

**ЯВЛЕНИЯ ОСЦИЛЛЯЦИЙ В ХОЛОДНОЙ МАТЕРИИ С  
ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ***А. С. Вшивцев\***Московский институт радиотехники, электроники и автоматики  
117454, Москва, Россия**М. А. Вдовиченко**Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
117899, Москва, Россия**К. Г. Клименко†**Институт физики высоких энергий  
142284, Протвино, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 29 января 1998 г.

Исследована фазовая структура модели Намбу–Йона–Лазинию в пространстве-времени с топологией  $R^3 \times S^1$  (компактифицирована пространственная координата) и химическим потенциалом  $\mu$ . В плоскости  $\mu\lambda$  (где  $\lambda = 1/L$ ,  $L$  — длина окружности  $S^1$ ) построены фазовые портреты модели в случае с периодическими граничными условиями. Впервые показано, что в модели существует бесконечное число как кирально-симметричных безмассовых фаз, так и несимметричных массивных фаз, переходы между которыми (как правило) являются фазовыми переходами второго рода. Благодаря такой фазовой структуре при изменении параметра  $\lambda$  осциллируют плотность частиц, масса фермионов и критическая кривая, на которой восстанавливается киральная инвариантность.

**1. ВВЕДЕНИЕ**

Изучение эффектов, связанных с наличием конечной плотности, температуры и внешних полей, является актуальной задачей и может открыть нам новые явления, которые ранее не были известны. К такого рода эффектам можно отнести осцилляции намагниченности электронного газа в металлах [1], предсказание существования «янг-миллсовского» кристалла [2]. Кроме того, изучение вещества в экстремальных условиях оказывается необходимым для последовательного построения теории сильных взаимодействий [3], а также при описании различных моделей звезд [4].

Исследование воздействия внешних факторов для нелинейных теорий, каковыми являются четырехфермионные теории, приводит к открытию новых эффектов. Это оказывается весьма важно, поскольку теории с взаимодействием такого вида находят применение для объяснения широкого круга явлений. Так, мы укажем на их использование при объяснении сверхпроводимости [5] и высокотемпературной сверхпроводимости [6].

\*E-mail: alexandr@vvas.msk.ru

†E-mail: kklm@mx.ihep.su

Отметим также общетеоретический интерес к теориям такого типа, который обусловлен тем, что единая теория всех сил природы, включая гравитационные, еще далека от завершения. Поэтому целесообразно изучать квантовые теории полей в пространствах с нетривиальной метрикой и топологией, в которых вероятнее всего существовала Вселенная на ранних стадиях своей эволюции [7]. При этом особое внимание уделяется, в частности, пространствам вида  $R^d \times S^1 \times \dots \times S^1$ . Дело в том, что компактификация одной или нескольких пространственных координат происходит в некоторых суперструнных теориях [8], описание явлений типа эффекта Казимира также удобно проводить в пространствах с такой топологией [9]; наконец, исследуя теории в пространствах с простейшей нетривиальной топологией, можно делать обобщения и предвидеть свойства физических систем в пространствах с более сложной структурой.

В физике элементарных частиц очень плодотворна концепция динамического нарушения симметрии, т. е. спонтанного нарушения симметрии без введения полей Хиггса. Впервые такой механизм нарушения киральной симметрии был обнаружен в моделях с четырехфермионным взаимодействием [10, 11], простейшая из которых имеет лагранжиан вида

$$L_\psi = \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k i \hat{\partial} \psi_k + \frac{G}{2N} \left[ \left( \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k \psi_k \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k i \gamma_5 \psi_k \right)^2 \right] \quad (1)$$

и в (3+1)-мерном пространстве называется моделью Намбу–Йона–Лазинио (НЙЛ). Мы будем рассматривать эту модель в  $1/N$ -разложении. Для реализации этой программы мы должны выбрать  $N$ -фермионную версию модели. Здесь следует указать, что разложение по степеням  $1/N$ , характерное для моделей типа Намбу–Йона–Лазинио и Гросса–Невье, является квазиклассическим по этому параметру, сам же параметр  $1/N$  является аналогом планковской постоянной. Отметим, что при данном типе разложений мы фактически в каждом порядке по данному параметру разложения имеем суммированные бесконечные ряды фейнмановских диаграмм. Строгое математическое рассмотрение такого типа моделей как квантование классической механики с нелинейным фазовым пространством выполнено в работах [12]. Важным с точки зрения физических приложений этого метода является тот факт, что, несмотря на строгое математическое требование стремления параметра  $N$  к бесконечности, в реальности значение его можно ограничить вплоть до 3. Этим в значительной мере пользуются в настоящее время, например, в квантовой хромодинамике [3, 13]. Получаемые (даже при таком значении  $N$ ) результаты оказываются тем не менее таковыми, что они качественно правильно воспроизводят особенности описываемой в рамках этой модели физической системы. Более того, имеющиеся по  $1/N$ -разложению работы, в которых проводится учет следующих порядков разложения, указывают на то, что эти уточнения не меняют физической картины, а уточняются лишь те или иные численные значения параметров [14]. Сказанное позволяет надеяться на то, что получаемые на основе этого подхода результаты являются надежными.

В дальнейшем в нашей работе мы будем рассматривать  $N$ -фермионную версию модели, которая при этом инвариантна относительно простейших непрерывных киральных преобразований:

$$\psi_k \rightarrow \exp(i\theta \gamma_5) \psi_k \quad (k = 1, \dots, N). \quad (2)$$

Идея динамического нарушения симметрии также находит применение для объяснения сверхпроводимости [15] и высокотемпературной сверхпроводимости [16], при описании низкоэнергетической физики мезонов [17], построении альтернативных моделей электрослабого взаимодействия [18] и т. д. Недавно было показано, что одним из источников динамического нарушения симметрии (киральной) являются внешние магнитные и хромомагнитные поля [19].

Одним из интересных фактов, продемонстрированных в последнее время, является тот, что низкоэнергетические модели типа НЙЛ могут быть последовательно построены исходя из первых принципов квантовой хромодинамики (КХД) [20]. С учетом этого становится актуальным вопрос о предсказании эффектов, которые было бы возможно обнаружить в рамках таких моделей. Известно также, что основное состояние КХД содержит ненулевой глюонный конденсат  $\langle 0|F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a|0\rangle = 0.215 \text{ ГэВ}^2$ , структура которого (исходя из модельных решеточных вычислений) имеет хромомагнитную компоненту.

Естественно, что в силу многочисленных физических приложений явление динамического нарушения симметрии исследовалось и в пространствах с нетривиальными метрикой и топологией [21–24]. В частности, в работах [22, 23] рассматривались свойства различных моделей с четырехфермионным взаимодействием в пространствах вида  $R^2 \times S^1 \times S^1$ ,  $R^1 \times S^3$ , а в работах [24] изучалась структура вакуума моделей типа НЙЛ в присутствии внешнего магнитного поля в пространстве с ненулевой кривизной.

Поскольку в реальности многие явления происходят при ненулевой плотности частиц (сверхпроводимость, эффект Холла, процессы в нейтронных звездах и т. д.), в предлагаемой работе также изучается эффект динамического нарушения симметрии с учетом химического потенциала  $\mu$ . Мы рассматриваем фазовую структуру модели НЙЛ в односвязном пространстве вида  $R^3 \times S^1$  при наличии ненулевых значений  $\mu$ . (Здесь компактифицирована одна из пространственных координатных осей, длина окружности  $S^1$  равна  $L$ , а фермионные поля удовлетворяют периодическим граничным условиям.) Оказывается, что присутствие химического потенциала коренным образом меняет фазовый портрет модели и приводит к осцилляциям плотности числа частиц, а также других связанных с ней физических величин. Это один аспект данной темы. Еще один и, может быть, более важный тот, что данная модельная задача допускает (после некоторых модификаций) расширение на круг физически более реалистичных задач. К таковым относятся четырехфермионные модели с учетом взаимодействия с магнитным полем или же фермионы с взаимодействием такого вида, находящиеся в периодических структурах (кристаллические решетки и т. д.) [25]. Общими наблюдаемыми физическими эффектами для этих моделей являются осцилляции на фазовой плоскости, множества массивных и безмассовых фаз, а также осцилляций плотности частиц в этих фазах.

В качестве метода исследования теории описываемой лагранжианом (1) нами будет использован метод эффективного потенциала [7, 13]. Как хорошо известно, он фактически является несколько иной формой представления метода «квазисредних». Поэтому получаемые на его основе результаты могут быть строго обоснованы, например, в рамках континуального интеграла.

2. ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА МОДЕЛИ ПРИ  $\mu \neq 0$ ,  $L = \infty$  И ПРИ  $\mu = 0$ ,  $L \neq \infty$ 

Предлагаемая работа в идейном плане является продолжением работ [26, 27] по исследованию вакуума модели НЙЛ при наличии различных внешних условий<sup>1)</sup>. Сформулируем основные результаты, полученные в [26, 27], и приведем необходимые для дальнейшего исследования математические формулы.

2.1. Случай  $\mu \neq 0$ ,  $L = \infty$ 

Для начала напомним свойства вакуума теории (1) при  $\mu = 0$  в пространстве Минковского, т.е. при  $L = \infty$ . С этой целью вместо (1) рассмотрим вспомогательный лагранжиан

$$L_\sigma = \bar{\psi} i \hat{\partial} \psi - \bar{\psi} (\sigma_1 + i \sigma_2 \gamma_5) \psi - \frac{N}{2G} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \quad (3)$$

(здесь для простоты у  $\psi$  опущен индекс  $k$ , нумерующий ферми-поля), который в уравнениях движения для вспомогательных бозонных полей  $\sigma_{1,2}$  эквивалентен исходному лагранжиану (1).

Эффективное действие модели в главном порядке  $1/N$ -разложения определяется следующим образом:

$$\exp [iN S_{eff}(\sigma_{1,2})] = \int D\bar{\psi} D\psi \exp \left( i \int L_\sigma d^4x \right),$$

где

$$S_{eff}(\sigma_{1,2}) = - \int d^4x \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2G} - i \ln \det(i\hat{\partial} - \sigma_1 - i\gamma_5\sigma_2). \quad (4)$$

Полагая здесь поля  $\sigma_{1,2}$  не зависящими от координат пространства-времени (это обусловлено тем, что мы ищем вакуумные решения), имеем по определению

$$S_{eff}(\sigma_{1,2}) = -V_{eff}(\sigma_{1,2}) \int d^4x, \quad (5)$$

где

$$V_{eff}(\sigma_{1,2}) = \frac{\Sigma^2}{2G} + 2i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln(\Sigma^2 - p^2) \equiv V_0(\Sigma), \quad (6)$$

$$\Sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Переходя в (6) к евклидовой метрике ( $p_0 \rightarrow ip_0$ ) и вводя лоренц-инвариантное обрезаение области интегрирования ( $p^2 \leq \Lambda^2$ ), получаем

<sup>1)</sup> Следует отметить, что в более ранних работах [28, 29] рассматривалось влияние температуры, химического потенциала, а также различных внешних калибровочных полей на фазовую структуру этой модели.

$$V_0(\Sigma) = \frac{\Sigma^2}{2G} - \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \Lambda^4 \ln \left( 1 + \frac{\Sigma^2}{\Lambda^2} \right) + \Lambda^2 \Sigma^2 - \Sigma^4 \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2} \right) \right\}. \quad (7)$$

Уравнение стационарности для функции (7) имеет вид

$$\frac{\partial V_0(\Sigma)}{\partial \Sigma} = 0 = \frac{\Sigma}{4\pi^2} \left\{ \frac{4\pi^2}{G} - \Lambda^2 + \Sigma^2 \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2} \right) \right\}. \quad (8)$$

Отсюда видно, что при  $G < G_c = 4\pi^2/\Lambda^2$  уравнение (8) не имеет решений кроме  $\Sigma = 0$ , т. е. в этом случае фермионы безмассовы и киральная инвариантность (2) не нарушена.

Если  $G > G_c$ , то уравнение стационарности (8) будет иметь одно нетривиальное решение, на котором располагается глобальный минимум потенциала  $V_0(\Sigma)$ , что означает спонтанное нарушение киральной симметрии и появление у фермионов ненулевой массы.

Предположим теперь, что  $\mu > 0$ . Этот случай подробно рассмотрен в [26], где и было получено выражение для соответствующего эффективного потенциала (вид  $V_0(\Sigma)$  дан в (7)):

$$V_\mu(\Sigma) = V_0(\Sigma) - 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \theta \left( \mu - \sqrt{\Sigma^2 + p^2} \right) \left( \mu - \sqrt{\Sigma^2 + p^2} \right). \quad (9)$$

Здесь  $\theta(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда. Вычисляя интеграл, приведенный в этой формуле, имеем

$$V_\mu(\Sigma) = V_0(\Sigma) - \frac{\theta(\mu - \Sigma)}{16\pi^2} \left\{ \frac{10}{3} \mu (\mu^2 - \Sigma^2)^{3/2} - 2\mu^3 \sqrt{\mu^2 - \Sigma^2} + \Sigma^4 \ln \left[ \frac{(\mu + \sqrt{\mu^2 - \Sigma^2})^2}{\Sigma^2} \right] \right\}. \quad (10)$$

В работах [26] на основе исследования точки абсолютного минимума этого потенциала обнаружены неизвестные ранее свойства модели НЙЛ. В частности, было показано, что здесь при ненулевых значениях химического потенциала состояние с массивными фермионами описывается двумя различными фазами, переход между которыми — фазовый переход второго рода. Там же доказано, что восстановление киральной симметрии модели может происходить с помощью фазовых переходов как первого, так и второго родов в зависимости от значений параметров модели. В плоскости переменных  $\mu$  и  $M$ , где  $M$  — динамическая масса фермионов при  $\mu = 0$ , был построен фазовый портрет модели НЙЛ, на котором существуют две трикритические точки.

### 2.2. Случай $\mu = 0, L \neq \infty$

Предположим теперь, что пространство-время имеет структуру  $R^3 \times S^1$ , где компактифицирована одна из пространственных координат, а длина окружности  $S^1$  — конечная величина  $L$ . Здесь следует различать два случая. В одном из них поля модели (1) удовлетворяют периодическим по компактифицированной координате граничным условиям, т. е.

$$\psi(t, x + L, y, z) = \psi(t, x, y, z). \quad (11)$$

В другом — поля антипериодичны по этой координате. Однако этот последний случай в работе рассматриваться не будет.

Теперь, чтобы получить эффективный потенциал при  $L \neq \infty$ , необходимо в (6) интегрирование по  $p_1$  заменить на суммирование по дискретным значениям  $p_{1n}$  по следующему правилу:

$$\int \frac{dp_1}{2\pi} f(p_1) \rightarrow \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p_{1n}), \quad p_{1n} = \frac{2\pi n}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12)$$

Переходя в полученном выражении к евклидовой метрике и суммируя по  $n$  [30], находим эффективный потенциал модели НЙЛ в пространстве с топологией  $R^3 \times S^1$ :

$$V_L(\Sigma) = V_0(\Sigma) - \frac{2}{\pi^2 L} \int_0^{\infty} dx x^2 \ln \left[ 1 - \exp \left( -L\sqrt{x^2 + \Sigma^2} \right) \right]. \quad (13)$$

Потенциал (13) имеет ультрафиолетовую расходимость, которая сосредоточена в первом слагаемом. Для ее устранения мы будем по-прежнему использовать регуляризацию с помощью обрезания в (6) области интегрирования лоренц-инвариантным образом. Это приводит к выражению (7) для  $V_0(\Sigma)$ . Исследуем функцию (13) на абсолютный минимум по переменной  $\Sigma$ . При этом в силу четности потенциала  $V_L(\Sigma)$  можно рассматривать только неотрицательные значения  $\Sigma$ . Уравнение стационарности для этой функции имеет вид

$$\frac{\partial V_L(\Sigma)}{\partial \Sigma} = 0 = \frac{2\Sigma}{\pi^2} \{F(\Sigma) - I(\Sigma)\}, \quad (14)$$

где

$$F(\Sigma) = \frac{\pi^2}{2G} - \frac{\Lambda^2}{8} + \frac{\Sigma^2}{8} \ln \left[ 1 + \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2} \right], \quad I(\Sigma) = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + \Sigma^2}} \frac{1}{\exp \left( L\sqrt{x^2 + \Sigma^2} \right) - 1}. \quad (15)$$

Отсюда (см. [27]) следует, что

$$F(0) = \frac{\pi^2}{2G} - \frac{\Lambda^2}{8}, \quad I(0) = \frac{\pi^2}{6L^2}. \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что на полуинтервале  $\Sigma \geq 0$  функция  $F(\Sigma)$  монотонно возрастает от значения  $F(0)$  при  $\Sigma = 0$  до  $\pi^2/(2G)$  при  $\Sigma = \infty$ . С другой стороны,  $I(\Sigma)$  является здесь функцией, монотонно убывающей от  $I(0)$  до нуля. Следовательно, графики этих функций при  $F(0) < I(0)$  обязательно пересекаются в единственной точке  $\Sigma_0(L)$ , которая и будет являться нетривиальным решением уравнения стационарности (14). Введем в рассмотрение новую величину  $\lambda = 1/L$ . Тогда (см. [27]) ненулевой корень  $\Sigma_0(\lambda) (\equiv \Sigma_0(L))$  уравнения (14) монотонно возрастает с ростом  $\lambda$ .

Рассмотрим два случая: 1)  $G > G_c$ , 2)  $G < G_c$  (величина  $G_c$  определена после формулы (8)). В первом случае, как следует из (16),  $F(0) < 0$ , поэтому при любых

значениях  $\lambda$  уравнение (14) имеет нетривиальное решение  $\Sigma_0(\lambda)$ , на котором у потенциала  $V_L(\Sigma)$  находится абсолютный минимум. Следовательно, при  $G > G_c$  вакуум модели НЙЛ не имеет киральной симметрии. Кроме того, очевидно, что  $\Sigma_0(\lambda) \rightarrow M$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , где  $M$  — решение уравнения стационарности при  $L = \infty$ .

Рассмотрим второй случай, для которого  $F(0) > 0$ , и введем обозначение

$$F(0) = \frac{\pi^2}{2G} - \frac{\Lambda^2}{8} \equiv \frac{\pi^2}{6} \lambda_0^2. \tag{17}$$

Ясно, что при  $\lambda < \lambda_0$  (т. е. при  $F(0) > I(0)$ ) уравнение стационарности (14) имеет только тривиальное решение, и симметрия модели НЙЛ не нарушена. В точке  $\lambda = \lambda_0$  в теории происходит фазовый переход второго рода, и при  $\lambda > \lambda_0$  симметрия модели спонтанно нарушена, так как точка глобального минимума потенциала  $\Sigma_0(\lambda)$  здесь не равна нулю. Нетрудно получить асимптотику этого решения уравнения стационарности при  $\lambda \rightarrow \lambda_0^+$  [27]:

$$\Sigma_0(\lambda) = \frac{2}{3} \pi (\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0). \tag{18}$$

Можно также показать [27], что как при  $G > G_c$ , так и при  $G < G_c$ , решение  $\Sigma_0(\lambda)$  имеет следующую асимптотику при  $\lambda \rightarrow \infty$ :

$$\Sigma_0(\lambda) \sim 2\pi\lambda \cdot (2.719\dots). \tag{19}$$

Наконец, для дальнейшего необходимо отметить очевидный факт, что  $F(\Sigma) - I(\Sigma)$  является монотонно возрастающей функцией на полуинтервале  $\Sigma \geq 0$ .

### 3. ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА МОДЕЛИ ПРИ $\mu \neq 0$ , $L \neq \infty$ В СЛУЧАЕ $G < G_c$

Эффективный потенциал модели НЙЛ в главном порядке  $1/N$  в этом случае можно получить из формулы (9) с помощью преобразования (12) (мы будем иметь дело только с периодическими граничными условиями (11)):

$$V_{\mu L}(\Sigma) = V_L(\Sigma) - \frac{\lambda}{6\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \theta(\mu - \sqrt{\Sigma^2 + (2\pi\lambda n)^2}) \times \\ \times \left[ \mu - \sqrt{\Sigma^2 + (2\pi\lambda n)^2} \right]^2 \left[ \mu + 2\sqrt{\Sigma^2 + (2\pi\lambda n)^2} \right]. \tag{20}$$

Напомним, что здесь  $\lambda = 1/L$ . Кроме того,  $\alpha_n = 2 - \delta_{n0}$ . Уравнение стационарности для функции (20) имеет вид

$$\frac{\partial V_{\mu L}(\Sigma)}{\partial \Sigma} = \frac{2\Sigma}{\pi^2} \left\{ F(\Sigma) - I(\Sigma) + \frac{\lambda\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \theta \left( \mu - \sqrt{\Sigma^2 + (2\pi\lambda n)^2} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[ \mu - \sqrt{\Sigma^2 + (2\pi\lambda n)^2} \right] \right\} \equiv \frac{2\Sigma}{\pi^2} \phi(\Sigma) = 0. \tag{21}$$

Нас интересует фазовая структура модели (1), поэтому каждой точке плоскости  $\mu, \lambda$ , где  $\mu \geq 0$ ,  $\lambda \geq 0$ , необходимо поставить в соответствие некоторую фазу НЙЛ-теории.

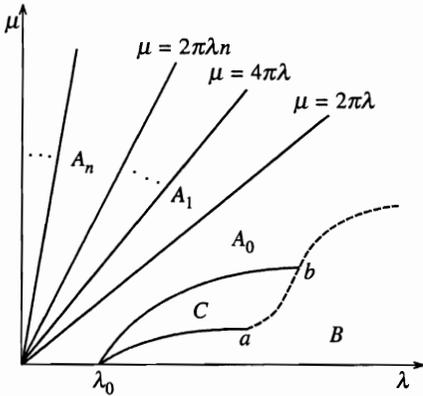


Рис. 1

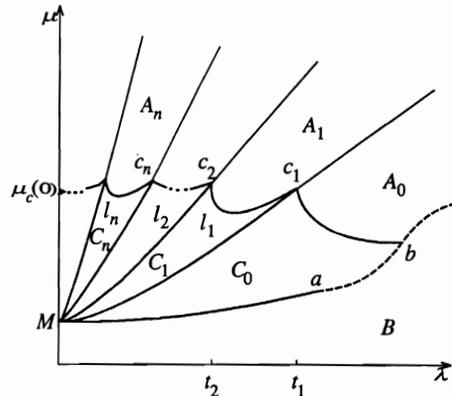


Рис. 2

Структура потенциала (20) диктует следующую стратегию исследования этой функции на абсолютный минимум. Разобьем плоскость параметров  $(\mu, \lambda)$  на области  $\omega_k$  такие, что

$$(\mu, \lambda) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \omega_k, \quad \omega_k = \{(\mu, \lambda) : 2\pi\lambda k \leq \mu < 2\pi\lambda(k+1)\}. \quad (22)$$

Если зафиксировать  $\mu$  и  $\lambda$  в произвольной области  $\omega_k$ , то отличный от нуля вклад в выражения (20), (21) будут давать только  $(k+1)$  первых слагаемых, стоящих под знаком суммы в (20), (21). Далее мы будем последовательно перебирать все области, начиная с  $\omega_0$ , и в каждой из них находить фазовую структуру модели.

В области  $\omega_0$  фазовый портрет модели получен в [27] с помощью довольно трудоемкого анализа эффективного потенциала (20). Оказывается, что здесь при  $\Lambda^2 < \Lambda_0^2 \equiv 16\pi^2\lambda_0^2 \cdot (0.926\dots)$  существуют две фазы: кирально-симметричная с безмассовыми фермионами фаза  $A_0$  и фаза  $B$ , в которой симметрия (2) спонтанно нарушена, а одночастичные фермионные возбуждения вакуума имеют ненулевую массу. Если  $\Lambda^2 > \Lambda_0^2$ , то на фазовой диаграмме модели появится еще одна массивная фаза  $C$ . Именно этот случай отражен на части рис. 1, где к области  $\omega_0$  относятся все точки, лежащие под прямой  $\mu = 2\pi\lambda$ . На этом рисунке штрихами обозначены фазовые кривые первого рода, все остальные линии — это критические кривые фазовых переходов второго рода. Точки  $a$  и  $b$  в области  $\omega_0$  являются трикритическими точками.

Предположим теперь, что мы находимся вблизи границы области  $\omega_0$ , отделяющей ее от  $\omega_1$ , т. е. во множестве  $A_0$  на рис. 1. В этом случае в эффективный потенциал (20) из всей суммы дает вклад только слагаемое, соответствующее  $n = 0$ , а его глобальный минимум находится в точке  $\Sigma = 0$  (см. [27]). При переходе в область  $\omega_1$  в эффективном потенциале (20) появится дополнительное отличное от нуля слагаемое, соответствующее  $n = 1$ . Оно дает ненулевой вклад в потенциал только в окрестности начала координат, определяемой условием  $0 \leq \Sigma \leq \sqrt{\mu^2 - (2\pi\lambda)^2}$ , и еще больше увеличивает глубину потенциальной ямы в точке  $\Sigma = 0$ . Следовательно, точка  $\Sigma = 0$  является точкой абсолютного минимума потенциала и в области  $\omega_1$ . По аналогии нетрудно видеть, что  $\Sigma = 0$

является точкой глобального минимума потенциала (20) и во всех других областях:  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  и т.д.

Напомним, что термодинамический потенциал  $\Omega$  системы можно определить как значение его эффективного потенциала в точке глобального минимума. Поэтому во всей плоскости  $\mu\lambda$ , кроме областей  $B$  и  $C$  на рис. 1, термодинамический потенциал имеет вид

$$\Omega(\mu) \equiv V_{\mu L}(0) = V_L(0) - \frac{\lambda}{6\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \theta(\mu - 2\pi\lambda n) (\mu - 2\pi\lambda n)^2 (\mu + 4\pi\lambda n). \quad (23)$$

Известно, что в точках фазового перехода первого (второго) рода разрывны все производные термодинамического потенциала, начиная с первой (со второй). С помощью этого критерия фазовых переходов исследуем фазовую структуру модели в областях  $\omega_1, \omega_2, \dots$

Из (23) видно, что в области  $A_0$ , которая лежит в  $\omega_0$ , термодинамический потенциал системы имеет вид

$$\Omega(\mu) \Big|_{A_0} \equiv V_{\mu L}(0) \Big|_{\omega_0} = V_L(0) - \frac{\lambda\mu^3}{6\pi}. \quad (24)$$

В области  $\omega_1$  он равен

$$\Omega(\mu) \Big|_{\omega_1} \equiv V_{\mu L}(0) \Big|_{\omega_1} = \Omega(\mu) \Big|_{A_0} - \frac{\lambda}{3\pi} (\mu - 2\pi\lambda)^2 (\mu + 4\pi\lambda). \quad (25)$$

Легко видеть, что как сами функции (24) и (25), так и их производные по  $\mu$  непрерывны на линии  $\mu = 2\pi\lambda$ , разделяющей области  $\omega_0$  и  $\omega_1$ . Однако их вторые производные по  $\mu$  на этой линии не совпадают друг с другом. Следовательно, здесь вторая производная термодинамического потенциала системы по  $\mu$  разрывна, и мы имеем фазовый переход второго рода из фазы  $A_0$  в другую безмассовую фазу модели  $A_1$ . С помощью подобных же рассуждений нетрудно показать, что каждой области  $\omega_k$  (22) соответствует своя безмассовая фаза  $A_k$  модели. Границы этих областей на самом деле являются критическими кривыми фазовых переходов второго рода. Фазовый портрет модели при  $G < G_c$  и  $\Lambda^2 > \Lambda_0^2$  представлен на рис. 1.

Предположим теперь, что  $\mu = \text{const}$ . На плоскости  $\mu\lambda$  это будет прямая линия, пересекающая границы областей  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \dots$  в точках

$$\lambda_0 = \frac{\mu}{2\pi}, \quad \lambda_1 = \frac{\mu}{4\pi}, \quad \dots, \quad \lambda_n = \frac{\mu}{2\pi(n+1)}, \dots$$

соответственно. Рассмотрим плотность числа частиц  $N = -\partial\Omega/\partial\mu$  системы как функцию параметра  $\lambda$  при  $\mu = \text{const}$ , т.е.  $N = N(\lambda)$ . Используя (23), нетрудно показать, что функция  $\partial^2\Omega(\mu)/\partial\mu\partial\lambda$  разрывна на границах областей  $\omega_k$ . Следовательно, функция  $N(\lambda)$  непрерывна при  $\lambda \geq 0$ , а ее график в бесконечном числе точек  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$  имеет характерные изломы (такое поведение функции на практике обычно называется осциллирующим), т.е. концентрация числа фермионов осциллирует с изменением величины  $\lambda$ . Особенно четко эти осцилляции выражены при малых (больших) значениях  $\lambda$  ( $L$ ). Чтобы это показать, воспользуемся в (23) суммированием по формуле Пуассона [31, 32]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Phi(n) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_0^{\infty} \Phi(x) \cos(2\pi kx) dx, \quad (26)$$

применение которой дает следующий результат:

$$\Omega(\mu) = V_L(0) - \frac{\mu^4}{12\pi^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{4\lambda^4}{\pi^2 k^4} - \frac{2\mu\lambda^3}{\pi^2 k^3} \sin(\mu k L) - \frac{4\lambda^4}{\pi^2 k^4} \cos(\mu k L) \right]. \quad (27)$$

Напомним, что  $\lambda = 1/L$ . Из (27) видно, что термодинамический потенциал системы содержит составляющую, которая осциллирует при изменении параметра  $L$  с частотой  $\mu/(2\pi)$ . Следовательно, и плотность числа частиц  $N(\lambda)$  также осциллирует при изменении параметра  $L$  с той же частотой.

#### 4. ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА МОДЕЛИ ПРИ $\mu \neq 0$ , $L \neq \infty$ В СЛУЧАЕ $G_c < G$

В рассматриваемом случае  $F(0) < 0$  (см. (16)), поэтому удобно ввести следующее обозначение:

$$F(0) = \frac{\pi^2}{2G} - \frac{\Lambda^2}{8} \equiv -\frac{\pi^2}{6} \bar{\lambda}_0^2. \quad (28)$$

Эффективный потенциал и уравнение стационарности по-прежнему имеют вид (20) и (21) соответственно. В работах [27] фазовая структура модели при  $G_c < G$  была детально исследована в области  $\omega_0$ . Результаты этого анализа для значений константы связи из интервала

$$G_c < G < (1.225\dots)G_c \quad (29)$$

представлены на рис. 2, где под прямой  $\mu = 2\pi\lambda$  (граница области  $\omega_0$ ) и располагается фазовый портрет модели НЙЛ для точек  $(\mu, \lambda) \in \omega_0$ . На этом рисунке сплошные линии — кривые фазовых переходов второго рода, а штриховые — критические кривые фазовых переходов первого рода. Видно, что, как и при  $G < G_c$ , в области  $\omega_0$  у модели есть две трикритических точки  $a$  и  $b$ . Отметим также, что кривая  $c_1 b$  на этом рисунке задается уравнением  $\phi(0) = 0$ , а проекция точки  $c_1$  на ось  $\lambda$  есть  $t_1 \equiv \bar{\lambda}_0/\sqrt{5}$ . Кроме того, кривая  $Ma$  имеет вид  $\mu = \Sigma_0(\lambda)$ , где  $\Sigma_0(\lambda)$  — корень уравнения стационарности (14), который является массой фермионов в фазе  $B$ . (Более подробное описание фазового портрета модели в области  $\omega_0$  можно найти в [27].)

В этом разделе исследуются свойства вакуума модели НЙЛ в областях  $\omega_1, \omega_2, \dots$ . При этом, чтобы не загромождать статью дополнительными вычислениями, мы ограничимся только значениями констант связи, определяемыми неравенством (29).

##### 4.1. Частный случай

Предположим сначала, что  $(\mu, \lambda) \in \omega_1$  (т.е.  $2\pi\lambda < \mu < 4\pi\lambda$ ), а значение  $\lambda$  фиксировано «вблизи»  $t_1$  так, что  $\lambda < t_1$ . В этом случае функция  $\phi(\Sigma)$  из уравнения стационарности (21) имеет вид

$$\phi(\Sigma) = \begin{cases} F(\Sigma) - I(\Sigma), & \text{если } \mu < \Sigma, \\ f_1(\Sigma), & \text{если } \mu_1 < \Sigma < \mu, \\ f_2(\Sigma), & \text{если } 0 < \Sigma < \mu_1, \end{cases} \quad (30)$$

где

$$\mu_1 = \sqrt{\mu^2 - (2\pi\lambda)^2}, \quad f_1(\Sigma) \equiv F(\Sigma) - I(\Sigma) + \frac{\lambda\pi}{2} (\mu - \Sigma),$$

$$f_2(\Sigma) \equiv F(\Sigma) - I(\Sigma) + \frac{\lambda\pi}{2} (\mu - \Sigma) + \lambda\pi \left( \mu - \sqrt{\Sigma^2 + (2\pi\lambda)^2} \right).$$

Для значений констант связи (29) функция  $\phi(\Sigma)$  (30) монотонно возрастает при  $\Sigma \geq 0$ . Ее график для значений  $\mu < 2\pi\lambda$ , т.е. в случае, когда  $f_1(\mu_1) < 0$ , а  $f_1(\mu) > 0$ , изображен на рис. 3. Тогда очевидно, что единственный нуль этой функции  $\Sigma_1(\mu, \lambda)$ , который является массой фермионов в фазе  $C_0$  теории (см. рис. 1), определяется уравнением  $f_1(\Sigma) = 0$ . Важно отметить, что в точке  $\mu_1$  у графика функции  $\phi(\Sigma)$  есть излом, а также тот факт, что  $f_1$  и  $f_2$  монотонно возрастают при увеличении параметра  $\mu$ . Поэтому с ростом  $\mu$  при некотором значении  $\mu = \bar{\mu}_1(\lambda)$  этот излом достигнет оси  $\Sigma$ . А при  $\mu > \bar{\mu}_1(\lambda)$  решением уравнения стационарности станет точка  $\Sigma_2(\mu, \lambda)$ , являющаяся корнем уравнения  $f_2(\Sigma) = 0$ . Наконец, при значении  $\mu = \mu_c(\lambda)$ , определяемом условием  $\phi(0) = f_2(0) = 0$ , масса фермионов обратится в нуль, и имеет место переход в кирально-симметричную фазу модели. Используя (30), можно показать, что

$$\frac{\mu_c(\lambda)}{\pi} = \frac{13\lambda^2 + \bar{\lambda}_0^2}{9\lambda}. \tag{31}$$

Отметим, что описанная выше ситуация справедлива для значений  $t_2 < \lambda < t_1$ , где  $t_2$  является точкой пересечения кривой (31) с верхней границей области  $\omega_1$ :  $t_2 = \bar{\lambda}_0/\sqrt{23}$ .

Покажем теперь, что в точке  $\mu = \bar{\mu}_1(\lambda)$  в системе происходит фазовый переход второго рода. С этой целью отметим, что при  $\mu < \bar{\mu}_1(\lambda)$  термодинамический потенциал системы  $\Omega(\mu)$  имеет вид

$$\Omega(\mu) \Big|_{\mu < \bar{\mu}_1(\lambda)} \equiv \Omega_0(\mu) = V_{\mu L}(\Sigma_1) = V_L(\Sigma_1) - \frac{\lambda}{6\pi} (\mu - \Sigma_1)^2 (\mu + 2\Sigma_1), \tag{32}$$

а при  $\mu_c(\lambda) > \mu > \bar{\mu}_1(\lambda)$  он определяется выражением

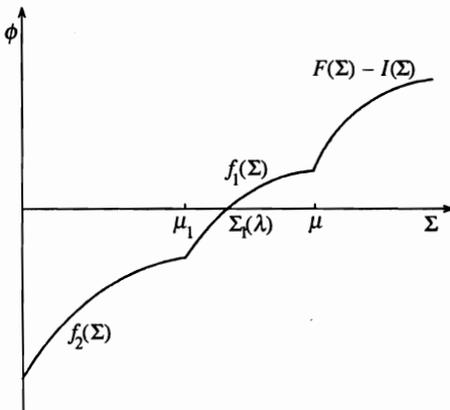


Рис. 3

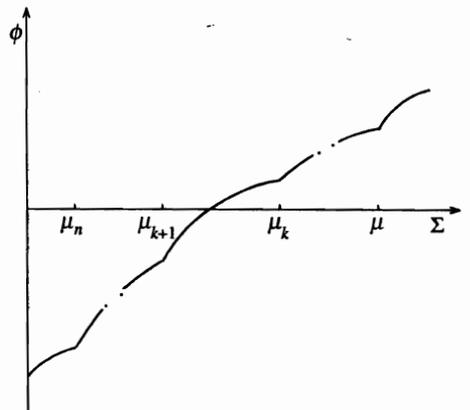


Рис. 4

$$\Omega(\mu) \Big|_{\mu > \bar{\mu}_1(\lambda)} \equiv \Omega_1(\mu) = V_{\mu L}(\Sigma_2) = V_L(\Sigma_2) - \frac{\lambda}{6\pi} (\mu - \Sigma_2)^2 (\mu + 2\Sigma_2) - \frac{\lambda}{3\pi} \left[ \mu - \sqrt{\Sigma_2^2 + (2\pi\lambda)^2} \right]^2 \left[ \mu + 2\sqrt{\Sigma_2^2 + (2\pi\lambda)^2} \right]. \quad (33)$$

В формулах (32), (33) приняты сокращения  $\Sigma_{1,2} \equiv \Sigma_{1,2}(\mu, \lambda)$ . Кроме того, необходимо иметь в виду, что в рассматриваемом случае в эффективном потенциале (20) отличны от нуля только слагаемые, соответствующие  $n \leq 1$  и удовлетворяющие соотношениям  $\Sigma_2 \leq \mu_1 \leq \Sigma_1 \leq \mu$ .

Дифференцируя  $\Omega_0$  по  $\mu$ , имеем

$$\frac{d\Omega_0(\mu)}{d\mu} = \left\{ \frac{\partial V_{\mu L}(\Sigma)}{\partial \mu} + \frac{\partial V_{\mu L}(\Sigma)}{\partial \Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial \mu} \right\} \Big|_{\Sigma = \Sigma_1(\mu, \lambda)} \quad (34)$$

Так как  $\Sigma_1$  является решением уравнения стационарности, второе слагаемое в (34) обращается в нуль. При этом с учетом (32) получаем

$$\frac{d\Omega_0(\mu)}{d\mu} = \frac{\partial V_{\mu L}(\Sigma)}{\partial \mu} \Big|_{\Sigma = \Sigma_1} = -\frac{\lambda}{2\pi} [\mu^2 - \Sigma_1^2(\mu, \lambda)]. \quad (35)$$

Аналогично можно получить

$$\frac{d\Omega_1(\mu)}{d\mu} = -\frac{\lambda}{2\pi} [\mu^2 - \Sigma_2^2(\mu, \lambda)] - \frac{\lambda}{\pi} [\mu^2 - \Sigma_2^2(\mu, \lambda) - (2\pi\lambda)^2]. \quad (36)$$

Далее нам понадобятся соотношения, которые с очевидностью следуют из описания рис. 3 (см. выше):

$$\Sigma_1(\bar{\mu}_1(\lambda), \lambda) = \Sigma_2(\bar{\mu}_1(\lambda), \lambda) = \sqrt{\bar{\mu}_1^2(\lambda) - (2\pi\lambda)^2}. \quad (37)$$

Благодаря (37) нетрудно видеть, что значения функций  $\Omega_{0,1}(\mu)$ , а также их производных по  $\mu$  совпадают в точке  $\mu = \bar{\mu}_1(\lambda)$ . Однако, если еще раз продифференцировать (35) и (36) по  $\mu$  (при этом понадобятся выражения вида  $\partial \Sigma_{1,2} / \partial \mu$ , которые без труда находятся из уравнения стационарности), окажется, что значения вторых производных функций  $\Omega_{0,1}$  не совпадают в этой точке (похожие вычисления проводились в [26]). Таким образом, вторая производная термодинамического потенциала  $\Omega(\mu)$  по  $\mu$  разрывна в точке  $\mu = \bar{\mu}_1(\lambda)$ . Следовательно, эта точка — критическая точка фазового перехода второго рода (напомним, что значение параметра  $\lambda$  фиксировано). Если допустить вариации величины  $\lambda$ , то функции  $\mu = \bar{\mu}_1(\lambda)$  на плоскости  $\mu\lambda$  будет соответствовать критическая кривая фазовых переходов второго рода  $l_1$ , которая разделяет две массивные фазы системы,  $C_0$  и  $C_1$  (см. рис. 2). Наконец, отметим, что кривая  $l_1$  в неявном виде задается уравнением (это следует из (37))

$$\phi \left( \sqrt{\mu^2 - (2\pi\lambda)^2} \right) = 0. \quad (38)$$

### 4.2. Общий случай

В общем случае, когда параметр  $\lambda$  фиксирован без всяких ограничений в области  $0 < \lambda < t_1$ , график функции  $\phi(\Sigma)$  для  $(\mu, \lambda) \in \omega_n$  представлен на рис. 4, где

$$\mu_k = \sqrt{\mu^2 - (2k\pi\lambda)^2}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{39}$$

Если константа связи фиксирована в интервале (29), то  $\phi(\Sigma)$  монотонно возрастает на множестве  $0 \leq \Sigma$  при фиксированных значениях  $\mu$ . Кроме того, при фиксированных  $\Sigma$  функция  $\phi(\Sigma)$  монотонно возрастает по параметру  $\mu$ . Из рис. 4 видно, что первая производная этой функции разрывна в точках  $\mu_k$ , а график ее в этих точках имеет изломы. С ростом  $\mu$  изломы графика  $\phi(\Sigma)$  на рис. 4 смещаются вверх и вправо, а при переходе в область  $\omega_{n+1}$  у функции появляется еще один излом в точке  $\mu_{n+1}$ . В то же время нетривиальный корень уравнения стационарности (21) смещается влево, и каждый раз, когда очередной излом достигает оси  $\Sigma$ , в теории происходит фазовый переход второго рода из одной массивной фазы в другую массивную же фазу (доказывается это аналогично рассмотренному выше случаю). В плоскости  $\mu\lambda$  этим фазовым переходам соответствуют критические кривые  $\mu = \bar{\mu}_k(\lambda)$ , где  $k = 1, 2, \dots$  (на рис. 2 это линии  $l_1, l_2, \dots$ , которые отделяют массивные фазы  $C_0, C_1, C_2, \dots$  друг от друга). Каждая критическая кривая  $l_k$ , очевидно, определяется из уравнения

$$\phi(\mu_k) \equiv \phi\left(\sqrt{\mu^2 - (2k\pi\lambda)^2}\right) = 0. \tag{40}$$

Наконец, при значениях химического потенциала  $\mu = \mu_c(\lambda)$ , которые задаются неявным образом с помощью уравнения

$$\phi(0) = 0 = -\frac{\pi^2}{6}\bar{\lambda}_0^2 - \frac{\pi^2}{6}\lambda^2 + \frac{\lambda\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \theta(\mu - 2\pi\lambda n)(\mu - 2\pi\lambda n), \tag{41}$$

нетривиальный корень уравнения стационарности (тождественно равный массе фермиона) обращается в нуль. На рис. 2 зависимость  $\mu_c(\lambda)$  изображается критической кривой фазовых переходов второго рода  $\mu_c(0)c_n c_2 c_1 b$ , на которой происходит восстановление киральной симметрии модели. (В следующем разделе свойства этой кривой представлены более подробно.) Кривая  $\mu_c(\lambda)$  пересекается с границами областей  $\omega_k$  в точках  $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ . В этих же точках заканчиваются соответственно линии  $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$ , которые все начинаются в точке с координатами  $(M, 0)$  на рис. 2. Таким образом, из нашего анализа следует, что в модели НЙЛ существует бесконечно много массивных фаз  $C_0, C_1, C_2, \dots$  (см. рис. 2).

Аналогично случаю  $G < G_0$  можно без труда показать, что выше кривой  $\mu_c(\lambda)$  находится бесконечно много безмассовых фаз  $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$  (см. рис. 2), границы между которыми проходят по границам областей  $\omega_n$ , т.е. по линиям  $\mu = 2\pi n\lambda$ , где  $n = 1, 2, \dots$ . Каждая из кривых  $\mu = 2\pi n\lambda$  является критической кривой фазовых переходов второго рода из одной безмассовой фазы в другую в силу того, что здесь термодинамический потенциал системы  $\Omega(\mu)$  имеет разрывную вторую производную по  $\mu$ .

### 5. ЯВЛЕНИЯ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ПРИ $G_c < G < (1.225\dots)G_c$

Покажем теперь, что наличие в модели НЙЛ бесконечных наборов как безмассовых, так и массивных фаз приводит к различным осцилляционным явлениям. Частич-

но этот вопрос уже был рассмотрен в разд. 3, где мы показали, что в случае  $G < G_c$  осциллирует плотность частиц вакуума системы.

Будем говорить, что физическая величина осциллирует в зависимости от  $\lambda$  (или других параметров), если ее график в бесконечном числе точек  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  имеет изломы, т. е. ее производная в этих точках разрывна.

Конечно, осциллировать могут и более гладкие функции, поэтому данное определение требует пояснений. Дело в том, что при нулевой температуре и при наличии химического потенциала осцилляции физических величин удовлетворяют, как правило, приведенному выше определению. Связано это с тем, что количество заполненных энергетических уровней системы, т. е. уровней, лежащих ниже поверхности Ферми, дискретным образом зависит от значений внешних параметров. В качестве примера укажем, что намагниченность  $M(H)$  и плотность частиц  $N(H)$  свободного газа фермионов, находящегося во внешнем магнитном поле  $H$ , имеет при нулевой температуре бесконечное число точек разрыва первой производной по  $H$  [31, 32]. Именно это свойство и адекватно осцилляционному поведению намагниченности и плотности, которое при малых значениях  $H$  удается выделить из функций  $M(H), N(H)$  в явном виде с помощью формулы Пуассона (26) [33].

Более гладким поведение термодинамического потенциала становится при ненулевой температуре, однако этот случай в предлагаемой работе не рассматривается, и все разобранные в настоящем разделе типы осцилляций согласуются с нашим определением.

### 5.1. Осцилляции критической кривой $\bar{\mu}_c(\lambda)$

Напомним, что функция  $\mu_c(\lambda)$  определяется как решение уравнения (41). Исследуем ее поведение в произвольной области  $\Omega_k$  ( $2\pi k\lambda \leq \mu < 2\pi(k+1)\lambda$ ) (22). При этом в сумме (41) отличны от нуля только соответствующие неравенству  $n \leq k+1$  слагаемые, после суммирования которых нетрудно получить выражение

$$\mu_c(\lambda)|_{\Omega_k} \equiv \mu_{(k)}(\lambda) = \frac{2\pi \left\{ [6k(k+1) + 1]\lambda^2 + \bar{\lambda}_0^2 \right\}}{6(2k+1)\lambda}, \quad (42)$$

определяющее функцию  $\mu_c(\lambda)$  внутри области  $\Omega_k$  плоскости  $\mu\lambda$ . Таким образом, имеем

$$\mu_c(\lambda) = \mu_{(k)}(\lambda) \quad \text{при} \quad t_{k+1} \leq \lambda \leq t_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (43)$$

где  $t_k$  — значение параметра  $\lambda$ , при котором график функции  $\mu_{(k)}(\lambda)$  пересекается с правой границей области  $\Omega_k$ , т. е. с прямой  $\mu = 2\pi k\lambda$ :

$$t_k = \frac{\bar{\lambda}_0}{\sqrt{6k^2 - 1}}. \quad (44)$$

Также отметим, что  $\mu_{(k)}(t_k) = \mu_{(k-1)}(t_k)$ , следовательно, функция  $\mu_c(\lambda)$  (43) является непрерывной на всем интервале  $\lambda > 0$ . Легко показать, что

$$\left. \frac{d\mu_{(k-1)}(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda \rightarrow t_{k+}} = \frac{\pi(2-6k)}{3(2k-1)} < 0,$$

$$\left. \frac{d\mu_k(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda \rightarrow t_{k-}} = \frac{\pi(2+6k)}{3(2k+1)} > 0.$$

Это означает, что в бесконечном числе точек  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) функция  $\mu_c(\lambda)$  не дифференцируема и ее график здесь имеет изломы. Следовательно,  $\mu_c(\lambda)$  осциллирует. Для того чтобы выделить в явном виде осциллирующую при  $\lambda \rightarrow 0$  ( $L \rightarrow \infty$ ) составляющую этой функции, применим в (41) формулу суммирования Пуассона (26). После несложных преобразований уравнение (41) приводится к виду

$$\phi(0) = -\frac{1}{6} + \frac{\mu_c^2(\lambda)}{4\pi^2\bar{\lambda}_0^2} - \frac{\lambda^2}{\pi^2\bar{\lambda}_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[n\mu_c(\lambda)L/2]}{n^2} \equiv 0. \tag{45}$$

Отсюда ясно, что  $\mu_c(0) = 2\pi\bar{\lambda}_0/\sqrt{6}$ . Кроме того, из (45) при  $\lambda \rightarrow 0$  можно получить следующее поведение критической кривой  $\mu_c(\lambda)$ :

$$\mu_c(\lambda) \approx \frac{2\pi\bar{\lambda}_0}{\sqrt{6}} \left\{ 1 + \frac{3\lambda^2}{\pi^2\bar{\lambda}_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi\bar{\lambda}_0L/\sqrt{6})}{n^2} \right\}. \tag{46}$$

Видно, что сумма, стоящая в (46), является периодической функцией параметра  $L$ . Таким образом,  $\mu_c(\lambda)$  имеет осциллирующую составляющую, частота колебаний которой при  $L \rightarrow \infty$  есть  $\bar{\lambda}_0/(2\sqrt{6})$ , а амплитуда убывает при  $\lambda \rightarrow 0$ . Из (45) очевидно, что частота осцилляций этой функции зависит от значений параметра  $\lambda$ .

### 5.2. Осцилляции фермионного конденсата

Покажем теперь, что нетривиальное решение  $\Sigma(\mu, \lambda)$  (тождественно равно массе фермионов или фермионному конденсату) уравнения стационарности (21), которое, как легко понять исходя из рис. 4, является точкой глобального минимума эффективного потенциала, также осциллирует с изменением переменной  $\lambda = 1/L$ .

На фазовой диаграмме рис. 2 мысленно проведем прямую  $\mu = \text{const}$  такую, что  $M < \mu < \mu_c(0)$ . Проекция точек пересечения ее с критическими кривыми  $l_1, l_2, \dots$  на ось  $\lambda$  обозначим  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  соответственно. С помощью уравнения (21) можно показать, что в этих точках масса фермионов  $\Sigma(\mu, \lambda)$ , рассматриваемая только как функция параметра  $\lambda$ , имеет разрывы первой производной (чтобы не переполнять статью довольно громоздкими формулами, эти расчеты мы здесь не приводим). Следовательно, согласно вышеприведенному определению, фермионный конденсат осциллирует с изменением  $\lambda$ . Мы подтвердим этот факт, используя ниже другой метод, а также выделим в явном виде осцилляционную составляющую фермионного конденсата при малых значениях  $\lambda$ .

В работах [26] показано, что для рассматриваемых значений химического потенциала решение  $\Sigma(\mu, 0) \equiv m(\mu)$  удовлетворяет уравнению

$$f(m) \equiv F(m) + \frac{\mu}{4} \sqrt{\mu^2 - m^2} - \frac{m^2}{4} \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2}}{m} \right) = 0, \tag{47}$$

где для простоты опущена зависимость  $m$  от  $\mu$ . Применим теперь в уравнении (21) формулу суммирования Пуассона (26), после чего имеем

$$0 = f(\Sigma) - I(\Sigma) + \sqrt{\mu^2 - \Sigma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left[ \mu - \sqrt{\Sigma^2 + (\mu^2 - \Sigma^2)x^2} \right] \cos \left( n\sqrt{\mu^2 - \Sigma^2} Lx \right) dx. \quad (48)$$

Рассмотрим (48) при малых значениях  $\lambda$  (большие  $L$ ). В этом случае  $\Sigma(\mu, \lambda) \approx m(\mu)$ , а также  $f(\Sigma) \approx f'(m(\mu))[\Sigma - m(\mu)]$  (последнее соотношение очевидно, если принять во внимание (47)). Асимптотическое поведение интегралов в (48) можно найти, используя следующую формулу, которая получается после неоднократного интегрирования по частям:

$$\int g(x) \cos(Lx) dx = \frac{1}{L} g(x) \sin(Lx) + \frac{1}{L^2} g'(x) \cos(Lx) + o\left(\frac{1}{L^2}\right).$$

Наконец, с учетом экспоненциальной малости выражений типа  $I(\Sigma)$  при  $L \rightarrow \infty$  [34] получаем из (48) следующее уравнение, справедливое при малых значениях  $\lambda$ :

$$f'(m(\mu)) [\Sigma - m(\mu)] - \frac{\lambda^2 \sqrt{\mu^2 - m^2(\mu)}}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left[ n\sqrt{\mu^2 - m^2(\mu)} L \right]}{n^2} + o(\lambda^2) = 0. \quad (49)$$

Решая (49) относительно  $\Sigma$ , находим

$$\Sigma(\mu, \lambda) = m(\mu) + \frac{\lambda^2 \sqrt{\mu^2 - m^2(\mu)}}{\mu f'(m(\mu))} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left[ n\sqrt{\mu^2 - m^2(\mu)} L \right]}{n^2} + o(\lambda^2). \quad (50)$$

### 5.3. Осцилляции плотности частиц

В разд. 3 (случай  $G < G_c$ ) было показано, что с ростом параметра  $L$  при фиксированном значении химического потенциала  $\mu$  в квантовой системе, описываемой лагранжианом НЙЛ (1), происходит теоретически неограниченное число фазовых переходов второго рода из одной кирально-симметричной безмассовой фазы в другую. В момент каждого из фазовых переходов скачком меняется производная по  $\lambda$  такой физической величины как плотность числа фермионов  $N(L)$ . С точки зрения экспериментатора, измеряющего  $N(L)$ , плотность частиц осциллировала бы с частотой  $\mu/(2\pi)$ .

Аналогично этому в случае  $G_c < G < (1.225\dots)G_c$  для значений химического потенциала, фиксированных в интервале  $\mu_c(0) < \mu$  (см. рис. 2), мы будем иметь последовательность фазовых переходов из одной безмассовой фазы в другую при изменении параметра  $\lambda$ . При этом плотность частиц будет осциллировать с той же частотой  $\mu/(2\pi)$ .

Исследуем теперь вопрос об осцилляциях плотности в случае, когда значение  $\mu$  фиксировано в интервале  $M < \mu < \mu_c(0)$ . При этом очевидно, что точка глобального минимума потенциала  $\Sigma(\mu, \lambda)$  не равна нулю, поэтому с ростом  $L$  в системе возможно бесконечное число фазовых переходов из массивной фазы в массивную. На границах раздела фаз производная функции  $N(L)$  разрывна, в результате чего наблюдаются осцилляции плотности. Опишем этот процесс аналитическим выражением. Прежде всего заметим, что термодинамический потенциал системы определяется значением эффективного потенциала в точке глобального минимума, т. е. равенством  $\Omega(\mu) = V_{\mu L}(\Sigma(\mu, \lambda))$ . Плотность частиц в основном состоянии есть

$$\begin{aligned}
 N(L) &= -\frac{d\Omega_0(\mu)}{d\mu} = -\left\{ \frac{\partial V_{\mu L}(\Sigma)}{\partial \mu} + \frac{\partial V_{\mu L}(\Sigma)}{\partial \Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial \mu} \right\} \Bigg|_{\Sigma=\Sigma(\mu,\lambda)} = \\
 &= \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \theta(\mu - \sqrt{\Sigma^2(\mu,\lambda) + (2\pi\lambda n)^2}) [\mu^2 - \Sigma^2(\mu,\lambda) - (2\pi\lambda n)^2]. \quad (51)
 \end{aligned}$$

Применяя к (51) формулу суммирования Пуассона (26), получаем

$$\begin{aligned}
 N(L) &= \frac{(\mu^2 - \Sigma^2)^{3/2}}{3\pi^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda^2 \sqrt{\mu^2 - \Sigma^2} \cos(n\sqrt{\mu^2 - \Sigma^2}L)}{\pi^2 n^2} + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda^3 \sin(n\sqrt{\mu^2 - \Sigma^2}L)}{\pi^2 n^3}, \quad (52)
 \end{aligned}$$

где подразумевается, что  $\Sigma$  является решением уравнения стационарности (21), т. е. зависит от  $\mu, \lambda$  и, следовательно, при малых  $\lambda$  осциллирует согласно формуле (50). С помощью (50) нетрудно выделить из (52) лидирующую при  $\lambda \rightarrow 0$  и  $\mu = \text{const}$  асимптотику:

$$\begin{aligned}
 N(L) &= \frac{[\mu^2 - m^2(\mu)]^{3/2}}{3\pi^2} + \lambda^2 \left[ \frac{m(\mu) [\mu^2 - m^2(\mu)]}{\mu f'(m(\mu))} - 2\sqrt{\mu^2 - m^2(\mu)} \right] \times \\
 &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[n\sqrt{\mu^2 - m^2(\mu)}L]}{\pi^2 n^2} + o(\lambda^2), \quad (53)
 \end{aligned}$$

где  $m(\mu)$  — масса фермиона при  $\lambda = 1/L = 0$ , которая является решением уравнения (47).

Таким образом, мы видим, что при  $L \rightarrow \infty$  плотность частиц в основном состоянии рассматриваемой системы осциллирует по этому параметру так же, как и фермионный конденсат, т. е. с частотой  $\sqrt{\mu^2 - m^2(\mu)}/(2\pi)$ .

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено детальное исследование фазовой структуры модели Намбу-Йона-Лазинио в пространстве-времени с топологией  $R^3 \times S^1$  и химическим потенциалом  $\mu$ . Впервые доказано, что для рассматриваемой модели существует бесконечное множество безмассовых и массивных фаз. Указаны типы фазовых переходов между этими фазами. Показана возможность осцилляции плотности числа частиц в этой модели, а также осцилляции фазовой кривой. Из проведенного рассмотрения непосредственно следует, что для ферми-частиц с лагранжианом взаимодействия типа (1) в однородном магнитном поле имеют место эффекты осцилляций типа ван Альфена-де Гааза [1, 33], а также осцилляции в фазовой плоскости  $\Sigma\mu$  как для холодной плотной фермионной материи, так и в случае конечной температуры. Существование такого эффекта возможно благодаря специальной дискретной структуре спектра фермионов в магнитном поле (уровни Ландау) [1]. Сам же этот эффект является весьма необычным для четырехфермионной модели и, вероятно, играет определенную роль в обсуждавшихся во

Введении физических приложений. В нашем рассмотрении мы полагали поля  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  не зависящими от координат пространства-времени. Если отказаться от такого требования и допустить возможность флуктуации полей, то, вообще говоря, мы придем к новой физической теории. Рассмотрение таковой может быть проведено путем суммирования всего ряда в методе эффективного потенциала. Однако, ввиду того что найденные нами осцилляции обусловлены масштабными параметрами задачи, связанными с величинами плотности  $\mu$  и  $L$ , а флуктуации в такой теории, по-видимому, могут быть равновероятны, можно надеяться на сохранение обнаруженного эффекта и в более сложной физической ситуации.

Один из авторов (В. А. С.) выражает благодарность DAAD за предоставленную возможность выполнения работ по данной теме в Институте физики Гумбольдтского университета (Берлин) и профессору Д. Эберту за полезные обсуждения и сотрудничество.

Работа выполнялась при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (тема 98-02-16690).

## Литература

1. Л. Д. Ландау, *Собрание трудов, Т. 1*, Наука, Москва (1969). И. М. Лифшиц, *Избранные труды*, Наука, Москва (1994).
2. D. I. Deryagin, D. Yu. Grigoriev, and V. A. Rubakov, *Phys. Lett. B* **178**, 385 (1986).
3. A. V. Smilga, *Phys. Rep.* **291**, 1 (1997); E-prints archive, hep-ph 9612347.
4. S. Chakrabarty, *Phys. Rev. D* **54**, 2026 (1996).
5. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
6. В. Л. Гинзбург, К. Г. Максимов, *СФХТ* **5**, 1543 (1992).
7. Н. Биррелл, П. Девис, *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени*, Мир, Москва (1984). I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov, and I. L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*, IOP Publishing, Bristol and Philadelphia (1992).
8. М. Грин, Дж. Шварц, Э. Витген, *Теория суперструн, Т. 1, 2*, Мир, Москва (1990).
9. А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*, Энергоатомиздат, Москва (1988). L. H. Ford, *Proc. R. Soc. Lond. A* **368**, 30 (1979). D. J. Toms, *Phys. Rev. D* **21**, 928 (1980).
10. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961).
11. В. Г. Вакс, А. И. Ларкин, *ЖЭТФ* **40**, 282, 1392 (1961). Б. А. Арбузов, А. Н. Тавхелидзе, Р. Н. Фаустов, *ДАН СССР* **139**, 345 (1961).
12. Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, Москва (1986). F. A. Berezin, *Comm. Math. Phys.* **63**, 131 (1978).
13. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol. 1, 2, Cambridge Univ. Press (1996).
14. G. Gat, A. Kovner, and B. Rosenstein, *Phys. Lett. B* **240**, 158 (1990).
15. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика, Ч. 2*, Наука, Москва (1978).
16. G. Semenoff and L. Wijewardhana, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2633 (1989). N. Dorey and N. Mavromatas, *Phys. Lett. B* **250**, 107 (1990). A. Kovner and B. Rosenstein, *Phys. Rev. B* **42**, 4748 (1990). M. Carena, T. E. Clark, and C. E. M. Wagner, *Nucl. Phys. B* **356**, 117 (1991).
17. М. К. Волков, *ЭЧАЯ* **17**, 433 (1986); **24**, 81 (1993).
18. S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **13**, 974 (1976); **56**, 2303 (1997).

19. К. Г. Клименко, ТМФ **89**, 211 (1991). K. G. Klimentko, Z. Phys. C **54**, 323 (1992). K. G. Klimentko, A. S. Vshivtsev, and B. V. Magnitsky, Nuovo Cim. A **107**, 439 (1994). V. P. Gusynin, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy, Phys. Rev. Lett. **73**, 3499 (1994); Phys. Lett. B **349**, 477 (1995).
20. Yu. A. Simonov, E-prints archive, hep-ph 9704301; 9703205.
21. T. Hosotani, Phys. Lett. B **126**, 309 (1983); Ann. Phys. **190**, 233 (1989). A. Higuchi and L. Parker, Phys. Rev. D **37**, 2853 (1988). M. Burgess and D. J. Toms, Ann. Phys. **210**, 438 (1991).
22. T. Inagaki, T. Muta, and S. D. Odintsov, Progr. Theor. Phys. Suppl. **127**, 1 (1997).
23. T. Inagaki, T. Muta, and S. D. Odintsov, Mod. Phys. Lett. A **8**, 2117 (1993). E. Elizalde, S. Leseduardo, and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **49**, 5551 (1994); Phys. Lett. B **347**, 33 (1995). D. K. Kim and I. G. Koh, Phys. Rev. D **51**, 4573 (1995). H. Forkel, Phys. Lett. B **280**, 5 (1992); Nucl. Phys. A **581**, 557 (1995).
24. D. M. Gitman, S. D. Odintsov, and Yu. Shil'nov, Phys. Rev. D **54**, 2964 (1996). B. Geyer, L. N. Granda, and S. D. Odintsov, Mod. Phys. Lett. A **11**, 2053 (1996).
25. В. Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике*, Атомиздат, Москва (1976).
26. А. С. Вшивцев, К. Г. Клименко, Письма в ЖЭТФ **64**, 313 (1996). А. С. Вшивцев, В. Ч. Жуковский, К. Г. Клименко, ЖЭТФ **111**, 1921 (1997).
27. А. С. Вшивцев, А. К. Клименко, К. Г. Клименко, ЯФ **61**(3), 1 (1998). М. А. Вдовиченко, А. С. Вшивцев, К. Г. Клименко, Препринт ИФВЭ 97-59, Протвино (1997).
28. S. Kawati and H. Miyata, Phys. Rev. D **23**, 3010 (1981). J. Fuchs, Z. Phys. C **22**, 83 (1984). V. Bernard, U.-G. Meissner, and I. Zahed, Phys. Rev. D **36**, 819 (1987). Chr. V. Christov and K. Goeke, Acta Phys. Pol. B **22**, 187 (1991). D. Ebert, Yu. L. Kalinovsky, L. Münchow, and M. K. Volkov, Int. J. Mod. Phys. A **8**, 1295 (1993).
29. D. Ebert and M. K. Volkov, Phys. Lett. B **272**, 86 (1991). S. P. Klevansky and R. H. Lemmer, Phys. Rev. D **39**, 3478 (1989). I. A. Shovkovy and V. M. Turkowski, Phys. Lett. B **367**, 213 (1995).
30. L. Dolan and R. Jackiw, Phys. Rev. D **9**, 3320 (1974).
31. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика, Т. 1*, Наука, Москва (1976).
32. Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин, *Термодинамика, статистическая физика и кинетика*, Наука, Москва (1977). D. Persson and V. Zeitlin, Phys. Rev. D **51**, 2026 (1995). J. O. Andersen and T. Haugset, Phys. Rev. D **51**, 3073 (1995).
33. А. С. Вшивцев, К. Г. Клименко, ЖЭТФ **109**, 954 (1996). А. С. Вшивцев, К. Г. Клименко, Б. В. Магницкий, ЖЭТФ **107**, 307 (1995). D. Ebert and A. S. Vshivtsev, Preprint HUB-EP-97/92, Berlin (1997).
34. А. С. Вшивцев, В. К. Перес-Фернандес, ДАН СССР **309**(1), 70 (1989).