

## ПРОБЛЕМА ДВУХ ЭЛЕКТРОНОВ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ И МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОПТИКЕ

О. Н. Гадомский\*, К. К. Алтунин

Ульяновский государственный университет  
432700, Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 19 марта 1998 г.

Решена задача о взаимодействии двух атомных электронов на произвольном расстоянии друг от друга через поле виртуальных фотонов с излучением или поглощением реального фотона. Взаимодействие рассматривается как эффект третьего порядка квантовой электродинамики в координатном представлении. Исследована роль промежуточных состояний с положительными и отрицательными частотами. Получено общее выражение для матричных элементов оператора эффективной энергии взаимодействия двух электронов для различных типов квантовых переходов, позволяющее вычислять вероятности соответствующих квантовых переходов, а также рассмотреть различные схемы наведения поляризующих полей одним атомом в месте расположения другого. Показано, что обмен виртуальными фотонами между атомами, находящимися на произвольном расстоянии друг от друга, приводит к дополнительным членам в операторах спин-орбитального и спин-спинового взаимодействий атомных электронов по сравнению с соответствующими брейтовскими операторами. Показано принципиальное отличие процессов наведения поляризующих полей в системе атомов от процессов переноса оптических фотонов. Показано, в частности, что при наведении поляризующих полей возможна такая ситуация, в которой исчезновение (рождение) фотона происходит в месте расположения одного из атомов, а поглощение (излучение) будет происходить в месте расположения другого атома. Предлагается принципиальная схема экспериментальной установки для исследования этого свойства поляризующих полей. Предложен метод вывода интегральных полевых уравнений, основанный на учете поляризующих полей, который продемонстрирован на примере электрических дипольных и спиновых переходов в спектре взаимодействующих атомных электронов.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Система взаимодействующих движущихся зарядов может быть рассмотрена в классической электродинамике с помощью запаздывающих потенциалов. Следуя работам Дарвина [1, 2], можно ввести функцию Лагранжа этой системы с точностью до членов  $(v/c)^2$ , где  $v$  — скорость движущихся зарядов,  $c$  — скорость света в вакууме. Именно в этом приближении можно рассматривать систему зарядов самостоятельно без учета поля излучения. Переход к системе взаимодействующих нейтральных атомов с последующим переходом к оператору Гамильтона был осуществлен в работах [3, 4]. Учет влияния поля излучения в такой системе был сделан феноменологически путем простой замены импульсов  $\mathbf{p}_i$  атомных электронов на  $\mathbf{p}_i - (e/c)\mathbf{A}_i$ , где  $i$  — номер частицы,  $e$  — заряд электрона,  $\mathbf{A}_i$  — векторный потенциал поля излучения в месте расположения  $i$ -го

\*E-mail: gadomsky@quant.univ.simbirsk.su

атома. Был получен гамильтониан взаимодействия системы  $N$  атомов с полем излучения, который был успешно применен для объяснения аномальной концентрационной зависимости интенсивности светового эха [5] за счет присутствия наряду с членами  $N^2$  в интенсивности светового эха также членов, пропорциональных  $N^3$  и  $N^4$ .

Следующий шаг в теоретическом исследовании проблемы двух электронов был сделан в работах [6–8] на основе применения уравнения Дирака и метода теории возмущений квантовой электродинамики. Был получен оператор взаимодействия двух электронов через поле виртуальных фотонов как эффект второго порядка теории возмущений. Однако применение оператора Брейта ограничивается не слишком большим расстоянием между электронами. Поэтому к проблеме двух электронов, принадлежащих двум атомам на произвольном расстоянии друг от друга, потребовалось вернуться вновь в начале 70-х годов в связи с интенсивным исследованием многоатомных систем в поле излучения. Так, в работе [9] рассматривалось резонансное взаимодействие двух нейтральных атомов на расстояниях, больших  $2\pi c/\omega_0$ , где  $\omega_0$  — резонансная частота в спектре взаимодействующих атомов. Это взаимодействие рассматривалось как эффект второго порядка квантовой электродинамики без излучения и поглощения реальных фотонов в электрическом дипольном приближении. Резонансное взаимодействие двух водородоподобных атомов на произвольном расстоянии друг от друга как эффект второго порядка квантовой электродинамики с учетом орбитальных и спиновых степеней свободы было рассмотрено в [10]. Нами был получен релятивистский оператор взаимодействия двух электронов с точностью до членов  $1/c^2$ , однако основное внимание при переходе к нерелятивистскому пределу было уделено также только электрическим дипольным переходам.

В работах [11–13] рассматривалось взаимодействие двух электронов как эффект третьего порядка квантовой электродинамики с излучением или поглощением реального фотона при достаточно жестком условии, что взаимодействующие частицы имеют определенные импульсы до и после столкновения. Такая ситуация имеет место при взаимодействии свободных частиц и не годится для изучения квантовых переходов между состояниями атомных электронов, где интегралами движения являются квадрат полного момента импульса и проекция полного момента на ось квантования. В данной статье будет рассмотрена фактически новая задача о взаимодействии двух атомных электронов на произвольном расстоянии друг от друга с излучением (поглощением) реального фотона в координатном представлении с учетом различных типов квантовых переходов и промежуточных состояний.

В работе [14] изучалось взаимодействие двух электронов в гелиеподобном атоме как эффект третьего порядка и учитывались промежуточные состояния с положительной и отрицательной энергией. Была оценена роль промежуточных позитронных состояний в вероятности квантовых переходов с излучением (поглощением) реального фотона.

Следующий шаг в исследовании проблемы двух электронов был сделан в работах [5, 3, 10] для двух водородоподобных атомов на произвольном расстоянии друг от друга, где в электрическом дипольном приближении были получены формулы для электронных и позитронных поляризующих полей.

Как было показано в работе [10], электронное поляризующее поле, рассматриваемое как эффект третьего порядка квантовой электродинамики, является полем окружающих диполей в  $N$ -атомной системе. Суммируя поляризующие поля в такой системе, удастся получить интегральное уравнение распространения световых волн в диэлектрической среде [4]. Это уравнение было успешно использовано нами, а также другими

авторами для решения различных граничных задач классической [15], нелинейной [4] и квантовой оптики [16, 17]. В работе [16] рассматривался эффект ближнего поля.

Данная статья посвящена дальнейшему теоретическому исследованию проблемы двух электронов, принадлежащих двум водородоподобным атомам на произвольном расстоянии друг от друга. Будет получен оператор взаимодействия двух электронов, отвечающий виртуальному обмену фотонами, в котором учтено дополнительное запаздывание в спин-орбитальном и спин-спиновом взаимодействиях двух электронов. В ходе исследования проблемы двух электронов будут рассмотрены различные свойства поляризующих полей в системе двух электронов.

Подробное исследование проблемы двух электронов представляет значительный интерес для вывода новых интегральных уравнений распространения фотонов в среде в соответствии с различными типами квантовых переходов в спектре взаимодействующих атомов. В данной статье в качестве конкретного примера будет дан вывод интегральных уравнений для напряженностей электрического и магнитного полей в дипольной и спиновой средах.

## 2. МАТРИЦА ЭФФЕКТИВНОЙ ЭНЕРГИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ РАССТОЯНИИ ДРУГ ОТ ДРУГА

Диаграммы Фейнмана взаимодействия двух электронов представлены на рис. 1. После интегрирования в  $S$ -матрице по времени, частотам и волновым векторам виртуальных фотонов получим следующую матрицу эффективной энергии взаимодействия двух атомных электронов (здесь  $\hbar = c = 1$ ):

$$\begin{aligned}
 U_{i \rightarrow f}^{(3)} = e^3 \int & \left( d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}''' \left\{ -\frac{1}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''}| \sum_{l \pm} \frac{\exp(i|\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}||\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''|)}{\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_r^{(+)}} \bar{\Psi}_r^{(+)}(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}') \Psi_l(\mathbf{r}') \times \right. \right. \\
 & \times \bar{\Psi}_l(\mathbf{r}'') \gamma_\mu'' \Psi_m^{(+)}(\mathbf{r}'') \bar{\Psi}_p^{(+)}(\mathbf{r}''') \gamma_\mu''' \Psi_n^{(+)}(\mathbf{r}''') - \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''}| \sum_{l \pm} \frac{\exp(i|\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}||\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''|)}{\omega_l(1-i0) - \omega - \omega_m^{(+)}} \times \\
 & \times \bar{\Psi}_r^{(+)}(\mathbf{r}') \gamma_\mu' \Psi_l(\mathbf{r}') \bar{\Psi}_l(\mathbf{r}'') \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}'') \Psi_m^{(+)}(\mathbf{r}'') \bar{\Psi}_m^{(+)}(\mathbf{r}''') \gamma_\mu''' \Psi_n^{(+)}(\mathbf{r}''') - \\
 & - \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''}| \sum_{l \pm} \frac{\exp(i|\omega_r^{(+)} - \omega_m^{(+)}||\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''|)}{\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_p^{(+)}} \bar{\Psi}_r^{(+)}(\mathbf{r}') \gamma_\mu' \Psi_m^{(+)}(\mathbf{r}') \bar{\Psi}_p^{(+)}(\mathbf{r}'') \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}'') \Psi_l(\mathbf{r}'') \times \\
 & \times \bar{\Psi}_l(\mathbf{r}''') \gamma_\mu''' \Psi_n^{(+)}(\mathbf{r}''') - \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''}| \sum_{l \pm} \frac{\exp(i|\omega_r^{(+)} - \omega_m^{(+)}||\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''|)}{\omega_l(1-i0) - \omega - \omega_n^{(+)}} \bar{\Psi}_r^{(+)}(\mathbf{r}') \gamma_\mu' \Psi_m^{(+)}(\mathbf{r}') \times \\
 & \times \bar{\Psi}_p(\mathbf{r}'') \gamma_\mu'' \Psi_l(\mathbf{r}'') \bar{\Psi}_l(\mathbf{r}''') \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}''') \Psi_n^{(+)}(\mathbf{r}''') + \frac{1}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''}| \sum_{l \pm} \frac{\exp(i|\omega_r^{(+)} - \omega_n^{(+)}||\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|)}{\omega_l(1+i0) + \omega - \omega_p^{(+)}} \times \\
 & \times \bar{\Psi}_p^{(+)}(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}') \Psi_l(\mathbf{r}') \bar{\Psi}_l(\mathbf{r}'') \gamma_\mu'' \Psi_m^{(+)}(\mathbf{r}'') \bar{\Psi}_r^{(+)}(\mathbf{r}''') \gamma_\mu''' \Psi_n^{(+)}(\mathbf{r}''') + \\
 & + \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''}| \sum_{l \pm} \frac{\exp(i|\omega_n^{(+)} - \omega_r^{(+)}||\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''|)}{\omega_l(1-i0) - \omega - \omega_m^{(+)}} \bar{\Psi}_p^{(+)}(\mathbf{r}') \gamma_\mu' \Psi_l(\mathbf{r}') \bar{\Psi}_l(\mathbf{r}'') \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}'') \Psi_m^{(+)}(\mathbf{r}'') \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \bar{\Psi}_r^{(+)}(\mathbf{r}''')\gamma_\mu'''\Psi_n^{(+)}(\mathbf{r}''') + \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} \sum_{l_{\pm}} \frac{\exp(i|\omega_p^{(+)} - \omega_m^{(+)}||\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|)}{\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_r^{(+)}} \bar{\Psi}_p^{(+)}(\mathbf{r}')\gamma_\mu'\Psi_m^{(+)}(\mathbf{r}') \times \\
& \times \bar{\Psi}_r^{(+)}(\mathbf{r}')\hat{A}(\mathbf{r}'')\Psi_l(\mathbf{r}'')\bar{\Psi}_l(\mathbf{r}''')\gamma_\mu'''\Psi_n^{(+)}(\mathbf{r}''') + \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} \sum_{l_{\pm}} \frac{\exp(i|\omega_p^{(+)} - \omega_m^{(+)}||\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|)}{\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_r^{(+)}} \times \\
& \times \bar{\Psi}_p^{(+)}(\mathbf{r}')\gamma_\mu'\Psi_m^{(+)}(\mathbf{r}')\bar{\Psi}_r^{(+)}(\mathbf{r}'')\gamma_\mu''\Psi_l(\mathbf{r}'')\bar{\Psi}_l(\mathbf{r}''')\hat{A}(\mathbf{r}''')\Psi_n^{(+)}(\mathbf{r}''') \Bigg\} , \quad (2.1)
\end{aligned}$$

где  $\omega_n^{(+)}$ ,  $\omega_m^{(+)}$  — частоты начальных состояний электронов,  $\omega_p^{(+)}$ ,  $\omega_r^{(+)}$  — частоты их конечных состояний,  $\Psi_{m(n)}^{(+)}$  — решения уравнения Дирака для электрона с положительной частотой,  $\bar{\Psi}_{p(r)}^{(+)} = \Psi_{p(r)}^{(+)*}\gamma_4$ ,  $\Psi_{p(r)}^{(+)*}$  — сопряженная волновая функция,  $\gamma_4 = \beta$ ,  $\gamma_j = -i\beta\alpha_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ),  $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma$  — матрицы Паули. Штриховые индексы, сопровождающие радиус-векторы  $\mathbf{r}$  и  $\gamma$ -матрицы, соответствуют различным волновым функциям взаимодействующих частиц. При этом  $\gamma$ -матрицы с различными штриховыми индексами коммутируют между собой. Суммирование в (2.1) проводится по всем промежуточным состояниям  $l_{\pm}$  с положительными и отрицательными частотами. Состояния электрона с отрицательными частотами будем рассматривать как позитронные состояния, не переходя к волновой функции позитрона, содержащей преобразование зарядового сопряжения. Это связано с тем, что суперпозиция состояний с противоположными знаками заряда не может образовать общего решения уравнения Дирака [13]. В данной статье будет использовано следующее решение:

$$\Psi = \sum_r a_r \psi_r^{(+)} + \sum_r b_r^+ \psi_r^{(-)}, \quad \bar{\Psi} = \sum_r a_r^+ \bar{\psi}_r^{(+)} + \sum_r b_r \bar{\psi}_r^{(-)}, \quad (2.1a)$$

где  $a_r$ ,  $a_r^+$ ,  $b_r$ ,  $b_r^+$  — операторы вторичного квантования электрон-позитронного поля. Переход от  $S_{i \rightarrow f}^{(3)}$  к матрице эффективной энергии взаимодействия (2.1) проведен с помощью равенства

$$S_{i \rightarrow f}^{(3)} = -2\pi i U_{i \rightarrow f}^{(3)} \delta(\omega_r^{(+)} - \omega_m^{(+)} - \omega + \omega_p^{(+)} - \omega_n^{(+)}), \quad (2.2)$$

где знак перед частотой оптического фотона  $\omega$  указывает на то, что в операторе векторного потенциала  $\hat{A} = \sum \gamma_\mu A_\mu$  выделена отрицательно-частотная часть, пропорциональная оператору уничтожения фотона данной моды.

### Обмен виртуальными фотонами

Рассмотрим первое слагаемое в (2.1) и выделим в этом слагаемом множитель, отвечающий за обмен виртуальными фотонами между двумя электронами. Представим расстояние между электронами следующим образом:

$$|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''| \approx a \left( 1 + \frac{a\Delta\xi}{a^2} + \frac{M_1}{a} \right), \quad (2.3)$$

где  $a = |\mathbf{a}'' - \mathbf{a}'''|$  — расстояние между атомами,  $\Delta\xi = \xi'' - \xi'''$ ,  $\xi''$  и  $\xi'''$  — смещения электронов в атомах относительно своих ядер,  $M_1 = M_1(a, \Delta\xi)$  — поправочные члены, включающие в себя более высокие степени отношения  $\Delta\xi/a$ .

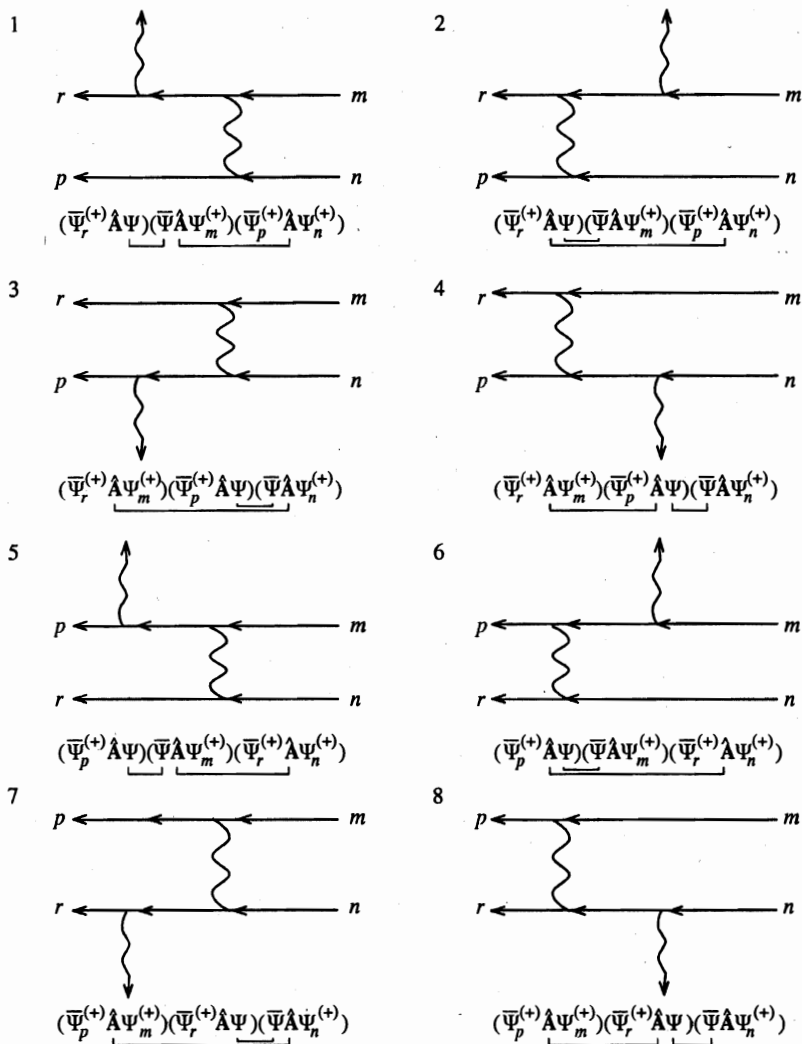


Рис. 1. Диаграммы Фейнмана  $e^-e^-$ -взаимодействия двух атомов с излучением или поглощением фотона

Перейдем в систему единиц, в которой  $c \neq 1$ , и предположим, что

$$\frac{1}{c} |\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}| \frac{a \Delta \xi}{a} \ll 1. \quad (2.4)$$

При этом расстояние между ядрами может изменяться в широких пределах:  $|\Delta \xi| \leq a \leq \infty$ . Тогда получим, что

$$\frac{1}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|} \exp\left(\frac{i}{c} |\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}| |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|\right) = \frac{1}{a} \exp\left(\frac{i}{c} |\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}| a\right) \left[1 + \frac{a \Delta \xi}{a^2} + \frac{M_1}{a}\right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{i}{c} |\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}| \left[ \frac{a\Delta\xi}{a} + M_1 \right] - \frac{1}{2c^2} (\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)})^2 \left[ \frac{a\Delta\xi}{a} + \frac{M_1}{a} \right]^2 \right\}. \quad (2.3')$$

Исключим частоты в выражении (2.3'), используя уравнения

$$H''' \psi_n^{(+)}(\mathbf{r}''') = \omega_n^{(+)} \psi_n^{(+)}(\mathbf{r}''').$$

Тогда получим, что имеет место следующее преобразование:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|} \exp \left( \frac{i}{c} |\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}| |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''| \right) \rightarrow \frac{1}{a} \exp \left( \frac{i}{c} |\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}| a \right) \left\{ \left[ 1 + \frac{a\Delta\xi}{a^2} + \frac{M_1}{a} \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \frac{i}{c} [f_1, H'''] + \frac{1}{2c^2} [H'', [H''', f_2]] \frac{\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}}{\omega_l - \omega_m^{(+)}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где введены обозначения

$$f_1 = a - \frac{a^2}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|}, \quad f_2 = a|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''| + \frac{a^3}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|} - 2a^2. \quad (2.6)$$

Как видно из (2.3'), в нашем рассмотрении наряду с разложением по степеням  $1/c$  применяется разложение по малому параметру  $\Delta\xi/a$ . При этом в разложении по степеням  $1/c$  мы ограничиваемся квадратичными по  $1/c$  членами, а в разложении по малому параметру  $\Delta\xi/a$  каких-либо ограничений нет, так как функция  $M_1$  содержит все высшие поправочные члены. В этом легко убедиться, подставляя в (2.6) разложение (2.3) и сравнивая (2.5) с (2.3'). Таким образом, все последующее рассмотрение учитывает взаимодействие двух атомных электронов произвольной мультипольности.

Операторы Гамильтона отдельных атомов с неподвижными ядрами имеют вид

$$H'' = c\alpha'' \mathbf{p}'' + \gamma_4'' mc^2 - \frac{Z_1 e^2}{\xi''}, \quad H''' = c\alpha''' \mathbf{p}''' + \gamma_4''' mc^2 - \frac{Z_2 e^2}{\xi'''}, \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{p}'', \mathbf{p}'''$  — операторы импульса электронов,  $Z_1, Z_2$  — заряды точечных ядер. Очевидно, что в операторы (2.7) можно ввести и другие члены, определяющие, например, неточность ядра (остова) атома, спин ядра и т.д. Вычислим коммутаторы в (2.5), полагая, что ядра атомов неподвижны. Тогда при  $\hbar \neq 1$  имеем

$$\begin{aligned} [f_1, H'''] &= -i\hbar c a^2 \frac{\alpha'' \mathbf{n}}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|^2}, \\ [H'', [H''', f_2]] &= a c^2 [\alpha'' \mathbf{p}'', [\alpha''' \mathbf{p}''', |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|]] + a^3 c^2 \left[ \alpha'' \mathbf{p}'', \left[ \alpha''' \mathbf{p}''', \frac{1}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|} \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Таким образом, оператор, описывающий обмен виртуальными фотонами в матрице (2.1), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} B_{ll}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}''') &= e^2 \exp \left( \frac{i}{c} |\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}| a \right) \left\{ \frac{1 - \alpha'' \alpha'''}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|} + a \frac{\alpha'' \mathbf{n}}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} R_{ll} \left( \frac{\alpha'' \alpha''' - (\alpha'' \mathbf{n})(\alpha''' \mathbf{n})}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|} - a^2 \frac{\alpha'' \alpha''' - 3(\alpha'' \mathbf{n})(\alpha''' \mathbf{n})}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|^3} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $R_{ll} = (\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)})/(\omega_l - \omega_m^{(+)})$ ,  $\mathbf{n} = (\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''')/|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|$ . В частном случае резонансного обмена фотонами имеем  $R_{ll} = 1$  и оператор (2.8) переходит в соответствующий оператор [4]. При  $a \rightarrow 0$  и  $R_{ll} = 1$  оператор (2.9) совпадает с оператором Брейта [13].

Рассмотрим физический смысл разложения (2.5). В системе зарядов с непрерывным энергетическим спектром при получении функции Лагранжа с точностью до  $(v/c)^2$  [2] используется единый временной масштаб  $R/c$ , где  $R$  — расстояние между зарядами. Это время представляет собой время передачи взаимодействия между зарядами, и разложение запаздывающих потенциалов по степеням  $R/c$  возможно, если предположить, что распределение зарядов не успевает заметно измениться за время  $R/c$ . Очевидно, что это условие является очень жестким, если рассматриваются протяженные системы. При выводе оператора Брейта [13] в системе двух электронов с дискретным энергетическим спектром в качестве параметра разложения использовалась величина  $\omega_0 r/c \ll 1$ , где  $\omega_0$  — характерная частота в спектре взаимодействующих электронов,  $r$  — расстояние между электронами. Таким образом, наряду со временем передачи взаимодействия  $T_e = r/c$  использовалось также характерное время  $T_a = 2\pi/\omega_0$ . При этом  $2\pi T_e \ll T_a$ , т. е. заметное изменение электронной плотности в системе двух взаимодействующих движущихся электронов происходит за время передачи взаимодействия. Очевидно, что это условие выполнено для не слишком больших расстояний между электронами, например, внутриатомных расстояний в гелиеподобных атомах. Разложение (2.5) справедливо для двух атомных электронов, находящихся на произвольно больших расстояниях, поскольку в качестве параметра разложения выбрана величина (2.4). При этом время передачи взаимодействия  $T_e = a/c$  значительно больше характерного внутриатомного временного масштаба  $T_a$ . Это приводит к дополнительному запаздыванию во взаимодействии электронов, что описывается дополнительными членами в операторе (2.9).

Известно, что характерные частоты атомных электронов находятся в диапазоне от нескольких мегагерц до  $10^9$  МГц, если принимать во внимание тонкое и сверхтонкое расщепления атомных уровней, а также оптические переходы. В связи с этим возникает вопрос о выборе характерного внутриатомного масштаба времени  $T_a$ . Очевидно, что для полного учета эффекта запаздывания во взаимодействии электронов необходимо в качестве характерных частот выбирать наибольшие частоты в спектре взаимодействующих электронов, т. е. оптические частоты. Как будет показано ниже, оператор (2.9) соответствует различным типам взаимодействия двух электронов, и наличие единого временного масштаба  $T_a$  объясняет тот факт, что, например, в спин-спиновом взаимодействии электронов появляются дополнительные по сравнению с [13] запаздывающие члены, хотя спиновые переходы соответствуют радиочастотному диапазону.

Рассмотрим теперь остальные члены матрицы (2.1), соответствующие остальным диаграммам Фейнмана (рис. 1). Используя ту же процедуру перехода от частот к операторам, получим операторы  $B_{sl}$  ( $s = 2, 3, \dots, 8$ ), аналогичные оператору  $B_{ll}$ . При этом операторы  $B_{sl}$  будут содержать различные коэффициенты, определяющие разность начальных, конечных и промежуточных частот, а также различные факторы запаздывания в соответствии с расположением волновых функций в (2.1).

Эффекты третьего порядка для фейнмановских диаграмм (рис. 1) проходят с выполнением закона сохранения (2.2). Для излучения реального фотона знак перед частотой  $\omega$  в (2.2) следует заменить на противоположный. Таким образом, для энергий взаимодействующих электронов имеем

$$E_r^{(+)} - E_m^{(+)} + E_p^{(+)} - E_n^{(+)} \pm \hbar\omega = 0. \quad (2.10)$$

В соответствии с этим законом сохранения можно выделить некоторые схемы квантовых переходов. Для этого возьмем два некоторых состояния, например  $p$  и  $n$ , в спектре взаимодействующих атомов и предположим, что их начальные состояния  $n$  и  $m$  одинаковы.

**Схема А.** Обмен виртуальными фотонами с частотой  $\omega'' = \omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}$  приводит к переходу одного из атомов (например, первого атома) в промежуточное состояние  $\omega_l$ , а затем в исходное состояние  $E_m^{(+)}$ , т. е.  $E_r^{(+)} = E_m^{(+)}$ . При этом второй атом меняет свое квантовое состояние,  $E_n^{(+)} \rightarrow E_p^{(+)}$ , и в результате в системе из двух атомов испускается или поглощается один фотон. Фактор запаздывания для этого типа взаимодействия равен  $\exp\{(i/c)|\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}|a\}$ . Местоположение акта излучения (поглощения) реального фотона может не совпадать с местоположением атома, совершающего квантовый переход  $E_n^{(+)} \rightarrow E_p^{(+)}$ . Такая схема квантовых переходов соответствует диаграммам 1, 2 и 7, 8 на рис. 1.

**Схема В.** Для диаграмм 1–8 возможны переходы, в результате которых излучается или поглощается фотон удвоенной энергии. При этом оба атома меняют свои квантовые состояния, т. е. в этом случае  $E_r^{(+)} \neq E_m^{(+)}$  и  $E_p^{(+)} \neq E_n^{(+)}$ .

**Схема С.** При  $E_r^{(+)} = E_m^{(+)}$ , когда свое квантовое состояние меняет лишь один из атомов с излучением или поглощением реального фотона с энергией  $\hbar\omega = |E_p^{(+)} - E_n^{(+)}|$ , возможно взаимодействие с фактором запаздывания, равным единице. Такими свойствами обладают диаграммы 3–6.

Природа квантовых переходов в схемах А, В и С определяется свойствами операторов  $B_{sl}$  и  $\hat{A}$ , а также волновых функций и значений энергии атомных электронов.

### 3. ПЕРЕХОД К ДВУХКОМПОНЕНТНЫМ ВОЛНОВЫМ ФУНКЦИЯМ

#### Обмен виртуальными фотонами

Переход к двухкомпонентным волновым функциям  $\Phi_n^{(+)}$  осуществляется с помощью следующих преобразований [13]:

$$\Psi_n^{(+)} = \begin{pmatrix} \varphi_n^{(+)} \\ \frac{\sigma \mathbf{p}}{2mc} \varphi_n^{(+)} \end{pmatrix}, \quad \varphi_n^{(+)} = \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2c^2}\right) \Phi_n^{(+)}. \quad (3.1)$$

Применим эти преобразования для вычисления матричного элемента

$$\langle \Psi_l^*(\mathbf{r}'') \Psi_p^{(+)*}(\mathbf{r}''') | B_{ll} | \Psi_m^{(+)}(\mathbf{r}'') \Psi_n^{(+)}(\mathbf{r}''') \rangle, \quad (3.2)$$

входящего в первое слагаемое матрицы (2.1).

Рассмотрим матричный элемент оператора  $1/|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|$  в (2.9). В качестве промежуточных состояний выберем в (3.2) состояния с положительной энергией. Тогда, применяя (3.1), получим следующее выражение:



$$\begin{aligned}
& e^2 \exp \left( \frac{i}{c} |\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}| a \right) \int \left\{ \Phi_l^{(+)*}(\mathbf{r}'') \Phi_p^{(+)*}(\mathbf{r}''') \Phi_m^{(+)}(\mathbf{r}'') \Phi_n^{(+)}(\mathbf{r}''') - \right. \\
& - \frac{1}{8m^2 c^2} \Phi_l^{(+)*}(\mathbf{r}'') \Phi_p^{(+)*}(\mathbf{r}''') \Phi_m^{(+)}(\mathbf{r}'') \left[ p''^2 \Phi_n^{(+)}(\mathbf{r}''') \right] - \\
& - \frac{1}{8m^2 c^2} \Phi_l^{(+)*}(\mathbf{r}'') \Phi_p^{(+)*}(\mathbf{r}''') \Phi_n^{(+)}(\mathbf{r}'') \left[ p''^2 \Phi_m^{(+)}(\mathbf{r}''') \right] + \\
& + \frac{1}{8m^2 c^2} \Phi_l^{(+)*}(\mathbf{r}'') \left[ p''^2 \Phi_p^{(+)}(\mathbf{r}''') \right]^* \Phi_m^{(+)}(\mathbf{r}'') \Phi_n^{(+)}(\mathbf{r}''') + \\
& \left. + \frac{1}{8m^2 c^2} \left[ p''^2 \Phi_n^{(+)}(\mathbf{r}''') \right]^* \Phi_p^{(+)}(\mathbf{r}''') \Phi_m^{(+)}(\mathbf{r}'') \Phi_n^{(+)}(\mathbf{r}''') \right\} \frac{d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|}, \quad (3.3)
\end{aligned}$$

где отброшены члены, содержащие  $1/c$  в более чем второй степени. Преобразуем выражение (3.3) так, чтобы оно приняло вид

$$\int \Phi_l^{(+)*}(\mathbf{r}'') \Phi_p^{(+)*}(\mathbf{r}''') V_1^{(+)} \Phi_m^{(+)}(\mathbf{r}'') \Phi_n^{(+)}(\mathbf{r}''') = \left( V_1^{(+)} \right)_{lp, mn}, \quad (3.4)$$

и найдем при этом явный вид оператора  $V_1^{(+)}$ . Для преобразования (3.3) к виду (3.4) необходимо интегрировать по частям. Расположим начало системы координат в точке  $a''$ , полагая, что координаты  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$  относятся к первому атому, а координаты  $\mathbf{r}'''$  — ко второму. Учтем, что волновые функции атомов не перекрываются и обращаются в нуль на бесконечности. Это означает, что в отличие от случая, рассмотренного в [13], степени величин  $1/|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|$  не обращаются в бесконечность при изменении  $\mathbf{r}''$  и  $\mathbf{r}'''$  в пределах размеров взаимодействующих атомов. С учетом сделанных замечаний получим следующий оператор:

$$V_1^{(+)} = e^2 \exp \left( \frac{i}{c} |\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}| a \right) \frac{1}{r}, \quad r = |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|. \quad (3.5)$$

Этот оператор есть аналог кулоновского взаимодействия электронов на произвольном расстоянии друг от друга. При  $a \rightarrow 0$  этот член превращается в обычное кулоновское взаимодействие электронов.

Рассмотрим теперь матричный элемент от остальных членов оператора  $B_{1l}$  с помощью двухкомпонентных волновых функций  $\Phi_n^{(+)}$ . Подставляя волновые функции (3.1) в матрицу (2.1) и перемножая матрицы в подынтегральном выражении, получим, что во всех получающихся членах достаточно заменить  $\varphi$  на  $\Phi$ , так как они уже содержат множитель  $1/c^2$ . Проведем преобразования, аналогичные тем, которые были использованы при получении оператора (3.5). При этом можно выделить операторы, содержащие разные степени  $1/r$ .

Оператор, пропорциональный  $1/r^3$ , имеет вид

$$\begin{aligned}
V_{2l}^{(+)} = & \exp \left( \frac{i}{c} |\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}| a \right) \frac{e^2 \hbar^2}{4m^2 c^2} \left\{ \frac{1}{r^3} [\sigma'' \sigma''' - 3(\sigma'' \mathbf{n})(\sigma''' \mathbf{n})] + \right. \\
& \left. + R_{1l} \frac{a^2}{r^5} [15(\sigma'' \mathbf{n})(\sigma''' \mathbf{n}) - 9\sigma'' \sigma'''] \right\}. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

При  $a \rightarrow 0$  оператор (3.6) переходит в оператор спин-спинового взаимодействия двух электронов [13]. Для электронов, находящихся на произвольном расстоянии друг

от друга, согласно условию (2.4), возникает дополнительное запаздывание, которое определяется фактором запаздывания  $\exp\{(i/c)|\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}|a\}$ , а также дополнительными членами в (3.6). В частном случае резонансного взаимодействия двух электронов без излучения или поглощения фотона  $R_{1l} = 1$ .

Оператор, пропорциональный  $1/r$ , после необходимых преобразований примет следующий вид:

$$V_{3l}^{(+)} = e^2 \exp\left(\frac{i}{c}|\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}|a\right) \frac{1}{m^2 c^2} \left\{ \left(\frac{1}{2}R_{1l} - 1\right) \frac{1}{r} \mathbf{p}'' \mathbf{p}''' - \frac{1}{2}R_{1l} \frac{1}{r} \mathbf{n}(\mathbf{np}'') \mathbf{p}''' - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}R_{1l} \frac{a^2}{r^3} [\mathbf{p}'' \mathbf{p}''' - 3\mathbf{n}(\mathbf{np}'') \mathbf{p}'''] \right\} + e^2 \exp\left(\frac{i}{c}|\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}|a\right) \frac{a}{mc} \frac{1}{r^2} \mathbf{np}''. \quad (3.7)$$

При  $a \rightarrow 0$  и  $R_{1l} = 1$  оператор (3.7) переходит в соответствующий оператор запаздывающего взаимодействия двух электронов в гелиеподобном атоме [13]. Поэтому оператор (3.7) будем называть оператором запаздывающего взаимодействия двух электронов на произвольном расстоянии друг от друга. При  $R_{1l} = 1$  (резонансное взаимодействие двух электронов) оператор (3.7) можно получить из классической функции Гамильтона системы атомов, заменяя импульсы электронов на соответствующие операторы импульсов [4]. Члены, пропорциональные  $1/r^2$ , в матричных элементах оператора  $B_{1l}$  имеют вид

$$V_{4l}^{(+)} = \exp\left(\frac{i}{c}|\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}|a\right) \frac{e^2 \hbar}{4m^2 c^2} \left\{ \left(\frac{1}{2}R_{1l} - 1\right) \frac{1}{r^2} (2\sigma''[\mathbf{np}'''] - 2\sigma'''[\mathbf{np}'']) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}R_{1l} \frac{1}{r^2} (2\sigma''[\mathbf{np}''] + 2\sigma'''[\mathbf{np}'''] - 2\sigma''[\mathbf{np}'] - 2\sigma'''[\mathbf{np}''']) + 3R_{1l} \frac{a^2}{r^4} \sigma''[\mathbf{np}''] \right\}. \quad (3.8)$$

При  $a \rightarrow 0$  и  $R_{1l} = 1$  оператор (3.8) переходит в соответствующий оператор спин-орбитального взаимодействия двух электронов в операторе Брейта [13]. Поэтому оператор (3.8) будем называть оператором спин-орбитального запаздывания двух атомных электронов, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга.

### Электрическое диполь-дипольное взаимодействие атомов на произвольном расстоянии друг от друга

Рассмотрим взаимодействие двух электронов через поле виртуальных фотонов, учитывая только орбитальные степени свободы. Этой части взаимодействия соответствует оператор  $V_{1l}^{(+)} + V_{3l}^{(+)}$ . Как было отмечено выше, вывод оператора взаимодействия двух атомов учитывает переходы в спектре атомов произвольной мультипольности. Учитывая лишь линейные по смещениям  $\xi''$  и  $\xi'''$  члены в разложении функций  $1/r$  и  $1/r^2$ , получим следующий оператор:

$$V_{1l}^{(+)} + V_{3l}^{(+)} = \exp\left(\frac{i}{c}|\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}|a\right) \left\{ \frac{\mathbf{d}'' \mathbf{d}''' - 3(\mathbf{nd}'')(\mathbf{nd}''')}{a^3} + \right. \\ \left. + \frac{e}{mc} \frac{\mathbf{d}''' \mathbf{p}'' - 3(\mathbf{nd}''')(\mathbf{np}'')}{a^2} + \frac{e^2}{m^2 c^2} \left[ \left(\frac{1}{2}R_{1l} - 1\right) \frac{\mathbf{p}'' \mathbf{p}'''}{a} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2}R_{1l} \frac{(\mathbf{np}'')(\mathbf{np}''')}{a} - \frac{1}{2}R_{1l} \frac{\mathbf{p}'' \mathbf{p}''' - 3(\mathbf{np}'')(\mathbf{np}''')}{a} \right] \right\}, \quad (3.9)$$

где  $\mathbf{p} = \mathbf{a}/a$  и  $\mathbf{d}'' = e\xi''$ ,  $\mathbf{d}''' = e\xi'''$  — операторы электрических дипольных моментов отдельных атомов. Оператор (3.9) представляет собой оператор электрического диполь-дипольного взаимодействия двух нейтральных атомов на произвольном расстоянии друг от друга при переходе одного из атомов в некоторое промежуточное состояние, когда взаимодействие (3.9) является составной частью процесса излучения или поглощения реального фотона. В частном случае взаимодействия двух атомов без излучения или поглощения реального фотона оператор (3.9) соответствует эффекту второго порядка квантовой электродинамики, для которого выполняется закон сохранения энергии

$$E_r^{(+)} - E_m^{(+)} + E_p^{(+)} - E_n^{(+)} = 0.$$

В этом случае в операторе (3.9) следует положить  $R_{ll} = 1$  и оператор (3.9) переходит в соответствующий оператор из [13].

#### 4. РОЛЬ ВНЕШНЕГО ПОЛЯ ВО ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ АТОМНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Применим преобразование (3.1) для перехода от волновых функций  $\Psi$  к двухкомпонентным волновым функциям  $\Phi$  в матричных элементах типа

$$\langle \bar{\Psi}_r^{(+)}(\mathbf{r}') | e\hat{A}'(\mathbf{r}') | \Psi_l(\mathbf{r}') \rangle, \quad (4.1)$$

входящих в матрицу (2.1). Матричные элементы (4.1) от оператора векторного потенциала внешнего поля определяют взаимодействие двух атомных электронов с полем реальных фотонов. Рассмотрим вначале матричные элементы (4.1) для переходов атомных электронов через промежуточные состояния с положительными энергиями. После необходимых преобразований в матричном элементе (4.1) для перехода атома из состояния  $\Phi_l^{(+)}(\mathbf{r}')$  в состояние  $\Phi_r^{(+)}(\mathbf{r}')$  выделим следующий оператор перехода:

$$R_1^+ = eA'_4(\mathbf{r}'). \quad (4.2)$$

Члены, пропорциональные  $1/c$ , имеют вид

$$R_2^+ = -\frac{ie}{2mc}(\mathbf{p}'A') - \frac{ie}{2mc}(A'\mathbf{p}') - \frac{i\hbar e}{2mc}(\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{H}'), \quad (4.3)$$

где  $A'(\mathbf{r}')$  — оператор векторного потенциала внешнего поля в месте расположения электрона с радиус-вектором  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{H}'(\mathbf{r}')$  — соответствующий оператор напряженности магнитного поля ( $[\nabla'A'] = \mathbf{H}'$ ).

Оператор  $R_3^+$ , содержащий  $1/c$  во второй степени, имеет вид

$$R_3^+ = -\frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\Delta'A'_4 - \frac{i\hbar e}{4m^2c^2}\nabla'A'_4\mathbf{p}' + \frac{e}{4m^2c^2}(\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{p}')A'_4(\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{p}'). \quad (4.4)$$

Члены, пропорциональные  $1/c^3$  в операторе перехода, имеют следующий вид:

$$R_4^+ = \frac{e}{16m^3c^3} \left\{ i(\boldsymbol{\sigma}'A')(\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{p}')\mathbf{p}'^2 - i\mathbf{p}'^2(\boldsymbol{\sigma}'A')(\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{p}') + \hbar \sum_{\alpha} \sigma'_{\alpha} \left( \boldsymbol{\sigma}' \frac{\partial A'}{\partial x'_{\alpha}} \right) \mathbf{p}'^2 + \right. \\ \left. + i\boldsymbol{\sigma}'(\boldsymbol{\sigma}'A')\mathbf{p}'^3 - \hbar \sum_{\alpha} \sigma'_{\alpha} \mathbf{p}'^2 \left( \boldsymbol{\sigma}' \frac{\partial A'}{\partial x'_{\alpha}} \right) - i\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{p}'^2(\boldsymbol{\sigma}'A')\mathbf{p}' \right\}, \quad (4.5)$$

где  $\alpha = x, y, z$ .

Каждый из полученных операторов перехода может вызвать квантовый переход атомного электрона из некоторого промежуточного состояния  $\Phi_i^{(+)}$  в конечное состояние  $\Phi_r^{(+)}$ , если атомный электрон оказался в промежуточном состоянии благодаря обмену виртуальными фотонами с электроном из другого атома. При этом квантованное внешнее поле излучения имеет потенциал  $A'_4$  равный нулю. Для внешнего постоянного поля член (4.2) отличен от нуля, и в этом случае взаимодействие электронов из двух разных атомов через поле виртуальных фотонов происходит с выполнением следующего закона сохранения:

$$E_r^{(+)} - E_m^{(+)} + E_p^{(+)} - E_n^{(+)} = 0.$$

#### 4.1. Учет промежуточных состояний с отрицательной энергией

В матрице эффективной энергии взаимодействия (2.1) содержится суммирование по промежуточным состояниям взаимодействующих электронов с отрицательными энергиями. Это означает, что в энергии взаимодействия двух электронов присутствует часть, обусловленная влиянием позитронных состояний в спектре взаимодействующих электронов. Это влияние входит косвенным образом через промежуточные виртуальные состояния электронов. При этом начальные и конечные состояния являются электронными состояниями с положительной энергией.

Учет позитронных промежуточных состояний может быть проведен при переходе к двухкомпонентным волновым функциям в (2.1) с использованием волновых функций вида

$$\Psi_i^{(-)} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma \mathbf{p}}{2mc} \chi_i^{(-)} \\ \chi_i^{(-)} \end{pmatrix}, \quad \chi_i^{(-)} = \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2c^2}\right) \Phi_i^{(-)}. \quad (4.6)$$

При этом, также как и в [17], можно не переходить к волновой функции позитрона, содержащей преобразование зарядового сопряжения [13].

Однако выберем другой путь учета промежуточных позитронных состояний, основанный на следующих очевидных условиях. Во-первых, энергия фотонов значительно меньше энергии поля электронов, и энергии электронов мало отличаются от их энергии покоя. Следовательно, в (2.1) положим, что

$$\hbar [\omega_l(1 - i0) + \omega - \omega_r^{(+)}] \approx -2mc^2$$

и т. д. Во-вторых, введем проекционные операторы

$$\Lambda'_- = \frac{mc^2 - H'}{2mc^2}, \quad \Lambda''_- = \frac{mc^2 - H''}{2mc^2}, \quad (4.8)$$

обладающие следующими свойствами:

$$\Lambda'_- \Psi_l(\mathbf{r}') = \Psi_l^{(-)}(\mathbf{r}'), \quad \Lambda''_- \Psi_l(\mathbf{r}'') = \Psi_l^{(-)}(\mathbf{r}''). \quad (4.9)$$

Тогда, применяя преобразование из разд. 2, выделим в первом и втором слагаемых матрицы (2.1) следующий оператор:

$$P_{11}^+ = \frac{e}{2mc^2} (\gamma'_4 \gamma'_6 A'_6 \Lambda'_- B_{11} + B_{21} \Lambda''_- \gamma''_4 \gamma''_6 A''_6), \quad (4.10)$$

где  $\delta = 1, 2, 3, 4$ ,  $a'_g$  — 4-оператор векторного потенциала внешнего поля в месте расположения электрона с радиус-вектором  $\mathbf{r}'$ . Аналогичным образом можно попарно объединить и остальные члены матрицы (2.1).

Преобразуем теперь оператор (4.10), применяя волновые функции (3.1) для электронных начальных и конечных состояний. Величины  $R_{1l}$  и  $R_{2l}$  уже содержат множитель  $1/2mc^2$ , поэтому операторы  $B_{1l}$  и  $B_{2l}$  имеют усеченный вид. Перемножим операторы в (4.10) в матричном виде и двухкомпонентные волновые функции взаимодействующих электронов, оставляя члены, пропорциональные  $1/c$ . Выполняя интегрирование по частям там, где это необходимо, получим следующий оператор (4.10):

$$P_1^+ = \frac{e^3}{2mc^2} \exp\left(\frac{i}{c} |\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}| a\right) \left\{ -\frac{i\hbar}{2mc} \frac{a}{r^2} (\sigma'' \mathbf{n}) \sum_{\alpha} \sigma'_{\alpha} \frac{\partial A'_4}{\partial x'_{\alpha}} - \frac{1}{2mc} (\sigma' \mathbf{p}') (\sigma'' \mathbf{n}) \frac{a}{r^2} A'_4 + \right. \\ + \frac{i\hbar}{4m^2 c^2} (\sigma' A') (\sigma'' \mathbf{p}'') \frac{1}{r} (\sigma' A') \sigma'' \sum_{\alpha} \sigma'''_{\alpha} \sigma''' \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x'''_{\alpha}} + \frac{n_{\alpha}}{r^2} \right) - i (\sigma' A') (\sigma'' \mathbf{n}) \frac{a}{r^2} + \\ + \frac{i}{2mc} (\sigma' A') (\sigma'' \sigma''') (\sigma''' \mathbf{p}''') \frac{1}{r} + \frac{i}{2mc} (\sigma' A') (\sigma' \mathbf{p}') \frac{1}{r} + \frac{1}{2mc} (\sigma' \mathbf{n}) (\sigma'' \mathbf{p}'') \frac{a}{r^2} A'' - \\ - \frac{1}{2mc} \frac{a}{r^2} (\sigma' \mathbf{n}) (\sigma'' \mathbf{p}'') A''_4 + \frac{\hbar}{2mc} \sum_{\alpha} (\sigma'' A'') \sigma'_{\alpha} \frac{n_{\alpha}}{r^2} + \frac{i}{2mc} \frac{1}{r} (\sigma'' \mathbf{p}'') (\sigma'' A'') + \\ \left. + \frac{i}{2mc} \frac{1}{r} \sigma' (\sigma'' A'') \sigma''' (\sigma''' \mathbf{p}''') - i \frac{a}{r^2} (\sigma' \mathbf{n}) (\sigma'' A'') \right\}, \quad (4.11)$$

где операторы  $\sigma'$ ,  $\sigma''$  действуют на спинорные волновые функции электрона первого атома, а оператор  $\sigma'''$  — на спинорные функции электрона второго атома.

Применим следующие тождества:

$$\sigma''' (\sigma''' \mathbf{p}''') = -(\sigma''' \mathbf{p}''') \sigma''' + \mathbf{p}''', \quad \sigma''' \mathbf{p}''' \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \sigma''' \mathbf{p}''' - i\hbar \frac{n \sigma'''}{r^2}, \\ (\sigma'' A'') (\sigma'' \sigma''') (\sigma''' \mathbf{p}''') = A'' \mathbf{p}''' + i \sigma''' [A'' \mathbf{p}'''] - i \mathbf{p}''' [A'' \sigma'''] + \\ + \sum_{\alpha \neq \beta} \sigma''_{\alpha} \sigma'''_{\alpha} A''_{\beta} p'''_{\beta} - \sum_{\alpha \neq \beta} \sigma''_{\alpha} p'''_{\alpha} A''_{\beta} \sigma'''_{\beta}. \quad (4.12)$$

Предположим, что взаимодействие двух атомных электронов происходит в переменном внешнем поле и оператор векторного потенциала  $A$  удовлетворяет условию Лоренца:  $\partial A_{\mu} / \partial x_{\mu} = 0$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ). В этом случае можно положить [13]

$$A'_4 = 0, \quad \frac{\partial A'_4}{\partial x_{\alpha}} = 0. \quad (4.13)$$

Тогда оператор (4.11) примет следующий вид:

$$P_1^+ = \frac{e^3}{2mc^2} \exp\left(\frac{i}{c} |\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}| a\right) \left\{ -2i A'' \mathbf{n} \frac{a}{r^2} + 2\sigma'' [A'' \mathbf{n}] \frac{a}{r^2} + \frac{\hbar}{mc} A'' \mathbf{n} \frac{1}{r^2} + \right. \\ + \frac{i\hbar}{mc} \sigma'' [A'' \mathbf{n}] \frac{1}{r^2} + \frac{i}{2mc} \frac{1}{r} \mathbf{p}'' A'' - \frac{1}{2mc} \frac{1}{r} \sigma'' [\mathbf{p}'' A''] + \frac{i}{mc} \frac{1}{r} A'' \mathbf{p}''' - \\ \left. - \frac{i}{2mc} \frac{1}{r} \left( \sum_{\alpha \neq \beta} \sigma''_{\alpha} p'''_{\alpha} A''_{\beta} p'''_{\beta} - \sum_{\alpha \neq \beta} \sigma''_{\alpha} p'''_{\alpha} A''_{\beta} \sigma'''_{\beta} \right) \right\}. \quad (4.14)$$

Аналогичным образом преобразуем остальные слагаемые матрицы (2.1) и соответствующие операторы для промежуточных состояний с отрицательными энергиями, обозначим их через  $P_2^+$ ,  $P_3^+$  и  $P_4^+$ . Физический смысл этих операторов обсудим ниже.

#### 4.2. Промежуточные состояния с положительными энергиями

Рассмотрим в матрице эффективной энергии взаимодействия суммирование по промежуточным состояниям с положительной энергией, т. е. по электронным состояниям  $l_+$ . Применим те преобразования матричных элементов, которые были проделаны в разд. 3 и 4 с использованием приближенных волновых функций (3.1). Тогда первые два члена матрицы (2.1), соответствующие диаграммам 1 и 2 на рис. 1, с одинаковым фактором запаздывания  $\exp\{(i/c)|\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}|a\}$ , примут следующий вид:

$$A_{i \rightarrow f}^{(3)} = \sum_{s,s'} \sum_{l_+} \left\{ \frac{\langle \Phi_r^{(+)} | R_s^{(+)} | \Phi_l^{(+)} \rangle \langle \Phi_l^{(+)} \Phi_p^{(+)} | V_{s'l_1}^{(+)} | \Phi_m^{(+)} \Phi_n^{(+)} \rangle}{\hbar [\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_r^{(+)}]} + \right. \\ \left. + \frac{\langle \Phi_r^{(+)} \Phi_p^{(+)} | V_{s'l_2}^{(+)} | \Phi_l^{(+)} \Phi_n^{(+)} \rangle \langle \Phi_l^{(+)} | R_s^{(+)} | \Phi_m^{(+)} \rangle}{\hbar [\omega_l(1-i0) - \omega - \omega_m^{(+)}]} \right\}, \quad (4.15)$$

где операторы  $V_{s'l_1}^{(+)}$  и  $V_{s'l_2}^{(+)}$  получены из соответствующих операторов  $B_{l_1}$  и  $B_{2l_1}$ . При перемножении различных матричных элементов в (4.15) будем отбрасывать члены, содержащие  $1/c$  в более чем третьей степени.

Аналогичный вид примут и остальные члены в (2.1). Обозначим их через  $B_{i \rightarrow f}^{(3)}$ ,  $C_{i \rightarrow f}^{(3)}$  и  $D_{i \rightarrow f}^{(3)}$ . Как будет показано ниже, физический смысл всех выделенных членов в матрице (2.1) будет различным.

### 5. ПОЛЯРИЗУЮЩИЕ ПОЛЯ В СИСТЕМЕ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ, ИЗЛУЧАЮЩИХ ИЛИ ПОГЛОЩАЮЩИХ ФОТОНЫ

Операторы (4.3), (4.4) и (4.5), соответствующие эффектам первого порядка, содержат в себе в качестве сомножителей атомные и полевые операторы, вызывающие квантовые переходы между атомами и фотонными состояниями в одной и той же точке наблюдения. Иная ситуация имеет место для взаимодействия двух атомов, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга, с операторами (4.14) или матричными элементами (4.15). В различных членах оператора (4.14) можно выделить оператор, «действующий» в некоторой точке наблюдения и оператор, «действующий» в месте расположения другого атома, формирующего поляризующее поле. При этом поляризующее поле не является полем реальных фотонов, а является полем виртуальных фотонов. Аналогичным образом в матричных элементах типа (4.15) содержится зависимость от координат двух атомов, один из которых располагается в точке наблюдения.

Рассмотрим поляризующие поля, которые формируются по схеме С из разд. 2, когда в результате обмена виртуальными фотонами и излучения или поглощения одного реального фотона меняется квантовое состояние лишь одного из атомов. Предположим, что местоположение первого атома определяется радиус-вектором  $\mathbf{r}_1$  (координаты  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$ ), а местоположение второго — радиус-вектором  $\mathbf{r}_2$  (координаты  $\mathbf{r}'''$ ). Начальное

состояние первого атома определяется индексом  $m$  с энергией  $E_m^{(+)}$ , а начальное состояние второго атома — индексом  $n$  с энергией  $E_n^{(+)}$ . В результате обмена виртуальными фотонами первый атом оказывается в некотором промежуточном состоянии  $E_l^{(+)}$  или  $E_l^{(-)}$  и затем возвращается в исходное состояние, т.е.  $E_r^{(+)} = E_m^{(+)}$ . Происходит поглощение одного реального фотона в месте расположения первого атома, а второй атом при этом изменяет свое квантовое состояние и переходит на уровень  $E_p^{(+)} > E_n^{(+)}$ . Такая схема квантовых переходов соответствует первому члену матрицы (2.1) и диаграмме 1 на рис. 1. Аналогичная ситуация имеет место и для второго члена (2.1) с диаграммой Фейнмана 2 (рис. 1), когда поглощение фотона происходит не в месте расположения атома, совершающего переход  $E_n^{(+)} \rightarrow E_p^{(+)}$ , а в месте расположения другого атома, формирующего поляризующее поле. Остальные члены матрицы (2.1) с соответствующими диаграммами 3–8 не участвуют в формировании поляризующего поля по рассматриваемой схеме. Действительно, при равенстве индексов  $r = m$  каждый из этих членов содержит равные нулю матричные элементы типа  $\langle \Psi_r^{(+)} | \gamma'_\mu | \Psi_m^{(+)} \rangle$ .

Запишем в явном виде векторные потенциалы поляризующих полей, используя (4.14) и (4.15). Для этого необходимо выделить определенный тип квантовых переходов между состояниями взаимодействующих атомов, например, орбитальные квантовые переходы. Тогда для эффектов первого порядка получим для каждого из атомов в соответствии с (4.3) следующий оператор Гамильтона:

$$H_1''' = -\frac{e}{mc} \mathbf{p}''' \mathbf{A}''', \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{A}'''$  — оператор векторного потенциала внешнего поля излучения в месте расположения второго атома. С помощью оператора (4.14) запишем следующий оператор Гамильтона:

$$H_2''' = -\frac{e}{mc} \mathbf{p}''' \mathbf{A}^{(p)}, \quad \mathbf{A}^{(p)} = -\frac{e^2}{2mc^2} \frac{1}{n} \exp\left(\frac{i}{c} \omega_0 a\right) \mathbf{A}'', \quad (5.2)$$

где  $\omega_0 = \omega_p^{(+)} - \omega_n^{(+)}$  — частота перехода  $p \rightarrow n$ . Поляризующее поле  $\mathbf{A}^{(p)}$  будем называть позитронным поляризующим полем. Поляризующее поле (5.2) обусловлено исчезновением фотона в месте расположения второго атома, в то время как поглощение фотона происходит в месте расположения первого атома. Другие члены оператора (4.14), соответствующие орбитальным квантовым переходам, отличаются от (5.2) своими физическими свойствами. Так, член типа  $\mathbf{p}'' \mathbf{A}''$  соответствует позитронному поляризующему полю, но при этом исчезновение фотона и его поглощение происходят в одном и том же месте.

Таким образом, учет позитронных промежуточных состояний во взаимодействии двух атомных электронов приводит к возникновению дополнительного гамильтониана взаимодействия атомных электронов с внешним полем. В результате к внешнему полю  $\mathbf{A}'''$  следует добавлять позитронное поляризующее поле  $\mathbf{A}^{(p)}$  при рассмотрении взаимодействия системы атомных электронов с внешним полем.

Рассмотрим роль взаимодействия (4.15) через промежуточные состояния с положительными энергиями, учитывая только орбитальные квантовые переходы. Подставив в (4.15) операторы (4.3) и (3.9), получим следующий гамильтониан взаимодействия:

$$H_3''' = -\frac{e}{mc} \mathbf{p}''' \mathbf{A}^{(e)}, \quad (5.3)$$

где  $A^{(e)}$  — векторный потенциал электронного поляризующего поля:

$$\begin{aligned}
 A^{(e)} = \exp\left(\frac{i}{c}\omega_0 a\right) \sum_{l\pm} \left( \frac{\mathbf{p}'_{rl} A'}{\hbar [\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_r^{(+)}]} \left\{ \frac{e}{im\omega_0} \frac{\mathbf{d}'_{lm} - 3(\mathbf{d}'_{lm}\mathbf{n})\mathbf{n}}{a^3} + \right. \right. \\
 + \frac{e^2}{im^2c\omega_0} \frac{\mathbf{p}''_{lm} - 3(\mathbf{p}''_{lm}\mathbf{n})\mathbf{n}}{a^2} + \frac{e^2}{m^2c^2} \left[ \left(\frac{1}{2}R_{1l} - 1\right) \frac{1}{a} \mathbf{p}''_{lm} - \frac{1}{2}R_{1l} \frac{(\mathbf{np}''_{lm})\mathbf{n}}{a} - \right. \\
 \left. \left. - \frac{1}{2}R_{1l} \frac{\mathbf{p}''_{lm} - 3(\mathbf{np}''_{lm})\mathbf{n}}{a} \right] \right\} + \frac{1}{\hbar [\omega_l(1-i0) - \omega - \omega_m^{(+)}]} \left\{ \frac{e}{im\omega_0} \frac{\mathbf{d}'_{rl} - 3(\mathbf{d}'_{rl}\mathbf{n})\mathbf{n}}{a^3} + \right. \\
 + \frac{e^2}{im^2c\omega_0} \frac{\mathbf{p}'_{rl} - 3(\mathbf{p}'_{rl}\mathbf{n})\mathbf{n}}{a^2} + \frac{e^2}{m^2c^2} \left[ \left(\frac{1}{2}R_{2l} - 1\right) \frac{1}{a} \mathbf{p}'_{rl} - \frac{1}{2}R_{2l} \frac{(\mathbf{np}'_{rl})\mathbf{n}}{a} - \right. \\
 \left. \left. - \frac{1}{2}R_{2l} \frac{\mathbf{p}'_{rl} - 3(\mathbf{np}'_{rl})\mathbf{n}}{a} \right] \right\} \mathbf{p}''_{rl} A'' \right), \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

где

$$R_{1l} = \frac{\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}}{\omega_l - \omega_m^{(+)}}, \quad R_{2l} = \frac{\omega_n^{(+)} - \omega_p^{(+)}}{\omega_l - \omega_r^{(+)}}.$$

Электронное поляризующее поле (5.4) записано в электрическом дипольном приближении с использованием оператора (3.9) для учета обмена виртуальными фотонами. При этом в (5.4) операторы  $A'$  и  $A''$  были вынесены за знак матричного элемента в этом приближении.

Электронное поляризующее поле (5.4) формируется двумя атомами, и при этом один из атомов в результате последовательности рассматриваемых квантовых переходов оказывается в исходном квантовом состоянии. Это означает, что в формуле (5.4) можно выделить среднее значение электрического дипольного момента этого атома в некотором состоянии  $r = m$ . Запишем выражение для среднего значения дипольного момента  $\mathbf{d}'_m$ , вычисленное в первом порядке теории возмущений [18]:

$$\mathbf{d}'_m = \frac{e}{m\hbar} e^{-i\omega t} \sum_{l+} \left\{ \frac{\mathbf{d}'_{ml}(\mathbf{p}'_{lm} A'_0)}{\omega_{lm} - \omega + i(\Gamma_l + \Gamma_m)/2} + \frac{(\mathbf{p}'_{ml} A'_0) \mathbf{d}'_{lm}}{\omega_{lm} + \omega - i(\Gamma_l + \Gamma_m)/2} \right\}, \quad (5.5)$$

где  $\omega_{lm}$  — частота перехода,  $\Gamma_{l(m)}^{-1}$  — время жизни состояния  $l(m)$ ,  $A' = A_0 e^{-i\omega t}$ . В формуле (5.5) оставлена только отрицательно-частотная часть, соответствующая процессу поглощения фотона, при котором формируется поляризующее поле (5.4). Используя выражение (5.5), получим вместо (5.4) следующую формулу (индекс  $m$  опущен):

$$A^{(e)} = \frac{c}{i\omega_0} \frac{[\mathbf{d}'] - 3([\mathbf{d}']\mathbf{n})\mathbf{n}}{a^3} + \frac{e}{im\omega_0} \frac{[\mathbf{p}'] - 3([\mathbf{p}']\mathbf{n})\mathbf{n}}{a^2} - \frac{i\omega_0}{c} \frac{([\mathbf{d}']\mathbf{n})\mathbf{n}}{a} - \frac{e}{mc} \frac{[\mathbf{p}']}{a}, \quad (5.6)$$

где символ [...] означает, что среднее значение величины берется в момент времени  $t' = t - \omega_0 a / \omega c$ . Здесь использовано свойство изотропности атомов, в соответствии с которым величины типа  $(\mathbf{p}'_{rl} A') \mathbf{d}'_{lm}$  и  $\mathbf{p}'_{rl} (\mathbf{d}'_{lm} A')$  равны друг другу.



Перейдем от векторных потенциалов (5.2) и (5.3) поляризующих полей к соответствующим напряженностям электрического и магнитного полей, используя условие Лоренца  $\partial A_\mu / \partial x_\mu = 0$  [13]. Для поля излучения, пропорционального  $\exp(-i\omega t)$ , имеем

$$\mathbf{E}_-^{(e)} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}_-^{(e)}, \quad \mathbf{E}_-^{(p)} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}_-^{(p)}, \quad (5.7)$$

где векторные потенциалы  $\mathbf{A}_-^{(e)}$  и  $\mathbf{A}_-^{(p)}$  пропорциональны оператору  $c_{\mathbf{k}\lambda}^v$  уничтожения фотона с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и индексом поляризации  $\lambda = 1, 2$  в месте расположения атома, создающего поляризующее поле (атом-поляризатор). При этом квантовый переход  $p \rightarrow n$  осуществляется в месте расположения другого атома — атома-наблюдателя, находящегося на произвольном расстоянии от атома-поляризатора.

Рассмотрим случай, когда частота  $\omega$  внешнего поля излучения близка к одной из частот  $\omega_{lm} > 0$ . Тогда среднее значение импульса равно

$$[\mathbf{p}'] = \frac{im}{e} \omega_0 [\mathbf{d}']$$

и оператор напряженности электронного поляризующего поля, согласно (5.6), примет следующий вид:

$$\mathbf{E}_-^{(e)} = \text{rot rot} \frac{[\mathbf{d}]}{a}, \quad (5.8)$$

где дифференцирование ведется по координатам точки наблюдения  $\mathbf{a}'''$ . Аналогичным образом определим напряженности магнитного поля,  $\mathbf{H}_-^{(e)}$  и  $\mathbf{H}_-^{(p)}$ , используя обычное соотношение между векторным потенциалом и напряженностью магнитного поля [13].

### 5.1. Интегральные уравнения распространения фотонов в электродипольной оптической среде

Введем дипольную  $\alpha_d$  и импульсную  $\alpha_p$  поляризуемости атома с помощью следующих соотношений:

$$\mathbf{d}' = \alpha_d \mathbf{A}', \quad \mathbf{p}' = \alpha_p \mathbf{A}', \quad (5.9)$$

где  $\mathbf{d}'$  и  $\mathbf{p}'$  — средние значения дипольного момента и импульса в некотором состоянии  $m$ , вычисленные в первом порядке теории возмущений. В соответствии с формулой (5.5) можно определить дипольную поляризуемость изотропного атома. Для определения импульсной поляризуемости  $\alpha_p$  в формуле (5.5) следует заменить матричные элементы  $\mathbf{d}'_{lm}$  на матричные элементы  $\mathbf{p}'_{lm}$  оператора импульса. Тогда векторный потенциал электронного поляризующего поля примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(e)} = & \left\{ \alpha_d \frac{c}{i\omega_0} \frac{\mathbf{e} - 3(\mathbf{en})\mathbf{n}}{a^3} + \alpha_p \frac{c}{im\omega_0} \frac{\mathbf{e} - 3(\mathbf{en})\mathbf{n}}{a^2} - \right. \\ & \left. - \alpha_d \frac{i\omega_0}{c} \frac{(\mathbf{en})\mathbf{n}}{a} - \frac{e}{mc} \alpha_p \frac{\mathbf{e}}{a} \right\} [\mathbf{A}'] \equiv K_e(\mathbf{a}', \mathbf{a}''') [\mathbf{A}'], \end{aligned} \quad (5.10)$$

где  $\mathbf{e}$  — единичный вектор вдоль направления поля  $\mathbf{A}'$ .

Переход к  $N$ -атомной системе можно осуществить путем суммирования векторных потенциалов (5.10), (5.2) поляризующих полей, создаваемых  $N-1$  атомами в месте расположения атома с радиус-вектором  $\mathbf{a}''$ . В такой системе атомов можно оценить роль

электронного и позитронного поляризующих полей, сравнивая члены, пропорциональные  $1/a$ , в (5.10) с векторным потенциалом (5.2). При этом следует обратить внимание на то обстоятельство, что электронное поляризирующее поле содержит поляризуемости  $\alpha_d$  и  $\alpha_p$ , которые зависят от случайного распределения собственных частот вследствие неоднородного уширения, а позитронное поляризирующее поле от этого уширения не зависит. Это приводит к тому, что электронное и позитронное поляризирующие поля при определенных условиях в  $N$ -атомной системе могут быть сравнимы по абсолютной величине.

Перейдем к оптической среде, полагая, что она является непрерывной. Для этого введем концентрацию  $N/V$  распределения атомов в среде. Более того, предположим, что поляризирующие поля (5.10) и (5.2) будут пропорциональны не внешнему полю, а полю внутри среды. Это позволит нам записать следующее интегральное уравнение для оператора напряженности электрического поля:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_l(\mathbf{r}, t) + \int \frac{N}{V} K_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{E}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) dV' + \int \frac{N}{V} K_p(R) \mathbf{E}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) dV', \quad (5.11)$$

$\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения,  $\mathbf{r}'$  — радиус-вектор некоторой точки внутри среды либо на ее поверхности,  $\mathbf{E}_l(\mathbf{r}, t)$  — оператор напряженности внешнего электрического поля, представленный в виде суперпозиции плоских волн с амплитудами  $c_{\mathbf{k}\lambda}^v$  [13], не зависящими от координат;  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ,

$$K_p(R) = -\frac{e^2}{2mc^2} \frac{1}{R} \mathbf{e}. \quad (5.12)$$

Аналогичным образом можно записать интегральное уравнение для оператора напряженности магнитного поля, применяя оператор  $\text{rot}$  к векторным потенциалам (5.10), (5.2).

Если точка наблюдения  $\mathbf{r}$  находится вне рассматриваемой среды, то интеграл в (5.11) берется по всей среде. Если она расположена внутри среды, то необходимо вначале исключить небольшую область, занятую атомом и обнесенную сферой малого радиуса  $L_0$ . Уравнение (5.11) в частном случае отсутствия позитронной поляризации среды и выделения лишь одной собственной частоты в спектре атомов совпадает с интегро-дифференциальным уравнением классической оптики [19], если от операторов в (5.10) перейти к соответствующим классическим полям.

Мы предполагаем использовать уравнение (5.11) в дальнейшем для решения граничных задач квантовой оптики, учитывая тот факт, что граничные условия уже учтены в этом уравнении.

## 5.2. Интегральное уравнение распространения фотонов в системе электронных спинов

Рассмотрим еще один пример интегрального уравнения, которое можно вывести с помощью предлагаемого в данной статье метода. В отличие от предыдущего случая, будем рассматривать только спиновые степени свободы взаимодействующих электронов различных одноэлектронных атомов, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга. Такая ситуация представляет интерес, например, для магнитооптики, в лазерах без инверсии, в процессах лазерного охлаждения атомов и т. д. Предположим, что спиновые переходы осуществляются между состояниями атомов, разделенными оптической

частотой  $\omega_0$ . Такие спиновые переходы могут происходить независимо от электрических дипольных переходов, рассматриваемых в п. 5.1.

Применим оператор (3.6), а также оператор

$$(R_2^{(+)})_{\sigma} = -\frac{i\hbar e}{2mc} \sigma' \mathbf{H}' \quad (5.13)$$

для описания поляризующих полей в системе электронных спинов. При этом будем рассматривать ту же, что и в п. 5.1, схему квантовых переходов.

Подставим операторы (3.6) и (5.13) в матрицу (4.15). Это позволит нам получить следующий оператор взаимодействия:

$$H_3''' = -\frac{\hbar e}{2mc} \sigma''' \mathbf{H}^{(e)}, \quad (5.14)$$

где напряженность магнитного поля

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(e)} = & \exp\left(\frac{i}{c}\omega_0 a\right) \frac{e^2 \hbar^2}{4m^2 c^2} \sum_{l'} \left( \frac{\sigma'_{rl} \mathbf{H}'}{\hbar [\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_r^{(+)}]} \left\{ \frac{\sigma''_{lm} - 3(\sigma''_{lm} \mathbf{n}) \mathbf{n}}{r^3} + \right. \right. \\ & + 15 \frac{a^2}{r^5} R_{1l} (\sigma''_{lm} \mathbf{n}) \mathbf{n} - 9 \frac{a^2}{r^5} R_{1l} \sigma''_{lm} \left. \right\} + \frac{1}{\hbar [\omega_l(1-i0) - \omega - \omega_m^{(+)}]} \left\{ \frac{\sigma'_{rl} - 3(\sigma'_{rl} \mathbf{n}) \mathbf{n}}{r^3} + \right. \\ & \left. \left. + 15 \frac{a^2}{r^5} R_{2l} (\sigma'_{rl} \mathbf{n}) \mathbf{n} - 9 \frac{a^2}{r^5} R_{2l} \sigma'_{rl} \right\} \right). \quad (5.15) \end{aligned}$$

Это поле является электронным поляризующим полем, т. е. оно реализуется благодаря только электронным промежуточным состояниям. Как следует из (4.14), позитронное поляризующее поле для рассматриваемой схемы квантовых переходов отсутствует.

Выделим в (5.15) средние значения спиновых магнитных моментов атома-поляризатора, используя формулу, аналогичную (5.5) в первом порядке теории возмущений. Для средних значений спиновых переменных в состоянии  $m$  введем следующие обозначения:

$$\sigma'_m = (\alpha_{\sigma})_m \mathbf{H}', \quad \mathbf{q}'_m = (\alpha_q)_m \mathbf{H}', \quad (5.16)$$

где  $(\alpha_{\sigma})_m$  — спиновая поляризуемость атома в состоянии  $m$ ,  $\mathbf{q}'_m$  — среднее значение в состоянии  $m$  оператора  $\mathbf{q}'$ , имеющего матричные элементы  $q'_{lm} = \sigma'_{lm}/\omega_{lm}$ ,  $(\alpha_q)_m$  — соответствующая поляризуемость. Тогда выражение для поляризующего поля (5.15) примет следующий вид:

$$\mathbf{H}^{(e)} = \mu_B \left\{ \alpha_{\sigma} \frac{\mathbf{h} - 3(\mathbf{h}\mathbf{n})\mathbf{n}}{r^3} - 15\omega_0\alpha_q \frac{a^2}{r^5} (\mathbf{h}\mathbf{n})\mathbf{n} + 9\omega_0\alpha_q \frac{a^2}{r^5} \right\} [\mathbf{H}'] \equiv K_{\sigma}(\mathbf{a}', \mathbf{a}''') [\mathbf{H}'], \quad (5.17)$$

где  $\mu_B$  — магнетон Бора,  $\mathbf{h}$  — единичный вектор вдоль направления вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}'$ .

Переход к интегральному уравнению распространения фотонов в непрерывной оптической среде осуществляется так же, как это было проделано в п. 5.1, т. е. путем

замены внешнего поля в формуле (5.17) на поле внутри среды. Тогда оператор напряженности магнитного поля в некоторой точке наблюдения  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  внутри или вне среды для спиновых квантовых переходов примет следующий вид:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t) + \int \frac{N}{V} K_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}) dV', \quad (5.18)$$

где  $\mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t)$  — оператор напряженности внешнего магнитного поля.

## 6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты данной статьи можно разделить на две основные части. Первая часть посвящена решению важной проблемы квантовой электродинамики — проблеме двух взаимодействующих электронов. Вторая часть данной статьи посвящена применению этого решения к выводу интегральных полевых уравнений в оптике.

Взаимодействие двух атомных электронов, принадлежащих двум неподвижным атомам на произвольном расстоянии друг от друга, рассматривается как эффект третьего порядка квантовой электродинамики, где составной частью является обмен виртуальными фотонами с участием различных промежуточных состояний с положительными и отрицательными энергиями. При этом удастся классифицировать различные схемы квантовых переходов, приводящие к излучению или поглощению одного фотона в системе двух взаимодействующих водородоподобных атомов. В данной статье подробно рассмотрена схема квантовых переходов, в которой один из атомов является атомом-поляризатором, а другой — атомом-излучателем (поглощателем).

В отличие от предыдущих работ, посвященных проблеме двух электронов, в данной работе впервые учтены все промежуточные состояния в спектре взаимодействующих атомов, а не только  $\omega_1$ , для которых частота перехода  $\omega_{lm}$  близка к частоте  $\omega$  реального фотона. Учет этих состояний связан с ролью факторов  $R_{sl}$  в операторах  $B_{sl}$ , описывающих виртуальный обмен фотонами.

В прежних работах основное внимание уделялось взаимодействию двух водородоподобных атомов в электрическом дипольном приближении. В данной работе учтены также другие типы квантовых переходов. Показано, что в операторах спин-орбитального и спин-спинового взаимодействий появляются дополнительные члены по сравнению с оператором Брейта. Появление этих членов связано с дополнительным запаздыванием во взаимодействии двух атомов, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга. При этом вводится один временной масштаб — период оптических колебаний — для различных типов квантовых переходов.

Показано, что на каждый атом действуют поля трех типов: внешнее поле (включая вакуумное поле), электронное поляризующее поле и позитронное поляризующее поле. При этом показано, что исчезновение фотона может происходить в месте расположения одного из атомов рассматриваемой системы, а поглощение этого фотона будет происходить в месте расположения другого атома, находящегося на произвольном расстоянии от атома-поляризатора. Аналогичная ситуация имеет место и для процесса излучения фотона, когда излучение фотона происходит в месте расположения атома-излучателя, находящегося на произвольном расстоянии от атома-поляризатора, где родился фотон.

Исследование процессов взаимодействия двух атомов в поле излучения может быть использовано для вывода новых интегральных уравнений распространения фотонов в

непрерывной оптической среде. В данной статье для демонстрации метода интегральных уравнений получены два интегральных уравнения, соответствующие электрическим и спиновым переходам в спектре взаимодействующих атомов. Показано, что в частном случае учета в спектре атома лишь одной частоты перехода  $\omega_{lm} \approx 0$  интегральное уравнение распространения фотонов в электродипольной среде совпадает с соответствующим интегральным уравнением классической оптики.

Обсудим целесообразность перехода к интегральным полевым уравнениям от соответствующих дифференциальных уравнений. Интегральные уравнения для напряженностей электрического и магнитного полей классической оптики, по существу, эквивалентны уравнениям Максвелла. Однако на основе интегральных уравнений удается строгим образом получить формулу Лоренца—Лоренца и теорему погашения, а также решить целый ряд важных оптических задач. И все-таки этот мощный метод до сих пор слабо использовался. Объяснением этому может служить то обстоятельство, что известные в классической оптике интегральные уравнения имеют смысл лишь для изотропных немагнитных диэлектрических сред. Поэтому представляет значительный интерес вывод соответствующих интегральных уравнений для более широкого класса задач. Именно этой цели и посвящена данная статья, где вначале исследуется проблема двух электронов в рамках квантовой электродинамики.

Исследование взаимодействия двух электронов в поле излучения позволяет разделить различные типы квантовых переходов. В частности, как показано в данной статье, можно выделить позитронное поляризующее поле, которое в ряде случаев не является пренебрежимо малым по сравнению с электронным поляризующим полем. Учитывая соответствие уравнения (5.11) и классического интегрального уравнения, можно утверждать, что позитронное поляризующее поле может быть интерпретировано путем введения дополнительного тока в уравнения Максвелла. Действительно, вывод интегрального уравнения классической оптики [19] основан в [4] на разложении запаздывающих потенциалов. При этом внешнее поле может быть учтено двумя способами. Первый способ основан на введении поляризуемостей атомов, что позволяет учесть так называемое поле диполей в оптике. Второй способ основан на замене импульсов электронов,  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}$ . С точки зрения квантовой электродинамики, как показано в данной статье, эти два способа соответствуют электронному и позитронному поляризующим полям. Электронное поляризующее поле в электрическом дипольном приближении есть известное в оптике поле диполей, обусловленное только электронными состояниями в спектре взаимодействующих атомов. Позитронное же поляризующее поле возникает за счет учета позитронных состояний. При этом речь идет не о реальных позитронных состояниях, а о виртуальных состояниях, возникновение которых происходит без выполнения закона сохранения энергии. Таким образом, исследование проблемы двух электронов в рамках квантовой электродинамики позволяет не только разработать метод интегральных уравнений, но и выявить новые механизмы излучения и поглощения реальных фотонов в системе взаимодействующих атомов.

Можно выделить два разных типа взаимодействия атомов с полем излучения. Первый из них соответствует переходу реальных фотонов от возбужденных атомов к невозбужденным. При этом время переноса излучения от одного атома к другому определяется межатомным расстоянием. Такой тип взаимодействия может быть положен в основу вывода соответствующих интегральных уравнений переноса излучения, которые применяются, например, в оптике турбулентных сред [20]. Другой тип взаимодействия основан на введении понятия поляризующих полей, которые рассматриваются в

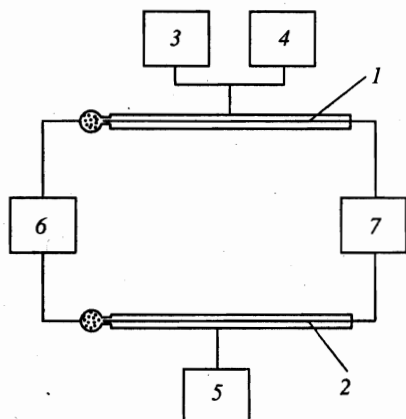


Рис. 2. Принципиальная схема экспериментальной установки для исследования поляризующих полей атомов во внешнем поле излучения: 1 — пучок атомов в основном состоянии; 2 — пучок атомов в возбужденном состоянии; 3 — спектрофотометр; 4 и 5 — устройства для сортировки атомов в основном и возбужденных состояниях; 6 — синхронизирующее устройство; 7 — считывающее устройство

данной статье как эффекты третьего порядка квантовой электродинамики. Как было показано выше, фотон исчезает в месте расположения одного из взаимодействующих атомов, а поглощение его происходит в месте расположения другого атома. При этом расстояние между атомами, согласно смыслу разложения в разд. 2, может быть произвольным. Аналогичная ситуация, очевидно, имеет место и для процесса излучения фотона в системе двух взаимодействующих атомов.

Обратим внимание на важную особенность этого типа взаимодействия. А именно, исчезновение фотона и его поглощение происходят в один и тот же момент времени, т. е. можно говорить о мгновенности формирования поляризующего поля благодаря непрерывному обмену виртуальными фотонами между атомными электронами. В противном случае будет нарушен закон сохранения (2.10). Фактор запаздывания  $\exp[(i/c)\omega_0 a]$  в различных членах матрицы (2.1) указывает лишь на периодическую зависимость эффективной энергии взаимодействия от межатомного расстояния. Иными словами, можно говорить о мгновенной передаче энергии между различными атомами на произвольном расстоянии друг от друга при условии непрерывного обмена виртуальными фотонами.

На рис. 2 представлена принципиальная схема экспериментальной установки, с помощью которой можно подтвердить либо опровергнуть это свойство поляризующих полей. Для проведения эксперимента выберем водородоподобные атомы, например Cs, Rb<sup>85</sup> или атомы водорода, спектр которых достаточно хорошо изучен. В данной статье рассмотрены подробно поляризующие поля, которые обусловлены электрическими дипольными или спиновыми переходами. Однако, следуя приведенному выше методу, можно рассмотреть поляризующие поля и для других типов квантовых переходов. Поэтому для эксперимента целесообразно выбрать квантовые переходы в спектре атомов с большой длиной волны (например, длину волны излучения в водородном генераторе), чтобы в значительной степени исключить роль фактора запаздывания. Предлагаемая экспериментальная установка состоит из двух атомно-лучевых трубок. В трубке 1 находится пучок атомов в основном энергетическом состоянии, которые облучаются фотонами. С помощью спектрофотометра 3 фиксируются факты исчезновения фотонов, которые могут быть обусловлены либо процессом наведения поляризующих полей, либо процессом прямого поглощения резонансными атомами. В последнем случае атомы переходят в возбужденное состояние и могут быть выделены в атомном пучке с помощью сортирующего устройства 4. В трубке 2, синхронизированной с трубкой 1 с помощью

устройства 6, также имеется пучок атомов в основном энергетическом состоянии. Под действием атомов-поляризаторов пучка 1 в трубке 2 происходит поглощение резонансных фотонов, атомы-поглотители переходят в возбужденное состояние и сортируются с помощью устройства 5. Вероятность поглощения может быть вычислена в первом порядке теории возмущений с помощью оператора (5.3) с электронным поляризующим полем (5.10). Это позволит вычислить число атомов, участвующих в формировании поляризующего поля. Однако наряду с этим процессом в трубке 2 возбуждаются атомы за счет переизлучения атомов в трубке 1, находящихся на расстоянии  $L$  от второй трубки. Этот процесс имеет временную задержку, равную  $L/c$ , и может быть отделен от процесса формирования поляризующих полей с помощью считывающего устройства 7.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 98-02-16035) и Федеральной программой «Интеграция» (грант K0179).

## Литература

1. C. G. Darwin, Trans. Cambr. Phil. Soc. **23**, 137 (1924).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматгиз, Москва (1960).
3. О. Н. Гадомский, В. Р. Нагибаров, Н. К. Соловаров, ЖЭТФ **63**, 813 (1972).
4. О. Н. Гадомский, Р. А. Власов, *Оптическая эхо-спектроскопия поверхности*, Наука и техника, Минск (1990).
5. O. N. Gadomsky, V. R. Nagibarov, and N. K. Solovarov, Phys. Lett. A **42**, 219 (1972).
6. G. Breit, Phys. Rev. **34**, 553 (1929).
7. L. D. Landau, Sov. Phys. **8**, 487 (1932).
8. H. Bethe and E. Fermi, Zs. Phys. **77**, 296 (1932).
9. C. S. Chang and P. Stehle, Phys. Rev. A **4**, 630 (1971).
10. О. Н. Гадомский, В. Р. Нагибаров, Н. К. Соловаров, ЖЭТФ **70**, 435 (1976).
11. Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ **18**, 562 (1948).
12. Б. Д. Федюшин, ЖЭТФ **22**, 140 (1952).
13. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Физматгиз, Москва (1959).
14. G. W. F. Drake, Phys. Rev. A **5**, 1979 (1972).
15. O. N. Gadomsky and K. V. Krutitsky, J. Opt. Soc. Amer. B **13**, 1679 (1996).
16. О. Н. Гадомский, К. В. Крутицкий, ЖЭТФ **106**, 936 (1994).
17. О. Н. Гадомский, С. Г. Моисеев, ЖЭТФ **113**, 471 (1998).
18. А. С. Давыдов, *Квантовая механика*, Физматгиз, Москва (1963).
19. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1973).
20. А. Исимару, *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах*, Мир, Москва (1981).