

КРИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СЛАБОНЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СПИНОВЫХ СИСТЕМ

В. В. Прудников, С. В. Белим, А. В. Иванов, Е. В. Осинцев, А. А. Федоренко*

*Омский государственный университет
644077, Омск, Россия*

Поступила в редакцию 4 декабря 1997 г.

Проведено теоретико-полевое описание критической динамики спиновых систем с замороженными немагнитными примесями. Непосредственно для трехмерных систем получены значения динамического критического индекса в трехпетлевом приближении с применением техники суммирования Паде–Бореля. Проведено сопоставление с результатами расчета динамического индекса для однородных систем в четырехпетлевом приближении, а также со значениями, полученными при компьютерном моделировании критической динамики методами Монте-Карло. Приведены результаты расчета динамического индекса для двумерной модели Изинга в четырехпетлевом приближении.

Как известно, фазовые переходы в однородных спиновых системах изменяются с введением в систему случайно распределенных замороженных немагнитных примесей лишь для изинговских магнетиков [1]. Метод ϵ -разложения позволяет рассчитать значения критических индексов для разбавленных магнетиков [2]. Однако асимптотическая сходимость рядов ϵ -разложения в этом случае еще более слабая, чем для однородных систем [3]. Ренормгрупповой подход к описанию слабонеупорядоченных спиновых систем, проведенный в [4, 5] непосредственно для трехмерных систем, позволил получить значения статических критических индексов в четырехпетлевом приближении. Однако расчеты с подобной точностью отсутствуют при описании критической динамики неупорядоченных систем. Это связано с быстрым ростом объема вычислений уже в самых низких порядках теории возмущений.

В предлагаемой работе осуществляется теоретико-полевое описание критической динамики слабонеупорядоченных трехмерных спиновых систем в трехпетлевом приближении. Рассматриваемая модель представляет собой классическую спиновую систему с замороженными в узлах решетки немагнитными атомами примеси, описываемую гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} p_i p_j \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j,$$

где \mathbf{S}_i — n -компонентная спиновая переменная; J_{ij} — константы обменного трансляционно-инвариантного короткодействующего ферромагнитного взаимодействия; p_i — случайная переменная, описываемая функцией распределения

$$P(p_i) = p\delta(p_i - 1) + (1 - p)\delta(p_i)$$

*E-mail: prudnikov@univer.omsk.su

с $p = 1 - c$, c — концентрация немагнитных атомов примеси. Данная модель термодинамически эквивалентна $O(n)$ -симметричной модели Гинзбурга–Ландау–Вильсона, определяемой эффективным гамильтонианом

$$H[\varphi, V] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} [|\nabla \varphi|^2 + r_0 \varphi^2 + V(x) \varphi^2] + \frac{g_0}{4!} \varphi^4 \right\}, \quad (1)$$

где $\varphi(x, t)$ — n -компонентный параметр порядка, $V(x)$ — потенциал случайного поля примесей, $r_0 \sim T - T_{0c}(p)$, T_{0c} — критическая температура системы, определяемая теорией среднего поля, g_0 — положительная константа, d — размерность системы. Потенциал примесей зададим гауссовским распределением:

$$P_V = A_V \exp \left[-(8\delta_0)^{-1} \int d^d x V^2(x) \right],$$

где A_V — нормировочная константа, δ_0 — положительная константа, пропорциональная концентрации примесей и квадрату величины их потенциала.

Динамическое поведение спиновых систем в релаксационном режиме вблизи критической температуры может быть описано кинетическим уравнением для параметра порядка типа уравнения Ланжевена [6]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\lambda_0 \frac{\delta H}{\delta \varphi} + \eta + \lambda_0 \mathbf{h}, \quad (2)$$

где λ_0 — кинетический коэффициент, $\eta(x, t)$ — гауссова случайная сила, характеризующая влияние теплового резервуара и задаваемая функцией распределения

$$P_\eta = A_\eta \exp \left[-(4\lambda_0)^{-1} \int d^d x dt \eta^2(x, t) \right]$$

с нормировочной константой A_η , $\mathbf{h}(t)$ — внешнее поле, термодинамически сопряженное параметру порядка. Временная корреляционная функция $G(x, t)$ параметра порядка определяется путем решения уравнения (2) с $H[\varphi, V]$, задаваемым (1), относительно $\varphi[\eta, \mathbf{h}, V]$ с последующим усреднением по гауссовской случайной силе η с помощью P_η , по случайному потенциалу поля примесей $V(x)$ с помощью P_V и выделением линейной по $\mathbf{h}(0)$ части решения, т. е.

$$G(x, t) = \frac{\delta}{\delta \mathbf{h}(0)} \langle \varphi(x, t) \rangle_{imp} |_{\mathbf{h}=0},$$

где

$$\langle \varphi(x, t) \rangle_{imp} = B^{-1} \int D\{\eta\} D\{V\} \varphi(x, t) P_\eta P_V,$$

$$B = \int D\{\eta\} D\{V\} P_\eta P_V.$$

При применении стандартной ренормгрупповой техники к данной динамической модели приходится сталкиваться со значительными трудностями. Однако для однородных систем в отсутствие беспорядка, вносимого присутствием примесей, было показано [7], что при описании критической динамики модель, основанная на уравнении типа

Ланжевена, полностью эквивалентна стандартной лагранжевой системе [8] с лагранжианом

$$L = \int d^d x dt \left\{ \lambda_0^{-1} \varphi^2 + i\varphi^* \left(\lambda_0^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\delta H}{\delta \varphi} \right) \right\},$$

где введено вспомогательное поле φ^* . При этом корреляционная функция $G(x, t)$ параметра порядка для однородной системы определяется как

$$G(x, t) = \langle \varphi(0, 0)\varphi(x, t) \rangle = \Omega^{-1} \int D\{\varphi\} D\{\varphi^*\} \varphi(0, 0)\varphi(x, t) \exp(-L[\varphi, \varphi^*]),$$

где

$$\Omega = \int D\{\varphi\} D\{\varphi^*\} \exp(-L[\varphi, \varphi^*]).$$

Обобщение данного теоретико-полевого подхода и детали его применения к критической динамике неупорядоченных спиновых систем с замороженными точечными примесями и протяженными дефектами в рамках ϵ -разложения изложены в работе одного из авторов [9].

Вместо корреляционной функции удобнее рассматривать ее вершинную часть, которую можно представить в формализме фейнмановских диаграмм в трехпетлевом приближении в виде

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(k, \omega; r_0, g_0, \delta_0, \lambda_0) = & r_0 + k^2 - \frac{i\omega}{\lambda_0} - 4\delta_0 D_1 - \frac{n+2}{18} g_0^2 D_2 + \frac{4(n+2)}{3} g_0 \delta_0 D_3 - \\ & - 16\delta_0^2 (D_4 + D_5) + \frac{(n+2)(n+8)}{108} g_0^3 \left(\sum_{i=6}^8 D_i \right) - \frac{2(n+2)^2}{9} g_0^2 \delta_0 \left(\sum_{i=9}^{18} D_i \right) + \\ & + \frac{16(n+2)}{3} g_0 \delta_0^2 \left(\sum_{i=19}^{31} D_i \right) - 64\delta_0^3 \left(\sum_{i=32}^{39} D_i \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Диаграммы, соответствующие D_i , приведены на рис. 1. Фейнмановские диаграммы содержат d -мерное интегрирование по импульсам и характеризуются вблизи критической точки ультрафиолетовой расходимостью в области больших импульсов \mathbf{k} с особенностями типа полюсов. Для устранения этих полюсов применяется схема размерной регуляризации, связанная с введением перенормированных величин [10]. Определим перенормированный параметр порядка как $\varphi = Z^{-1/2} \varphi_0$. Тогда перенормированные вершинные функции будут иметь обобщенный вид:

$$\Gamma_R^{(m)}(k, \omega; r, g, \delta, \lambda, \mu) = Z^{m/2} \Gamma^{(m)}(k, \omega; r_0, g_0, \delta_0, \lambda_0) \quad (4)$$

с перенормированными константами связи g, δ , температурой r и кинетическим коэффициентом λ :

$$g_0 = \mu^{4-d} Z_g g, \quad \delta_0 = \mu^{4-d} Z_\delta \delta, \quad r_0 = \mu^2 Z_r r, \quad \lambda_0^{-1} = \mu^2 Z_\lambda \lambda^{-1}, \quad (5)$$

где масштабный параметр μ вводится для приведения величин к безразмерному виду. В (4) $\Gamma^{(2)}$ соответствует обратной корреляционной функции параметра порядка $G(k, \omega)$, а

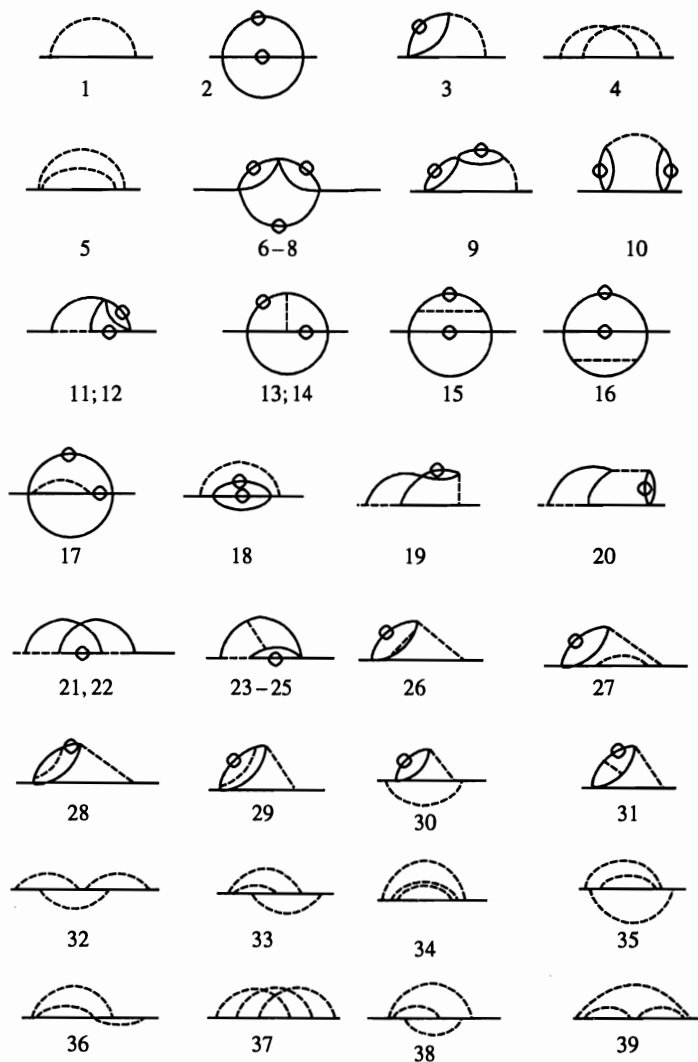


Рис. 1. Диаграммное представление вкладов в вершинную функцию $\Gamma^{(2)}(k, \omega) = G^{-1}(k, \omega)$ в трехпетлевом приближении. Сплошной линии соответствует $G_0(k, \omega) = (r_0 + k^2 - i\omega/\lambda_0)^{-1}$, сплошной линии с кружком — $C_0(k, \omega) = 2\lambda^{-1}((r_0 + k^2)^2 + (\omega/\lambda_0)^2)^{-1}$, четыреххвостой вершине \times — g_0 , примесной четыреххвостой вершине \circ — (соответствует $\delta_0\delta(\omega)$)

$\Gamma^{(4)}$ — четыреххвостым вершинным функциям $\Gamma_g^{(4)}$ и $\Gamma_\delta^{(4)}$ соответственно для констант связи g и δ ; Z -факторы определяются из требования регулярности перенормированных вершинных функций, выраженного в условиях нормировки

$$\begin{aligned}
 Z \frac{\partial \Gamma^{(2)}(k)}{\partial k^2} \Big|_{k^2=0} &= 1, & Z^2 \Gamma_g^{(4)} \Big|_{k_i=0} &= \mu^{4-d} g, \\
 Z^2 \Gamma_\delta^{(4)} \Big|_{k_i=0} &= \mu^{4-d} g, & Z \frac{\partial \Gamma^{(2)}(k, \omega)}{\partial (-i\omega)} \Big|_{k^2, \omega=0} &= \lambda^{-1}.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Данная процедура регуляризации вершинных функций была осуществлена нами в рамках трехпетлевого приближения. С этой целью представим фигурирующие в условиях нормировки значения вершинных функций в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_g^{(4)}|_{k_i=0} &= g_0 \sum_{i,j=0}^3 A_{ij} g_0^i \delta_0^j, \\ \Gamma_\delta^{(4)}|_{k_i=0} &= \delta_0 \sum_{i,j=0}^3 B_{ij} g_0^i \delta_0^j, \\ \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial k^2} \Big|_{k^2=0} &= \sum_{i,j=0}^3 C_{ij} g_0^i \delta_0^j, \\ \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial(-i\omega/\lambda)} \Big|_{k=0, \omega=0} &= \sum_{i,j=0}^3 D_{ij} g_0^i \delta_0^j, \end{aligned} \tag{7}$$

где коэффициенты представляют собой суммы соответствующих диаграмм или их производных при нулевых внешних импульсах и частотах. Так, численные значения производных от диаграмм (рис. 1),

$$D'_i = \frac{\partial D_i}{\partial(-i\omega/\lambda)} \Big|_{k=0, \omega=0},$$

образующие коэффициенты D_{ij} и полученные в результате применения схемы вычитания [11], приведены в табл. 1, где

$$J = \int \frac{d^d q}{(q^2 + 1)^2} = \frac{S_d}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)$$

— однопетлевой интеграл с $S_d = 2\pi^{d/2}/(2\pi)^d \Gamma(d/2)$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Запишем разложение величин $g_0, \delta_0, Z, Z_\lambda$ по перенормированным константам связи g и δ в виде

$$\begin{aligned} g_0 &= g \sum_{i,j=0}^3 a_{ij} g^i \delta^j, & \delta_0 &= \delta \sum_{i,j=0}^3 b_{ij} g^i \delta^j, \\ Z &= \sum_{i,j=0}^3 c_{ij} g^i \delta^j, & Z_\lambda &= \sum_{i,j=0}^3 d_{ij} g^i \delta^j, \end{aligned} \tag{8}$$

где неизвестные $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}$ выражаются через $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}$ с помощью условий нормировки.

Следующим шагом в теоретико-полевоом подходе является определение скейлинговых функций $\beta_g(g, \delta), \beta_\delta(g, \delta), \gamma_r(g, \delta), \gamma_\varphi(g, \delta)$ и $\gamma_\lambda(g, \delta)$, задающих дифференциальное уравнение ренормгруппы для вершинных функций:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} + \beta_\delta \frac{\partial}{\partial \delta} - \gamma_r r \frac{\partial}{\partial r} + \gamma_\lambda \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{m}{2} \gamma_\varphi \right] \Gamma^{(m)}(k, \omega; r, g, \delta, \lambda, \mu) = 0.$$

Таблица 1

Значения производных от диаграмм, приведенных на рис. 1,

$$D'_i = \left. \frac{\partial D_i}{\partial(-i\omega/\lambda)} \right|_{k=0, \omega=0}$$

D'_1/J	-1.000000	D'_{14}/J^3	-0.032279	D'_{27}/J^3	-0.666667
D'_2/J^2	-0.130768	D'_{15}/J^3	0.061515	D'_{28}/J^3	0.584625
D'_3/J^2	-0.666667	D'_{16}/J^3	0.004666	D'_{29}/J^3	-0.092766
D'_4/J^2	-2.000000	D'_{17}/J^3	-0.333557	D'_{30}/J^3	-0.074202
D'_5/J^2	-1.000000	D'_{18}/J^3	0.042034	D'_{31}/J^3	-0.194407
D'_6/J^3	-0.104778	D'_{19}/J^3	-2.053736	D'_{32}/J^3	-2.053736
D'_7/J^3	-0.032835	D'_{20}/J^3	-2.053736	D'_{33}/J^3	-2.053736
D'_8/J^3	-0.032835	D'_{21}/J^3	-1.142275	D'_{34}/J^3	-1.000000
D'_9/J^3	-0.519431	D'_{22}/J^3	-0.396553	D'_{35}/J^3	0.666667
D'_{10}/J^3	-0.519431	D'_{23}/J^3	-1.142275	D'_{36}/J^3	0.666667
D'_{11}/J^3	-0.276601	D'_{24}/J^3	-0.396553	D'_{37}/J^3	-2.053736
D'_{12}/J^3	-0.468697	D'_{25}/J^3	-0.396553	D'_{38}/J^3	-0.074202
D'_{13}/J^3	-0.032279	D'_{26}/J^3	0.226932	D'_{39}/J^3	0.000000

Для дальнейшего обсуждения динамического поведения нам потребуются только функции β_g , β_δ и динамическая скейлинговая функция γ_λ , определяемые соотношениями:

$$\begin{aligned}
 4 - d + \beta_g \frac{\partial \ln g Z_g}{\partial g} + \beta_\delta \frac{\partial \ln g Z_g}{\partial \delta} &= 0, \\
 4 - d + \beta_g \frac{\partial \ln \delta Z_\delta}{\partial g} + \beta_\delta \frac{\partial \ln \delta Z_\delta}{\partial \delta} &= 0, \\
 \gamma_\lambda &= \beta_g \frac{\partial \ln Z_\lambda}{\partial g} + \beta_\delta \frac{\partial \ln Z_\lambda}{\partial \delta}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Явный вид функций β_g , β_δ в четырехпетлевом приближении был получен в работе [5], где введены константы связи v и u , находящиеся с g и δ в следующем соответствии: $v = (n+8)Jg/6$, $u = -16J\delta$. Задавая функции β и γ_λ в виде

$$\beta_v = v \sum_{i,j=0}^3 \beta_{ij}^{(v)} v^i u^j, \quad \beta_u = u \sum_{i,j=0}^3 \beta_{ij}^{(u)} v^i u^j, \quad \gamma_\lambda = \sum_{i,j=0}^3 \gamma_{ij} v^i u^j, \tag{10}$$

приведем значения коэффициентов в (10) для трехмерной модели Изинга ($n = 1$) в табл. 2. Природа критической точки для каждого значения n и d полностью задается стабильной фиксированной точкой (v^*, u^*) для констант связи, определяемой из требования обращения в нуль функций β , т. е.

$$\beta_v(v^*, u^*) = 0, \quad \beta_u(v^*, u^*) = 0.$$

Порядок величин v^* и u^* равен $4-d$, поэтому ряды разложения по v и u для скейлинговых функций при $d = 3$ — асимптотически сходящиеся. Для их суммирования широкое

применение нашел метод Паде–Бореля [12]. Численный анализ уравнений для определения фиксированных точек и условий их стабильности показывает, что в отличие от ε -разложения [2, 3] при $d = 3$ не возникает случайного вырождения фиксированных точек при $n = 1$. Из четырех фиксированных точек интерес представляют только две: фиксированная точка для однородных систем ($v^* \neq 0, u^* = 0$) и примесная фиксированная точка ($v^* \neq 0, u^* \neq 0$), задающая новые критические свойства неупорядоченных систем. Примесная фиксированная точка стабильна только для $n = 1$, в то время как для $n \geq 2$ наличие беспорядка, связанного с присутствием замороженных примесей, несущественно для критического поведения. Примесная фиксированная точка для трехмерной модели Изинга в трехпетлевом приближении задается значениями $v^* = 2.256938, u^* = -0.728168$.

Таблица 2

Значения коэффициентов в выражениях для скейлинговых функций

(i, j)	$\beta_{i,j}^{(u)}$	$\beta_{i,j}^{(v)}$	$\gamma_{i,j}$
(0, 0)	-1	1	0
(1, 0)	1	3/2	-0.25
(0, 1)	2/3	1	0
(2, 0)	-95/216	-185/216	0.053240
(1, 1)	-50/81	-104/81	0.030862
(0, 2)	-92/729	-308/729	0.008400
(3, 0)	0.389922	0.916667	-0.049995
(2, 1)	0.857363	2.132996	-0.152964
(1, 2)	0.467388	1.478058	-0.044167
(0, 3)	0.090448	0.351069	-0.012642

Подстановка величин констант связи в фиксированной точке в скейлинговую функцию $\gamma_\lambda(v, u)$ позволяет определить динамический критический индекс z , характеризующий критическое замедление процессов релаксации,

$$z = 2 + \gamma_\lambda(v^*, u^*). \tag{11}$$

Однако ряд разложения $\gamma_\lambda(v^*, u^*)$ по степеням v^* и u^* при $d = 3$ является в лучшем случае асимптотически сходящимся и для получения разумных значений непосредственно просуммирован быть не может. Для его суммирования был применен обобщенный метод Паде–Бореля, который состоит в применении к ряду борелевского преобразования

$$\gamma_\lambda(v, u) = \sum_{i,j} \gamma_{ij} v^i u^j = \int_0^\infty e^{-t} \Gamma_\lambda(vt, ut) dt, \tag{12}$$

$$\Gamma_\lambda(x, y) = \sum_{i,j} \frac{\gamma_{ij}}{(i+j)!} x^i y^j$$

с последующим использованием аппроксимант Паде–Чисхолма

$$[M, N/K, L] = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N a_{ij} v^i u^j \left(\sum_{p=0}^K \sum_{q=0}^L b_{pq} v^p u^q \right)^{-1}.$$

Полученное разложение для $\gamma_\lambda(v, u)$ по v и u в трехпетлевом приближении позволяет использовать аппроксиманты вида $[1,1/1,1]$ и $[2,2/1,1]$. Применение аппроксимант $[1,1/1,1]$ соответствует проведенному ранее в [13] описанию критической динамики неупорядоченных магнетиков в двухпетлевом приближении и дает значение динамического индекса $z_{imp}^{(2)} = 2.169849$. Использование аппроксимант $[2,2/1,1]$ позволяет получить индекс z в виде

$$z = 2 + \frac{\alpha_1 u}{\beta} + \frac{\beta - 1}{\beta^2} (\alpha_2 u^2 + \alpha_3 uv + \alpha_4 v^2) + \frac{2\beta^2 - \beta + 1}{\beta^3} (\alpha_5 u^2 v + \alpha_6 uv^2) - \frac{1}{\beta} \left[\alpha_1 u + \frac{1}{\beta} (\alpha_2 u^2 + \alpha_3 uv + \alpha_4 v^2) + \frac{1}{\beta^2} (\alpha_5 u^2 v + \alpha_6 uv^2) \right]_2 F_0(1, 1, \beta), \quad (13)$$

где ${}_2F_0(1, 1, \beta)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, а коэффициенты α_i и β вычисляются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma_{1,0}, & \alpha_2 &= \frac{\gamma_{2,0}}{2} - \frac{\gamma_{1,0}\gamma_{3,0}}{3\gamma_{2,0}}, & \alpha_3 &= \frac{\gamma_{1,1}}{2} - \frac{\gamma_{0,1}\gamma_{0,3}}{3\gamma_{0,2}}, \\ \alpha_4 &= \frac{\gamma_{0,2}}{2}, & \alpha_5 &= \frac{\gamma_{2,1}}{6} - \frac{\gamma_{1,1}\gamma_{3,0}}{6\gamma_{2,0}} - \frac{\gamma_{2,0}\gamma_{0,3}}{6\gamma_{0,2}}, \\ \alpha_6 &= \frac{\gamma_{1,2}}{6} - \frac{\gamma_{1,1}\gamma_{0,3}}{6\gamma_{0,2}} - \frac{\gamma_{0,2}\gamma_{3,0}}{6\gamma_{2,0}}, \\ \beta &= \beta_1 u + \beta_2 v, & \beta_1 &= -\frac{\gamma_{3,0}}{3\gamma_{2,0}}, & \beta_2 &= -\frac{\gamma_{0,3}}{3\gamma_{0,2}}. \end{aligned}$$

Использование величин констант связи в примесной фиксированной точке $v^* = 2.256938$, $u^* = -0.728168$ дает следующее значение динамического индекса

$$z_{imp}^{(3)} = 2.165319. \quad (14)$$

Малое изменение величины индекса z_{imp} , вычисленного в трехпетлевом и двухпетлевом приближениях, позволяет считать, что учет поправок более высокого порядка может привести лишь к незначительным изменениям. Расчеты, проведенные в [13] на основе ϵ -разложения в двухпетлевом приближении, дали в то же время значение $z_{imp}^{(2)} = 2.336$, что обосновывает необходимость применения к описанию критического поведения разбавленных магнетиков ренормгрупповой процедуры непосредственно при $d = 3$.

Для выявления влияния примесей на динамическое критическое поведение необходимо провести сопоставление значений индекса z для неупорядоченных и однородных систем. Известно [6], что флуктуационные поправки к среднеполевому значению динамического индекса $z^{(0)} = 2$ возникают для однородных систем лишь в двухпетлевом приближении, в то время как для неупорядоченных систем динамические эффекты рассеяния флуктуаций намагниченности на примесях проявляются уже в первом приближении. Эффективность применения методов суммирования асимптотически сходящихся рядов во многом определяется количеством известных слагаемых ряда. Поэтому при применении методов суммирования к динамической скейлинговой функции точности трехпетлевого приближения для индекса z неупорядоченной системы может соответствовать лишь точность четырехпетлевого приближения для z однородной спиновой системы. С этой целью нами был осуществлен расчет динамического критического индекса для однородных трехмерных спиновых систем в четырехпетлевом приближении.

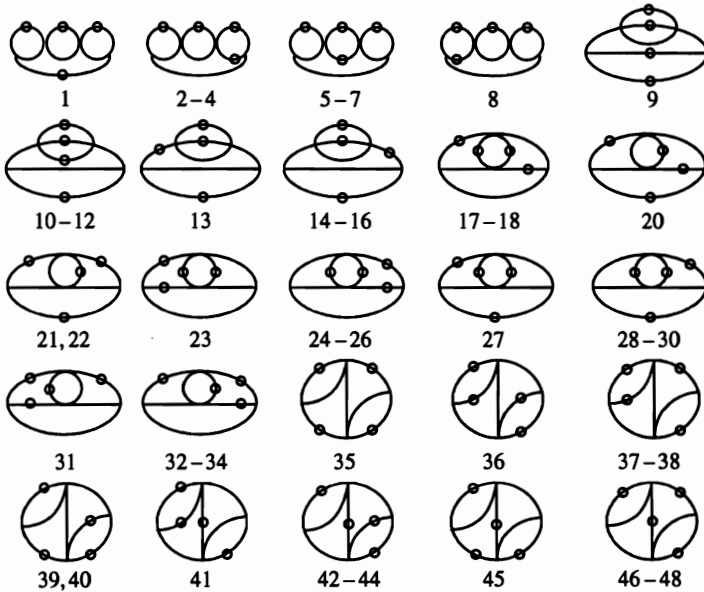


Рис. 2. Четырехпетлевые диаграммы, дающие вклад в вершинную функцию $\Gamma^{(2)}(k, \omega)$

Выражения для вершинных функций в (7) для однородных систем значительно упрощаются и в четырехпетлевом приближении примут вид

$$\begin{aligned} \Gamma_v^{(4)}|_{k_i=0} &= v_0 + A_1 v_0^2 + A_2 v_0^3 + A_3 v_0^4, \\ \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial k^2}|_{k^2=0} &= 1 + B_1 v_0^2 + B_2 v_0^3 + B_3 v_0^4, \\ \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial(-i\omega)}|_{k=0, \omega=0} &= 1 + C_1 v_0^2 + C_2 v_0^3 + C_3 v_0^4. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $v_0 = (n + 8)Jg_0/6$. Значения коэффициентов при $n = 1$ приведены в табл. 3. Четырехпетлевые диаграммы, образующие коэффициент C_3 , представлены на рис. 2. При вычислении они распадаются на 48 $4d$ -кратных интеграла, численные значения которых приведены в табл. 4. Для описания динамического поведения нам потребуются только функции $\beta(v)$ и $\gamma_\lambda(v)$:

$$\beta(v) = -(4 - d) \left[\frac{\partial \ln Z_v v}{\partial v} \right]^{-1}, \quad \gamma_\lambda(v) = \beta(v) \frac{\partial \ln Z_\lambda}{\partial v}. \tag{16}$$

Явный вид первой из них в шестипетлевом приближении был получен в работе [12]. Последовательное применение изложенной выше схемы теоретико-полевого подхода позволило получить нам выражение для динамической скейлинговой функции $\gamma_\lambda(v)$ в четырехпетлевом приближении в виде

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda(v) &= -(4 - d)v[2(B_1 - C_1) + (3B_2 - 3C_2 - 4A_1B_1 + 4A_1C_1)v + \\ &+ (4B_3 - 4C_3 - 9A_1B_2 + 9A_1C_2 + 10A_1^2B_1 - 10A_1^2C_1 - 4A_2B_1 + \\ &+ 4A_2C_1 - 8B_1D_1 + 6B_1^2 - 2C_1^2)v^2]. \end{aligned} \tag{17}$$

Подставляя значения коэффициентов из табл. 3, получаем при $d = 3$ и $n = 1$

$$\gamma_\lambda(v) = 0.008399v^2 - 0.000045v^3 + 0.020423v^4. \quad (18)$$

В соответствии с [12]

$$\beta(v) = -v + v^2 - 0.422497v^3 + 0.351069v^4 - 0.376527v^5. \quad (19)$$

Таблица 3

Значения коэффициентов в выражениях для вершинных функций

Кэфф.	$d = 3$	$d = 2$
A_1	-1.0	-1.0
A_2	1.2222222	1.3750699
A_3	-1.7053479	-2.3054548
B_1	0.0054869	0.0084916
B_2	-0.0070112	-0.0116591
B_3	0.0101430	0.0179966
C_1	0.0096865	0.0152547
C_2	-0.0126257	-0.0213740
C_3	0.0169420	0.0352450

Для вычисления значений константы связи v^* в фиксированной точке и динамического критического индекса z мы применили метод суммирования Паде-Бореля с использованием соответственно аппроксимант [4/1] и [3/1]. В результате были получены следующие значения при $d = 3$ и $n = 1$:

$$v^* = 1.4299, \quad z_{pure}^{(4)} = 2.017.$$

Сопоставление полученных результатов показывает значительные различия в значениях динамического индекса z для однородной и неупорядоченной моделей Изинга. Это дает возможность выявить влияние примесей на динамическое критическое поведение как в реальном физическом эксперименте, так и в компьютерном эксперименте при численном моделировании методами Монте-Карло.

Проведем сравнение полученного значения динамического индекса $z_{imp}^{(3)}$ с результатами компьютерного моделирования динамического критического поведения неупорядоченной модели Изинга [14-16]. В работах [14, 15] было осуществлено компьютерное моделирование процессов критической релаксации намагниченности в системе с размерами 48^3 с концентрацией спинов $0.4 \leq p \leq 1$. Для определения динамического критического индекса z был использован метод Монте-Карло совместно с методом динамической ренорм-группы [17]. Для однородной и слабонеупорядоченных систем с $p = 0.95; 0.8$ были получены следующие значения критического индекса:

$$z(1.0) = 1.97 \pm 0.08, \quad z(0.95) = 2.19 \pm 0.07, \quad z(0.8) = 2.20 \pm 0.08,$$

которые находятся в хорошем согласии с результатами проведенных расчетов. В работе [16] значения индекса z получались на основе анализа асимптотических свойств динамической автокорреляционной функции для системы, находящейся в состоянии

равновесия и демонстрирующей сильные флуктуации намагниченности. Так, для однородной системы было получено

$$z(1.0) = 2.095 \pm 0.008,$$

для слабонеупорядоченных систем

$$z(0.95) = 2.16 \pm 0.01, \quad z(0.9) = 2.232 \pm 0.004, \quad z(0.8) = 2.38 \pm 0.01$$

и при $p = 0.6$

$$z(0.6) = 2.93 \pm 0.03.$$

Придерживаясь концепции, что фиксированная точка критического поведения слабонеупорядоченных систем, не зависящая от концентрации примесей, оказывается таковой и для любой концентрации примесей, автор работы [16] оценивает асимптотическое значение динамического индекса как $z = 2.4 \pm 0.1$. Полученное в [16] значение индекса z для однородной системы находится в сильном несоответствии с результатами теоретико-полевого подхода, в то же время для $p = 0.95$ согласие значений на удивление хорошее. Наша точка зрения относительно универсальности критического поведения неупорядоченных систем была высказана в работах [14, 15], где предлагается отделять универсальное критическое поведение слабонеупорядоченных систем от аналогичного для сильнонеупорядоченных систем и выдвигается гипотеза ступенчатой универсальности критических индексов для трехмерных неупорядоченных систем.

Предсказание теории относительно влияния примесей на динамическое критическое поведение магнетиков (более высокое значение $z_{imp}(d = 3)$ по сравнению с $z_{pure}(d = 3)$) может быть зафиксировано в ряде экспериментальных методов: по неупругому рассеянию нейтронов (ширина линии $\omega_\varphi \propto |T - T_c|^{z\nu}$ при $q = 0$ и $\omega_\varphi \propto q^z$ при $T = T_c$); в магнитных резонансных методах ЭПР и ЯМР (ширина линии резонанса $\Delta\omega \propto |T - T_c|^{(d-2+\eta-z)\nu}$, где η — индекс Фишера); по измерению динамической восприимчивости во внешнем высокочастотном магнитном поле ($\chi(\omega) \propto \omega^{-\gamma/z\nu}$ при $T = T_c$, где γ — индекс восприимчивости); в ультразвуковых экспериментах (коэффициент поглощения звука $\alpha(\omega) \propto |T - T_c|^{-(\alpha+z\nu)}\omega^2 g(\omega/|T - T_c|^{z\nu})$, дисперсия звука $C^2(\omega) - C^2(0) \propto |T - T_c|^{-\alpha} f(\omega/|T - T_c|^{z\nu})$). К сожалению, нам не известны работы, в которых проводилось бы экспериментальное исследование динамического критического поведения слаборазбавленных изинговски-подобных магнетиков.

Критическая динамика слабонеупорядоченной двумерной модели Изинга в релаксационном режиме не отличается от динамики однородной модели [13]. Анализ результатов описания критической динамики двумерной модели Изинга показывает, что получаемые значения индекса z лежат в достаточно широком интервале: $2.08 \leq z \leq 2.24$. Так, результаты компьютерного моделирования: $z = 2.14 \pm 0.02$ [18], 2.13 ± 0.03 [19], 2.076 ± 0.005 [20], 2.24 ± 0.04 [21], 2.24 ± 0.07 [22], 2.16 ± 0.04 [23]; теоретико-полевого подхода в двухпетлевом приближении при интерполяции результатов $1 + \varepsilon$ - и $4 - \varepsilon$ -разложений: $z = 2.126$ [24] и высокотемпературного разложения: $z = 2.183 \pm 0.005$ [25]. Нами были проведены вычисления динамического индекса z для однородной двумерной модели Изинга в четырехпетлевом приближении в рамках теоретико-полевого подхода. Соответствующие значения коэффициентов в выражениях (15) для вершинных функций и численные значения четырехпетлевых диаграмм для двумерной модели приведе-

Таблица 4

Значения четырехпетлевых диаграмм

№	$d = 3$	$d = 2$	№	$d = 3$	$d = 2$	№	$d = 3$	$d = 2$
1	0.104869	0.165307	17	0.001108	0.004131	33	0.002527	0.007463
2	0.004166	0.009670	18	0.000923	0.003307	34	0.014580	0.029449
3	0.008180	0.022921	19	0.000932	0.003343	35	0.039776	0.070254
4	0.029674	0.059714	20	0.019410	0.034609	36	0.002378	0.006421
5	0.003264	0.003943	21	0.019189	0.034135	37	0.004691	0.012723
6	0.015354	0.010076	22	0.004177	0.011294	38	0.003820	0.007370
7	0.014330	0.028777	23	0.001928	0.004644	39	0.011650	0.027311
8	0.011627	0.016314	24	0.000706	0.005891	40	0.005377	0.013297
9	-0.002506	-0.006853	25	0.003421	0.010167	41	0.003981	0.007464
10	0.000823	0.002744	26	0.000862	0.003535	42	0.003314	0.010303
11	0.003444	0.009238	27	0.000551	0.002471	43	0.009470	0.023519
12	0.003745	0.010685	28	0.003898	0.011209	44	0.003866	0.010905
13	-0.004883	-0.012280	29	0.001077	0.003405	45	0.023730	0.038420
14	-0.004883	-0.012280	30	0.003815	0.011007	46	0.033485	0.062921
15	0.007527	0.017180	31	0.007379	0.012666	47	0.007121	0.021633
16	-0.005471	-0.014199	32	0.004177	0.009667	48	0.004760	0.011691

ны в табл. 3 и 4. В результате были получены следующие выражения для скейлинговых функций:

$$\begin{aligned}\gamma_\lambda(v) &= 0.027053v^2 - 0.004184v^3 + 0.022130v^4, \\ \beta(v) &= -v + v^2 - 0.716174v^3 + 0.930766v^4 - 1.582388v^5,\end{aligned}\tag{20}$$

откуда после суммирования методом Паде–Бореля были найдены значения константы связи v^* в фиксированной точке и значения индекса z

$$v^* = 1.8836, \quad z^{(4)}(d = 2) = 2.093.$$

Видно, что полученный индекс z находится на нижней границе отмеченного выше интервала. Используемую нами процедуру расчета индексов принято рассматривать как наиболее точную, поэтому вычисленные значения, мы надеемся, могут служить эталонами для работ по компьютерному моделированию однородных систем и использоваться при обработке методики моделирования неупорядоченных систем.

Исследования поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 97-02-16124).

Литература

1. A. V. Harris, J. Phys. C **7**, 1671 (1974).
2. Д. Е. Хмельницкий, ЖЭТФ **68**, 1960 (1975).
3. С. Jayaprakash and H. J. Katz, Phys. Rev. B **16**, 3987 (1977).
4. I. O. Mayer, A. I. Sokolov, and B. N. Shalaev, Ferroelectrics **95**, 93 (1989).
5. I. O. Mayer, J. Phys. A **22**, 2815 (1989).
6. P. C. Hohenberg and B. I. Halperin, Rev. Mod. Phys. **49**, 435 (1977).
7. C. De Dominicis, Nuovo Cimento Lett. **12**, 567 (1975).
8. E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. D **8**, 434, 2418 (1973).
9. V. V. Prudnikov and I. D. Lawrie, J. Phys. C **17**, 1655 (1984).
10. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1976).
11. С. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **68**, 273 (1975).
12. G. A. Baker, B. G. Nickel, and D. I. Meiron, Phys. Rev. B **17**, 1365 (1978).
13. В. В. Прудников, А. Н. Вакилов, ЖЭТФ **101**, 1853 (1992).
14. В. В. Прудников, А. Н. Вакилов, Письма в ЖЭТФ **55**, 709 (1992).
15. В. В. Прудников, А. Н. Вакилов, ЖЭТФ **103**, 962 (1993).
16. H.-O. Heuer, J. Phys. A **26**, L-341 (1993).
17. N. Jan, L. L. Moseley, and D. Stauffer, J. Stat. Phys. **33**, 1 (1983).
18. C. Kalle, J. Phys. A **17**, L-801 (1984).
19. J. K. Williams, J. Phys. A **18**, 49 (1985).
20. M. Mori and Y. Tsuda, Phys. Rev. B **37**, 5444 (1988).
21. P. H. Poole, N. Jan, and D. I. Meiron, J. Phys. A **23**, L-453 (1990).
22. V. V. Prudnikov and O. N. Markov, J. Phys. A **28**, 1549 (1995).
23. F. Wang, N. Hatane, M. Suzuki, J. Phys. A **28**, 4543 (1995).
24. R. Bausch, V. Dohm, H. K. Janssen, and R. K. P. Zia, Phys. Rev. Lett. **47**, 1837 (1981).
25. B. Daman and I. D. Reger, Z. Phys. B **98**, 97 (1995).