии $\bar{i}_1 \gg 1$, оставляя в то же самое время коэффициенты Γ_0 и ξ_0 неутонченными:

$$\begin{aligned} -2\kappa_1 \overline{\varepsilon_1^2} + \kappa \delta_0 \overline{\varepsilon_0 \varepsilon_1} - \kappa_1 n_1 &= 0, \\ -(\Gamma_0 + 2\kappa_1) \overline{\varepsilon_0 \varepsilon_1} + \kappa_1 \overline{\varepsilon_1^2} + \kappa \overline{\varepsilon_0^2} + \kappa_1 n_1 &= 0, \\ -\Gamma_0 \overline{\varepsilon_0^2} + \kappa_1 \overline{\varepsilon_0 \varepsilon_1} + \Gamma_0 \xi_0 n_0 &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Решение этой алгебраической системы уравнений может быть записано в форме:

$$\overline{\varepsilon_0 \varepsilon_1} = \frac{2\kappa_1 \Gamma_0 n_1 (\xi_0 + 1/2)}{(2\Gamma_0 - \kappa)(\Gamma_0 + 2\kappa_1)}, \quad (27)$$

$$\xi_1 = -\frac{n_1}{2} + \frac{\kappa \Gamma_0 n_1 (\xi_0 + 1/2)}{(2\Gamma_0 - \kappa)(\Gamma_0 + 2\kappa_1)}. \quad (28)$$

Здесь $\xi_1 = \overline{\varepsilon_1^2}/n_1$ — статистический параметр Мандела.

Как видно, при $\xi_0 = -1/2$ одновременная перекрестная корреляция не возникает, а $\xi_1 = -1/2$.

Решая систему уравнений (24), (25), получим явное выражение для спектра фототока (23):

$$\frac{i_{\omega}^{(2)}}{i_{shot}^{(2)}} = 1 - 2\kappa_1^2 \frac{\Gamma_0^2 + \omega^2 - \Gamma_0 \kappa (1 + \xi_0)}{[\kappa_1 (2\Gamma_0 - \kappa) - \omega^2]^2 + \omega^2 (\Gamma_0 + 2\kappa_1)^2}. \quad (29)$$

Напомним, что в случаях пуассоновского и субпуассоновского возбуждения в режиме насыщения в возбуждающем лазере $\Gamma_0 = \kappa_0 + \kappa$, а ξ_0 соответственно равно 0 и $-1/2$.

Далее это выражение будет анализироваться в двух наиболее интересных предельных случаях: слабой и сильной связи между возбуждающим и возбуждаемым лазерами. Ввиду того что внутррезонаторные пространства обоих лазеров в нашем рассмотрении здесь пересекаются, среда возбуждаемого лазера вносит дополнительные резонаторные потери для возбуждающего лазера. Таким образом, полные потери поля из резонатора определяются величиной $\kappa_0 + \kappa$. Если

$$\kappa_0 \gg \kappa, \quad (30)$$

то этим дополнительным влиянием можно пренебрегать, полагая, что генерация возбуждающего лазера никак не зависит от возбуждаемого. Неравенство (30) будем называть условием слабой связи между лазерами. В то же время понятно, что реален и прямо противоположный случай сильной связи, когда основная часть генерации возбуждающего лазера расходуется именно на возбуждение активной среды возбуждаемого лазера.

5.2. Слабая связь между лазерами

Если имеет место неравенство (30), то формула (29) переписывается в виде

$$\frac{i_{\omega}^{(2)}}{i_{shot}^{(2)}} = 1 - 2\kappa_1^2 \frac{\Gamma_0^2 + \omega^2}{[2\Gamma_0\kappa_1 - \omega^2]^2 + \omega^2(\Gamma_0 + 2\kappa_1)^2}. \quad (31)$$

Во-первых, видно, что в условиях слабой связи между возбуждающим и возбуждаемым лазерами спектр фототока оказывается не зависящим от параметра Мандела ξ_0 в возбуждающем лазере. Совершенно безразлично, является ли возбуждение пуассоновским, субпуассоновским или даже суперпуассоновским. Это, в частности, означает, что в этом случае может быть применен упрощенный вариант теории. Здесь нет надобности учитывать лазерную и возбуждающую генерации как равноправные подсистемы и писать уравнение для матрицы плотности обоих лазерных полей. В случае слабой связи всегда можно вводить поле накачки как c -число в соответствующий гамильтониан взаимодействия. И при любом типе возбуждающего лазера физическая картина в лазерной волне будет всегда одинакова и совпадать с картиной при пуассоновском возбуждении.

Во-вторых, максимальное подавление дробового шума достигается, как обычно, на нулевой частоте. Величина этого подавления не зависит от типа возбуждения, и относительная глубина провала достигает 1/2.

5.3. Сильная связь между лазерами

Как мы только что увидели, при слабой связи нет влияния статистических свойств излучения возбуждающего лазера на статистические свойства возбуждаемого лазера. Это совершенно естественно, поскольку в процессе возбуждения участвует только малая доля исходного излучения, которая не сохраняет, как известно, свойств всего излучения. Поэтому для нас важен как раз противоположный случай сильной связи:

$$\kappa_0 \ll \kappa, \quad (32)$$

при которой мы полагаем, что статистические свойства возбуждающего излучения будут переноситься на генерацию. Тогда вместо (29) может быть написано следующее выражение:

$$\frac{i_{\omega}^{(2)}}{i_{shot}^{(2)}} = 1 + \frac{2\kappa_1^2}{x_+^2 - x_-^2} \left(\frac{\xi_0^{(0)}\kappa^2 + x_-^2}{\omega^2 + x_-^2} - \frac{\xi_0^{(0)}\kappa^2 + x_+^2}{\omega^2 + x_+^2} \right). \quad (33)$$

Здесь через x_{\pm} обозначены корни биквадратного уравнения

$$(\kappa_1\kappa + x^2)^2 - x^2(\kappa + 2\kappa_1)^2 = 0. \quad (34)$$

Наиболее простой вид они имеют в двух предельных случаях:

$$x_-^2 = \kappa^2, \quad x_+^2 = \kappa_1^2, \quad \kappa \gg \kappa_1, \quad (35)$$

$$x_-^2 = 4\kappa_1^2, \quad x_+^2 = \kappa^2/4, \quad \kappa \ll \kappa_1. \quad (36)$$

Запишем отдельные формулы для случаев возбуждения излучением от пуассоновского и субпуассоновского лазеров.

В случае пуассоновского возбуждения имеем

$$\frac{i_\omega^{(2)}}{i_{shot}^{(2)}} = 1, \quad \kappa \gg \kappa_1, \quad (37)$$

$$\frac{i_\omega^{(2)}}{i_{shot}^{(2)}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{4\kappa_1^2}{\omega^2 + 4\kappa_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2/4}{\omega^2 + \kappa^2/4}, \quad \kappa \ll \kappa_1, \quad (38)$$

в случае субпуассоновского возбуждения —

$$\frac{i_\omega^{(2)}}{i_{shot}^{(2)}} = 1 - \frac{\kappa_1^2}{\omega^2 + \kappa_1^2}, \quad \kappa \gg \kappa_1, \quad (39)$$

$$\frac{i_\omega^{(2)}}{i_{shot}^{(2)}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{4\kappa_1^2}{\omega^2 + 4\kappa_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2/4}{\omega^2 + \kappa^2/4}, \quad \kappa \ll \kappa_1. \quad (40)$$

Полученные результаты можно понять на основе следующего рассуждения. В среде трехуровневых атомов, возбуждаемых внешним излучением, действуют два механизма, регулирующие фотонный поток в лазерной генерации. Один связан со свойствами самой среды и с автоматическим возникновением в ней отрицательной обратной связи, другой — с возбуждающим излучением. При этом первый механизм действительно является всегда стабилизирующим, но роль второго может быть различной в зависимости от соотношения параметров задачи. Например, если связь между возбуждающим и возбуждаемым лазерами слабая, то статистические особенности возбуждающего излучения вообще неважны. Это становится важным для регуляризации фотонного потока в генерации только при сильной связи. Как видно из формул, роль этого фактора становится определяющей при предельно сильной связи, когда κ много больше не только κ_0 , но и κ_1 . В этом случае роль собственного стабилизирующего фактора среды становится несущественной и статистика поля генерации просто совпадает со статистикой возбуждающего поля. Как видим, при пуассоновском возбуждении возникает пуассоновская же генерация, при субпуассоновском с полным подавлением шума на нулевой частоте — субпуассоновская же и тоже с полным подавлением шума на нулевой частоте. Если связь между лазерами сильная, но все-таки $\kappa \ll \kappa_1$, то оба указанных выше фактора действуют совместно. Им соответствуют два частотно-зависимых слагаемых в формулах (38) и (40). Первое слагаемое в обеих формулах одинаково: оно связано со стабилизирующими свойствами трехуровневой среды и приводит к подавлению дробового шума на нулевой частоте в два раза. Второе слагаемое, а точнее его знак, зависит от того, является ли возбуждающее излучение пуассоновским (т. е. дестабилизирующим) или субпуассоновским (т. е. стабилизирующим). В первом случае фактор собственной стабилизации среды в значительной мере компенсируется стохастичностью возбуждения, так что на нулевой частоте подавление дробового шума исчезает. Во втором случае оба фактора действуют в одном направлении, и дробовый шум на нулевой частоте оказывается полностью подавленным.

6. КАСКАДНАЯ СХЕМА, СОСТОЯЩАЯ ИЗ N СИЛЬНО СВЯЗАННЫХ ЛАЗЕРОВ

6.1. Основное кинетическое уравнение для когерентных полей

Как было выяснено в предыдущих разделах, квантовые свойства возбуждающего лазера могут передаваться возбуждаемому лазеру при их сильной связи. В формировании квантовых свойств генерации трехуровневых атомов играют роль два механизма: во-первых, организующая роль самой лазерной среды, которая даже в условиях пуассоновского возбуждения приводит к субпуассоновости генерации; во-вторых, организующая роль самого возбуждения, если оно осуществляется субпуассоновским светом. В этой связи мы хотим исследовать цепочку из N трехуровневых лазеров, в которой, как очевидно, действуют оба этих механизма.

Математическая ситуация здесь, однако, непростая. Сложность состоит в том, что в силу особенностей трехуровневых атомных структур каждый лазер в каскаде оказывает влияние не только на последующий лазер, но и на предыдущий. Это происходит только в условиях сильной связи, но именно этот случай, как следует из предыдущих рассуждений, важен для нас, если мы хотим достичь эффекта преобразования (улучшения) статистических характеристик. Поэтому, в принципе, мы должны формулировать теорию в некотором смысле заново, стараясь записать кинетическое уравнение для матрицы плотности N лазерных полей. К счастью, при этом нет необходимости возвращаться к исходным принципам. Само уравнение в приближении малых фотонных флуктуаций в каждом из лазеров может быть записано из самых общих соображений из нашего понимания той физики, которая здесь имеет место:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\{\varepsilon_i\}, t) = & \sum_{i=1,2,3,\dots,N} \Gamma_i \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} (\varepsilon_i - \delta_{ii+1} \varepsilon_{i+1} - \delta_{ii-1} \varepsilon_{i-1}) \rho + \\ & + \sum_{i=1,2,3,\dots,N} \left[D_i \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varepsilon_i^2} + D_{i-1i} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varepsilon_{i-1} \partial \varepsilon_i} \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь коэффициенты δ_{ii-1} учитывают влияние предыдущего лазера на последующий (перенос фотонных флуктуаций генерации возбуждающего лазера в генерацию возбуждаемого в процессе возбуждения активной среды), коэффициенты δ_{ii+1} учитывают влияние последующего лазера на предыдущий (перенос фотонных флуктуаций генерации возбуждаемого лазера на возбуждающую генерацию через нелинейный коэффициент поглощения возбуждающего света). Коэффициенты Γ_i в отсутствие других лазеров имеют физический смысл скорости затухания фотонных флуктуаций в i -ом лазере. Коэффициенты D_i и D_{ii+1} задают источники соответствующих самокорреляций и корреляций между соседними лазерами в каскаде.

Напомним, что раньше у нас имелись следующие важные для нашего обсуждения параметры: κ — скорость поглощения возбуждающего излучения в среде возбуждаемого лазера, κ_0 и κ_1 — резонаторные ширины возбуждающего и возбуждаемого лазеров. Теперь лазеров много, и число параметров соответственно возрастает. Обозначим: κ_{i-1i} , $i = 1, 2, \dots, N$ — скорость поглощения излучения $(i-1)$ -го лазера в активной среде i -го лазера, κ_i — резонаторная ширина изолированного i -го лазера.

Обсудим структуру коэффициентов уравнения (41) на основе уравнения (21), записанного в безынверсном приближении. Мы догадаемся об общей структуре коэффициентов, записывая их сначала для случая $N = 1$, затем для $N = 2$, $N = 3$ и т. д.

	N					
	1	2	3	...	N - 1	N
Γ_1	$2\kappa_1$	$2(\kappa_1 + \kappa_{12})$	$2(\kappa_1 + \kappa_{12})$...	$2(\kappa_1 + \kappa_{12})$	$2(\kappa_1 + \kappa_{12})$
Γ_2	—	$2\kappa_2$	$2(\kappa_2 + \kappa_{23})$...	$2(\kappa_2 + \kappa_{23})$	$2(\kappa_2 + \kappa_{23})$
Γ_3	—	—	$2\kappa_3$...	$2(\kappa_3 + \kappa_{34})$	$2(\kappa_3 + \kappa_{34})$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
Γ_N	—	—	—	...	—	$2\kappa_N$
$\Gamma_1\delta_{12}$	—	κ_2	$\kappa_2 + \kappa_{23}$...	$\kappa_2 + \kappa_{23}$	$\kappa_2 + \kappa_{23}$
$\Gamma_2\delta_{23}$	—	—	κ_3	...	$\kappa_3 + \kappa_{34}$	$\kappa_3 + \kappa_{34}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
$\Gamma_{N-1}\delta_{N-1N}$	—	—	—	...	—	κ_N
$\Gamma_2\delta_{21}$	—	κ_{12}	κ_{12}	...	κ_{12}	κ_{12}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
$\Gamma_{N-1}\delta_{N-1N-2}$	—	—	—	...	κ_{N-2N-1}	κ_{N-2N-1}
$\Gamma_N\delta_{NN-1}$	—	—	—	...	—	κ_{N-1N}

Чтобы понять структуру коэффициентов Γ_i , δ_{i-1i} и δ_{ii-1} , составим таблицу: во втором столбце указаны эти коэффициенты в случае $N = 1$, в третьем — в случае $N = 2$, и, наконец, в последнем столбце указан набор коэффициентов при произвольном числе лазеров N . Ограничиваясь приближением сильной связи для каждой пары лазеров $\kappa_{ii+1} \gg \kappa_i$, можем написать общие выражения:

$$\delta_{ii+1} = \frac{\kappa_{i+1i+2}}{2\kappa_{ii+1}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N - 1, \quad \delta_{N-1N} = \frac{\kappa_N}{2\kappa_{N-1N}}, \quad \delta_{NN+1} = 0 \quad (42)$$

Коэффициенты δ_{ik} и δ_{ki} связаны соотношениями

$$4\delta_{ik}\delta_{ki} = 1, \quad i, k = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (43)$$

$$\Gamma_i = 2\kappa_{ii+1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N - 1, \quad \Gamma_N = 2\kappa_N. \quad (44)$$

Коэффициенты при вторых производных легко пишутся также на основе уравнения (21):

$$\begin{aligned} D_i &= -\kappa_{ii+1}n_i, & D_{i-1i} &= \kappa_{ii+1}n_i, & i &= 1, 2, 3, \dots, N - 1, \\ D_N &= -\kappa_N n_N, & D_{N-1N} &= \kappa_N n_N. \end{aligned} \quad (45)$$

6.2. Подавление квантового шума в каскадной схеме

Теперь теория на уровне кинетического уравнения сформулирована, и мы можем приступать к конкретным вычислениям. Сначала на основе уравнения (41) запишем уравнения для одновременных средних $\overline{\varepsilon_i \varepsilon_k}$. Проще всего здесь поступить следующим образом: будем записывать уравнения последовательно для $N = 1, N = 2, N = 3, \dots$, стараясь выяснять общие закономерности. Анализируя эти уравнения, придем к заключению, что все перекрестные средние при любом N оказываются равными нулю. Это не означает, что корреляции между фотонными флуктуациями разных лазеров вообще отсутствуют. Любой лазер в каскаде откликается на фотонные флуктуации в соседних лазерах через некоторое время. Решения для одновременных средних будут иметь вид

$$\overline{\varepsilon_i \varepsilon_k} = 0, \quad i \neq k, \quad \overline{\varepsilon_i^2} = -n_i/2. \quad (46)$$

Здесь необходимо было учитывать полуклассические соотношения между параметрами лазеров:

$$n_{i-1} \kappa_{i-1} = n_i \kappa_i, \quad (47)$$

которые также могут быть получены на основе предыдущего рассмотрения.

Таким образом, статистический параметр Манделя каждого лазера в каскаде один и тот же: $\xi_i = -1/2$. В этом смысле для каждого лазера ситуация не меняется при изменении числа лазеров в каскаде и, в частности, по сравнению со случаем $N = 1$, т. е. когда этот лазер не находится в каскадной схеме, но изолирован и возбуждается внешним пуассоновским светом.

Мы здесь не будем стремиться к тому, чтобы записать формулу для спектра фототока при регистрации излучения каскада. Это математически громоздкая задача, а для нашего анализа важно только знать, какова величина провала на нулевой частоте дробового шума. Именно эту величину мы попытаемся построить.

На основе предыдущего рассмотрения мы сразу сможем записать окончательные выражения в случаях $N = 1$ и $N = 2$:

$$i_{\omega=0}^{(2)}/i_{shot}^{(2)} = 1/2, \quad N = 1, \quad i_{\omega=0}^{(2)}/i_{shot}^{(2)} = 1/3, \quad N = 2. \quad (48)$$

Теперь проанализируем ситуацию с $N = 3$. С помощью основного кинетического уравнения (41) можно записать следующую систему уравнений:

$$\overline{\varepsilon_3 \varepsilon_3(t)} = -\Gamma_3 \overline{\varepsilon_3 \varepsilon_3(t)} + \Gamma_3 \delta_{32} \overline{\varepsilon_3 \varepsilon_2(t)} = 0, \quad (49)$$

$$\overline{\varepsilon_3 \varepsilon_2(t)} = -\Gamma_2 \overline{\varepsilon_3 \varepsilon_2(t)} + \Gamma_2 \delta_{23} \overline{\varepsilon_3 \varepsilon_3(t)} + \Gamma_2 \delta_{21} \overline{\varepsilon_3 \varepsilon_1(t)} = 0, \quad (50)$$

$$\overline{\varepsilon_3 \varepsilon_1(t)} = -\Gamma_1 \overline{\varepsilon_3 \varepsilon_1(t)} + \Gamma_1 \delta_{12} \overline{\varepsilon_3 \varepsilon_2(t)} = 0. \quad (51)$$

Перейдем теперь к лаплас-образам:

$$x_{ik}(\omega) = \int_0^{\infty} \overline{\varepsilon_i(0) \varepsilon_k(t)} e^{i\omega t} dt, \quad (52)$$

и в полученных уравнениях положим $\omega = 0$:

$$-\overline{\varepsilon_3^2} = -\Gamma_3 x_{33} + \Gamma_3 \delta_{32} x_{32}, \quad (53)$$

$$0 = -x_{32} + \delta_{23} x_{33} + \delta_{21} x_{31}, \quad (54)$$

$$0 = -x_{31} + \delta_{12} x_{32}. \quad (55)$$

Отсюда нетрудно получить, что $x_{33} = -(3/8)n_3/\kappa_3$. Таким образом, для $N = 3$ уровень шума на нулевой частоте равен:

$$i_{\omega=0}^{(2)}/i_{shot}^{(2)} = 1/4, \quad N = 3. \quad (56)$$

Точно так же могут быть исследованы и более длинные каскадные схемы. В результате получаем

$$i_{\omega=0}^{(2)}(N)/i_{shot}^{(2)} = 1/(N + 1). \quad (57)$$

Таким образом, использование каскадной схемы позволяет нам достичь той меры подавления дробового шума, которая необходима.

Настоящее исследование выполнено при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-02-18129), INTAS-RFBR (грант № 95-0656) и Госкомвуза (грант № 95-0-5.4-66).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод основного кинетического уравнения

1. Построение оператора \hat{S}_1

1.1. Исходное уравнение в диагональном представлении

Запишем уравнение для матрицы плотности поля двухмодовой генерации (поля генерации и поля накачки) и одиночного трехуровневого атома:

$$\dot{\hat{F}} = -i [\hat{V}, \hat{F}] - \hat{R}_{at} \hat{F}. \quad (58)$$

Гамильтониан взаимодействия состоит из двух слагаемых, определяющих взаимодействие атома как с полем накачки, так и с полем генерации:

$$\hat{V} = ig_0 (a_0 |3\rangle\langle 1| - a_0^+ |1\rangle\langle 3|) + ig_1 (a_1 |3\rangle\langle 2| - a_1^+ |2\rangle\langle 3|). \quad (59)$$

Действие релаксационного оператора \hat{R}_{at} согласуется с релаксационными процессами (или с процессами некогерентного возбуждения) на рис. 2.

Частым подходом является задание поля накачки в виде c -числового поля. Тогда в равенстве (59) вместо операторов рождения a_0^+ и уничтожения a_0 фотонов снова пишутся c -числа α_0^* , α_0 , где

$$a|\alpha_0\rangle = \alpha_0|\alpha_0\rangle. \quad (60)$$

Перейдем в уравнении (58) к диагональному представлению Глаубера:

$$\dot{\hat{F}} = -i [\hat{V}', \hat{F}] - \hat{R}_{at} \hat{F} + g_1 \hat{D}_1 \hat{F} + g_0 \hat{D}_0 \hat{F}. \quad (61)$$

Здесь гамильтониан \hat{V}' совпадает с гамильтонианом \hat{V} при замене в последнем операторов рождения и уничтожения фотонов на соответствующие комплексные амплитуды поля. Действие операторов \hat{D}_1, \hat{D}_0 , которые зависят от производных по комплексным амплитудам поля и формируют в конечном счете статистические свойства лазерной генерации, определяется равенствами

$$\hat{D}_1 \hat{F} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} |2\rangle\langle 3| \hat{F} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1^*} \hat{F} |3\rangle\langle 2|, \quad (62)$$

$$\hat{D}_0 \hat{F} = \frac{\partial}{\partial \alpha_0} |1\rangle\langle 3| \hat{F} + \frac{\partial}{\partial \alpha_0^*} \hat{F} |3\rangle\langle 1|. \quad (63)$$

1.2. Факторизация матрицы плотности

Факторизуем теперь матрицу плотности \hat{F} в форме

$$\hat{F} = \hat{\sigma} \rho + \hat{\pi}. \quad (64)$$

Здесь $\hat{\sigma}(t)$ — матрица плотности одиночного атома в двух внешних классических полях с амплитудами α_0 и α_1 , для которой уравнение записывается в виде

$$\dot{\hat{\sigma}} = -i [\hat{V}', \hat{\sigma}] - \hat{R}_{at} \hat{\sigma}. \quad (65)$$

Матрица

$$\rho(\alpha_0, \alpha_1, t) = \text{Sp}_{at} \hat{F}(\alpha_0, \alpha_1, t) \quad (66)$$

— та самая матрица плотности поля генерации и поля накачки в диагональном представлении, замкнутое уравнение для которой мы стремимся построить в конечном счете. Матрица $\hat{\pi}$ учитывает корреляции между атомом и полями генерации и накачки, и нетрудно увидеть, что $\text{Sp}_{at} \hat{\pi} = 0$.

Имея все это в виду, вместо уравнения (61) можно получить систему уравнений для матриц $\hat{\pi}$ и ρ , в которые матрица плотности $\hat{\sigma}$ входит как параметр:

$$\dot{\rho} = (g_1 \bar{D}_1 + g_0 \bar{D}_0) \rho + g_1 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \pi_{32} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1^*} \pi_{23} \right) + g_0 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_0} \pi_{31} + \frac{\partial}{\partial \alpha_0^*} \pi_{13} \right), \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\pi}} = & -i [V', \hat{\pi}] - \hat{R}_{at} \hat{\pi} + \left[g_1 (\hat{D}_1 - \bar{D}_1) + g_0 (\hat{D}_0 - \bar{D}_0) \right] \hat{\sigma} \rho + \\ & + g_1 \left[\hat{D}_1 \hat{\pi} - \hat{\sigma} \text{Sp}_{at} (\hat{D}_1 \hat{\pi}) \right] + g_0 \left[\hat{D}_0 \hat{\pi} - \hat{\sigma} \text{Sp}_{at} (\hat{D}_0 \hat{\pi}) \right]. \end{aligned} \quad (68)$$

Здесь

$$\bar{D}_1 = \text{Sp}(\hat{D}_1 \hat{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \sigma_{32} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1^*} \sigma_{23}, \quad \bar{D}_0 = \text{Sp}(\hat{D}_0 \hat{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \sigma_{31} + \frac{\partial}{\partial \alpha_0^*} \sigma_{13}. \quad (69)$$

1.3. Стационарные решения для матрицы $\hat{\sigma}$

Примем так называемое кинетическое приближение, согласно которому атомные переменные меняются гораздо быстрее полевых переменных и, таким образом, успевают прийти в стационарное состояние при любом мгновенном значении полевых переменных. Чтобы это соответствовало действительности, мы должны выбрать высокодобротные оптические резонаторы для возбуждающего и возбуждаемого лазеров. Именно это гарантирует достаточную медленность движения полевых переменных.

В рамках кинетического приближения, во-первых, мы можем принять в уравнениях (67), (68) в качестве матричных элементов σ_{ik} стационарные решения уравнения (65); во-вторых, мы можем полагать, что основное временное поведение корреляционной матрицы $\hat{\pi}$ полностью определяется временным поведением матрицы ρ , и потому мы имеем право искать адиабатическое решение уравнения (68), положив равной нулю производную по времени от $\hat{\pi}$.

Уравнение (65) в стационарных условиях может быть переписано как алгебраическая система уравнений для матричных элементов и относительно легко решено. Явные выражения записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= [1 - U_1 - U_2 + V_2 + V_1 U_2 - V_2 U_1] D^{-1}, \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{D} [-V_1 + V_1 U_2 - V_2 U_1] D^{-1}, \quad \sigma_{33} = \frac{1}{D} [-U_1 + V_1 U_2 - V_2 U_1] D^{-1}, \\ \sigma_{12} &= -\frac{g\alpha g_0 \alpha_0^*}{\gamma_2(\gamma_2 + \gamma_3)} \frac{1}{i_1 i_0} \left[V_2 (U_1 - V_1) + V_2 (1 - U_2 + V_2) \frac{\gamma_2 + \gamma_3}{\gamma_3} \right] D^{-1}, \\ \sigma_{13} &= -\frac{g_0 \alpha_0^*}{\gamma_2 + \gamma_3} \frac{1}{i_0} \left[V_2 (1 - U_1 - U_2 + V_1 + V_2) - \frac{\gamma_3}{\gamma_2} U_1 (1 - U_2 + V_2) \right] D^{-1}, \\ \sigma_{23} &= -\frac{g\alpha}{\gamma_3} \frac{1}{i_1} \left[-V_2 (1 - U_1 - U_2 + V_1 + V_2) + \frac{\gamma_3}{\gamma_2} U_2 (-U_1 + V_1) \right] D^{-1}. \end{aligned} \quad (70)$$

В этих формулах обозначено

$$D = (1 - U_1 - 2U_2)(1 - V_1 + V_2) + (U_2 - U_1)(1 + V_1 + 2V_2), \quad (71)$$

$$U_1 = \tilde{i}_0 \frac{i_1 - (1 + i_0)(\gamma_2 + \gamma_3)/\gamma_3}{1 + i_0 + i_1}, \quad U_2 = \tilde{i}_1 \frac{i_0 - (1 + i_1)\gamma_3/(\gamma_2 + \gamma_3)}{1 + i_0 + i_1}, \quad (72)$$

$$V_1 = -\frac{i_0(1 + i_0)(\gamma_2 + \gamma_3)/\gamma_3}{1 + i_0 + i_1}, \quad V_2 = -\frac{i_0 i_1}{1 + i_0 + i_1}. \quad (73)$$

Безразмерные мощности полей накачки и генерации записываются через параметры задачи в виде

$$i_0 = \frac{\Omega_0^2}{\gamma_2 \gamma_3}, \quad i_1 = \frac{\Omega_1^2}{\gamma_2 \gamma_3}, \quad \tilde{i}_0 = i_0 \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, \quad \tilde{i}_1 = i_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_3}. \quad (74)$$

В безынерсном приближении (7)

$$U_1 = \frac{i_1 - 1}{i_1 + 1} \tilde{i}_0, \quad U_2 = -\frac{i_1 \tilde{i}_1}{1 + i_1}, \quad V_1 = -\frac{\tilde{i}_0}{1 + i_1}, \quad V_2 = \frac{i_0 i_1}{1 + i_1}. \quad (75)$$

Стационарные решения для атомной матрицы плотности в безынерсном приближении могут быть записаны в виде (4), (5).

1.4. Адиабатическое представление операторов $\hat{\pi}$

Теперь, когда мы имеем явные выражения для стационарной матрицы плотности атома, оба уравнения для ρ и $\hat{\pi}$, (67) и (68), оказываются полностью определенными. Как уже говорилось, мы будем использовать уравнение (68), чтобы из него получить в адиабатическом приближении явную зависимость $\hat{\pi} = \hat{\pi}(\rho)$.

Предположим, что члены справа в уравнении (68) с производными по комплексным амплитудам поля малы. Теперь мы имеем возможность строить итерационные ряды по степеням от этих малостей, т. е. записать

$$\hat{\pi} = \hat{\pi}_0 + \hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2 + \dots \quad (76)$$

Здесь $\hat{\pi}_0$ подчиняется уравнению

$$\dot{\hat{\pi}}_0 = -i \left[\hat{V}', \hat{\pi}_0 \right] - \hat{R}_{at} \hat{\pi}_0. \quad (77)$$

Мы всегда имеем возможность определить начальное состояние системы атом плюс поле как статистически независимые, т. е. можем положить $\hat{\pi} = 0$ при $t = 0$. Тогда в силу однородности уравнения (77) величина $\hat{\pi}_0$ остается равной нулю в любой последующий момент времени и для первой итерации $\hat{\pi}_1$ уравнение имеет вид

$$\dot{\hat{\pi}}_1 = -i \left[\hat{V}', \hat{\pi}_1 \right] - \hat{R}_{at} \hat{\pi}_1 + g_1 \left(\hat{D}_1 - \bar{D}_1 \right) \hat{\sigma} \rho + g_0 \left(\hat{D}_0 - \bar{D}_0 \right) \hat{\sigma} \rho. \quad (78)$$

Для любой последующей итерации может быть записано свое уравнение.

Здесь надо помнить о следующих обстоятельствах. Поскольку итерационный ряд строится как ряд по степеням производных по комплексным амплитудам поля, то проблема обрезания ряда сводится к проблеме значимости высоких производных в формировании статистической картины лазерной генерации. Как хорошо известно, если речь идет о полях, которые можно было бы называть классическими, то мы с полным правом могли бы ограничиться первой итерацией, что будет соответствовать основному кинетическому уравнению, в котором присутствуют производные по комплексным амплитудам не более второго порядка. В то же время для неклассических полей типа субпуассоновских или сжатых у нас нет никаких оснований ограничиваться только низшими порядками производных. В принципе, мы обязаны удерживать все производные, т. е. принимать во внимание полный итерационный ряд (76).

Перепишем уравнение (78) через матричные элементы и приравняем временные производные нулю:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_{13} &= -\gamma_3 \pi_{13} - g_0 \alpha_0^* (\pi_{33} - \pi_{11}) + g_1 \alpha_1^* \pi_{12} + S_{13} = 0, \\ \dot{\pi}_{12} &= -\gamma_2 \pi_{12} - g_0 \alpha_0^* \pi_{32} - g_1 \alpha_1 \pi_{13} + S_{12} = 0, \\ \dot{\pi}_{23} &= -(\gamma_2 + \gamma_3) \pi_{23} - g_1 \alpha_1^* (\pi_{33} - \pi_{22}) + g_0 \alpha_0 \pi_{21} + S_{23} = 0, \\ \dot{\pi}_{22} &= 2\gamma_2 \pi_{22} - g_0 \alpha_0 (\pi_{31} + \pi_{13}) + S_{11} = 0, \\ \dot{\pi}_{33} &= -2\gamma_3 \pi_{33} + g_0 \alpha_0 (\pi_{13} + \pi_{31}) + g_1 (\alpha_1 \pi_{23} + \alpha_1^* \pi_{32}) + S_{33} = 0. \end{aligned} \quad (79)$$

Сюда мы должны еще добавить условие

$$\pi_{11} + \pi_{22} + \pi_{33} = 0. \quad (80)$$

Неоднородные члены имеют вид

$$\begin{aligned}
 S_{12} &= g_1 \left(-\bar{D}_1 \sigma_{12} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1^*} \sigma_{13} \right) + g_0 \left(-\bar{D}_0 \sigma_{12} + \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \sigma_{32} \right), \\
 S_{13} &= -g_1 \bar{D}_1 \sigma_{13} + g_0 \left(-\bar{D}_0 \sigma_{13} + \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \sigma_{33} \right), \\
 S_{23} &= -g_1 \bar{D}_1 \sigma_{23} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \sigma_{33} - g_0 \bar{D}_0 \sigma_{23}, \\
 S_{11} &= -g_1 \bar{D}_1 \sigma_{11} + g_0 \bar{D}_0 (1 - \sigma_{11}), \\
 S_{22} &= g_1 \bar{D}_1 (1 - \sigma_{22}) - g_0 \bar{D}_0 \sigma_{22}, \\
 S_{33} &= -g_1 \bar{D}_1 \sigma_{33} - g_0 \bar{D}_0 \sigma_{33}.
 \end{aligned} \tag{81}$$

Решая систему уравнений (79), получим

$$\begin{aligned}
 \pi_{11} &= -[U_0(1 + V_1 + 2V_2) + V_0(1 - U_1 - 2U_2)] D^{-1}, \\
 \pi_{22} &= [U_0(2V_1 + V_2) + V_0(1 - 2U_1 - U_2)] D^{-1}, \\
 \pi_{33} &= [U_0(1 - V_1 + V_2) - V_0(U_2 - U_1)] D^{-1}, \\
 \pi_{13} &= \lambda_{13} + \frac{g_0 \alpha_0}{\gamma_2 + \gamma_3} \frac{1}{i_0} \times \\
 &\times \left[-U_0 V_2 (1 + 3V_1 + 3V_2) + \frac{\gamma_3}{\gamma_2} U_0 U_1 (2 + 3V_2) - V_0 V_2 (2 - 3U_1 - 3U_2) + \frac{\gamma_3}{\gamma_2} V_0 U_1 (1 - 3U_2) \right] D^{-1}, \\
 \pi_{23} &= \lambda_{23} + \frac{g \alpha^*}{\gamma_3} \frac{1}{i} \times \\
 &\times \left[U_0 V_2 (1 + 3V_1 + 3V_2) + \frac{\gamma_3}{\gamma_2} U_0 U_2 (1 - 3V_1) + V_0 V_2 (2 - 3U_1 - 3U_2) - \frac{\gamma_3}{\gamma_2} V_0 U_2 (1 - 3U_1) \right] D^{-1}.
 \end{aligned} \tag{82}$$

Здесь коэффициенты U_1, U_2, V_1, V_2 те же самые, что и прежде, и определяются формулами (72), (73). Новые коэффициенты λ_{ik}, U_0, V_0 связаны с неоднородностями S_{ik} исходной системы уравнений и выражаются через них следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{12} &= \frac{1}{\gamma_2} \frac{1}{1 + i_0 + i_1} \left(S_{12} - \frac{g_1 \alpha_1}{\gamma_3} S_{13} - \frac{g_0 \alpha_0}{\gamma_2 + \gamma_3} S_{32} \right), \\
 \lambda_{13} &= \frac{g_1 \alpha_1^*}{\gamma_3} \lambda_{12} + \frac{1}{\gamma_3} S_{13}, \\
 \lambda_{23} &= \frac{g_0 \alpha_0}{\gamma_2 + \gamma_3} \lambda_{21} + \frac{1}{\gamma_2 + \gamma_3} S_{23},
 \end{aligned} \tag{83}$$

и

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \frac{1}{2\gamma_3 g_1} S_{33} + \frac{g_1}{2\gamma_3} (\alpha_1 \lambda_{23} + \alpha_1^* \lambda_{32}) + \frac{g_0}{2\gamma_3} (\alpha_0 \lambda_{13} + \alpha_0^* \lambda_{31}), \\
 V_0 &= -\frac{1}{2\gamma_2 g_1} S_{11} + \frac{g_0}{2\gamma_2} (\alpha_0 \lambda_{13} + \alpha_0^* \lambda_{31}).
 \end{aligned} \tag{84}$$

Сравнивая уравнения (67) и (15), мы можем записать искомый оператор в форме

$$\hat{S}_1 = \frac{2g_1 N_1}{\kappa_1} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \pi_{32} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1^*} \pi_{23} \right) + \frac{2g_0 N_1}{\kappa_1} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_0} \pi_{31} + \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \pi_{13} \right). \tag{85}$$

В безынервном приближении можно получить

$$\hat{S}_1 = \kappa_1 \frac{C}{4n_0} \frac{\gamma_3/\gamma_2 - 3\tilde{i}_1}{(1+i_1)^2(1+\tilde{i}_1)^2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \alpha_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1^*} \alpha_1^* \right)^2 + \kappa_1 C \frac{\gamma_3/\gamma_2 + 2i_1}{(1+i_1)^2(1+\tilde{i}_1)} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1^*}, \quad (86)$$

где

$$C = \frac{2g_1^2 \tilde{i}_0}{\gamma_3 \kappa_1} \quad (87)$$

— так называемый кооперативный параметр (отношение линейного коэффициента усиления среды и линейного коэффициента потерь из резонатора).

2. Явный вид оператора \hat{S}_0

Здесь мы будем следовать работам [2, 5] согласно которым

$$\hat{S}_0 = \frac{\eta_2}{2} \left[2 \begin{matrix} a_0 & \leftarrow \\ \rightarrow & a_0 \end{matrix} - \begin{matrix} a_0 a_0^+ & \leftarrow \\ \rightarrow & a_0 a_0^+ \end{matrix} - \frac{1}{2} \eta_1 \left(\begin{matrix} a_0 a_0^+ & \leftarrow \\ \rightarrow & a_0 a_0^+ \end{matrix} \right)^2 \right] \times \\ \times \left[1 + \frac{1}{2} \eta_+ \left(\begin{matrix} a_0 a_0^+ & \leftarrow \\ \rightarrow & a_0 a_0^+ \end{matrix} \right) + \frac{1}{4} \eta_1 \eta_2 \left(\begin{matrix} a_0 a_0^+ & \leftarrow \\ \rightarrow & a_0 a_0^+ \end{matrix} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (88)$$

Здесь стрелки под операторами указывают на направление их действия по отношению к более правым выражениям, включая матрицу плотности. Явные выражения для параметров насыщения η_1, η_2 ($\eta_+ = \eta_1 + \eta_2$) здесь несущественны.

После перехода к диагональному представлению получим

$$\hat{S}_0 = - \frac{\eta_2}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \eta_1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_0} \alpha_0 - \frac{\partial}{\partial \alpha_0^*} \alpha_0^* \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \eta_1 \left(1 + \frac{3\eta_1}{2\gamma_2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_0} \alpha_0 + \frac{\partial}{\partial \alpha_0^*} \alpha_0^* \right)^2 \frac{1}{1 + \eta_+ |\alpha_0|^2} \right] \frac{1}{1 + \eta_+ |\alpha_0|^2} + \{ \dots \}, \quad (89)$$

Члены $\{ \dots \}$ содержат производные по комплексным амплитудам более высоких порядков. Перепишем это равенство в полярных координатах u_0 и φ_0 :

$$\hat{S}_0 = - \frac{\partial}{\partial u_0} \frac{\eta_2 u_0}{1 + \eta_+ u_0} + \frac{\partial^2}{\partial u_0^2} \frac{\eta_2 u_0}{(1 + \eta_+ u_0)^2} + \frac{\eta_2}{4u_0} \frac{1 + \eta_1 u_0}{1 + \eta_+ u_0} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_0^2}. \quad (90)$$

Литература

1. H. Ritsch, M. A. M. Marte, and P. Zoller, Europhys. Lett. **19**, 7 (1992).
2. Ю. М. Голубев, И. В. Соколов, ЖЭТФ **87**, 408 (1984).
3. О. А. Кочаровская, Я. И. Ханин, Письма в ЖЭТФ **48**, 581 (1988); О. А. Кочаровская, П. Мандел, Я. И. Ханин, Изв. АН СССР, Физика **54**, 1979 (1990); O. Kocharovskaya, P. Mandel, and M. Scully, Phys. Rev. Lett. **74**, 2451 (1995).
4. M. O. Scully and W. E. Lamb, Phys. Rev. A **159**, 208 (1967).
5. Ю. М. Голубев, ЖЭТФ **103**, 832 (1993).