

О ВОЛЬТ-АМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО ПЕРЕХОДА С БОЛЬШОЙ КРИТИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ТОКА

В. П. Силин*, А. В. Студенов

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117924, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 16 октября 1997 г.

Для джозефсоновского перехода с большой критической плотностью тока, описываемого нелокальной вихревой электродинамикой, построена теория вольт-амперной характеристики в приближении слабой диссипации, обусловленной одночастичной проводимостью джозефсоновского перехода. Выявлена роль резонансного возбуждения коротковолновых обобщенных волн Свихарта. Установлены новые количественные закономерности вольт-амперных характеристик, представляющих собой огибающие резонансов волновых возбуждений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория вольт-амперных характеристик (ВАХ) джозефсоновских переходов представляет большой интерес, в частности, потому что экспериментальное изучение ВАХ позволяет сравнительно просто исследовать проявление вихревых структур в таких переходах. Обычно теория ВАХ джозефсоновского перехода базируется на уравнении синус-Гордон с диссипацией. При этом для вихревой структуры в виде бегущей волны, приводимой в движение пространственно-однородным током и тормозящейся диссипацией, обусловленной одночастичной проводимостью джозефсоновского перехода, теория ВАХ сформулирована в работе [1]. Для кольцевых переходов, привлекающих в последнее время внимание экспериментаторов, необходимые результаты теории ВАХ приведены в [2]. Интерес к кольцевым переходам связан с тем, что в случае таких джозефсоновских переходов нет усложняющих вихревую картину эффектов концов. Именно поэтому настоящая работа посвящена кольцевым джозефсоновским переходам. В то же время наше рассмотрение в отличие от [1–3] посвящено теории джозефсоновских переходов с большой критической плотностью тока, когда [4]

$$j_c \gg j_0 = \frac{\hbar c^2}{16\pi|e|\lambda^3} = 1.24 \cdot 10^4 (\lambda[\text{мкм}])^{-3} \text{А/см}^2 \quad (1.1)$$

и когда обычная теория, основывающаяся на уравнении синус-Гордон с диссипацией, непригодна. В формуле (1.1) λ — лондоновская длина. При выполнении неравенства (1.1) лондоновская длина больше джозефсоновской,

$$\lambda \gg \lambda_j = \lambda \sqrt{\frac{j_0}{j_c}} \gg \frac{\lambda_j^2}{\lambda} = l, \quad (1.2)$$

где e — заряд электрона, а c — скорость света.

*E-mail: silin@sci.lpi.ac.ru

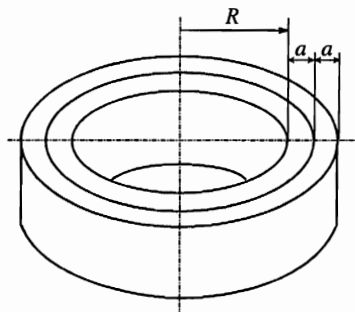


Рис. 1. Два concentрических сверхпроводящих цилиндра, разделенных тонким туннельным переходом

В таком пределе джозефсоновская электродинамика оказывается существенно не-локальной. Выбранная нами геометрия кольцевого перехода иллюстрируется рис. 1 (ср. [3]). Считается, что ширина туннельного перехода $2d$ мала по сравнению с лондоновской длиной λ , а последняя много меньше толщины сверхпроводящих кольцевых цилиндров a . Считая радиус R туннельного перехода много больше лондоновской длины λ , ($0 < z < 2\pi R$, где z — координата вдоль кольцевого туннельного перехода) и продолжая электрические и магнитные поля периодически по оси z на всю числовую ось $(-\infty, +\infty)$, используем для разности фаз φ волновых функций куперовских пар по разные стороны туннельного перехода уравнение [4–6]

$$\frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\beta}{\omega_j^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sin \varphi - \frac{l}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{z' - z} \frac{\partial \varphi}{\partial z'} + \gamma = 0. \quad (1.3)$$

Здесь $\gamma = j/j_c$ — нормированная плотность тока короткой через джозефсоновский переход, $\omega_j = (16\pi|e|dj_c/\hbar\varepsilon)^{1/2}$ — джозефсоновская плазменная частота, $\beta = 4\pi\sigma/\varepsilon$ — характеризует диссипацию, ε и σ — диэлектрическая постоянная и проводимость вещества туннельного перехода. Уравнение (1.3) кладется в основу нашего рассмотрения.

Для джозефсоновского перехода с большой критической плотностью тока, когда выполнено неравенство (1.2), имеющиеся на сегодняшний день результаты ВАХ получены в резистивной модели, которой отвечает возможность пренебрежения в уравнении (1.3) второй производной по времени [5–9]. Сравнение результатов этих работ упрощается благодаря наличию в работе [7] точного решения в соответствии с резистивной моделью, описывающего бесконечную цепочку вихрей с периодом $2\pi L$, движущуюся с постоянной скоростью v . При этом

$$\varphi(z, t) = -\theta + \pi + 2 \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} [(z - vt)/2L]}{\operatorname{th}[\alpha_0/2]} \right), \quad (1.4)$$

где

$$\frac{L^2}{l^2} \cos^2 \theta = \operatorname{sh}^2 \alpha_0 = \left(\frac{1}{4} \left[\gamma^2 + \frac{l^2}{L^2} - 1 \right]^2 + \frac{l^2}{L^2} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\gamma^2 + \frac{l^2}{L^2} - 1 \right), \quad (1.5)$$

а ВАХ дается формулой

$$\frac{V}{j_c R_s} = \frac{\beta v}{\omega_j^2 L} = \left\{ \left[\frac{1}{4} \left(\frac{j^2}{j_c^2} + \frac{l^2}{L^2} - 1 \right)^2 + \frac{l^2}{L^2} \right]^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{j^2}{j_c^2} + \frac{l^2}{L^2} - 1 \right) \right\}^{1/2}. \quad (1.6)$$

Здесь $R_s = 2d/\sigma$ — сопротивление единицы площади туннельного контакта, V — усредненная по времени разность потенциалов на переходе. Форма записи ВАХ (1.6) соответствует определению разности потенциалов по заданной плотности тока. Другая запись этой формулы, определяющей ток по заданной разности потенциалов, имеет вид [8]

$$j^2 = j_r^2 + \frac{j_r^2 j_c^2 L^2}{L^2 j_r^2 + l^2 j_c^2}, \quad \text{где } j_r = \frac{V}{R_s}. \quad (1.7)$$

Последняя форма записи в отличие от (1.6) менее непосредственно отвечает получаемой из эксперимента информации, зато упрощает сравнение с результатами работ предшественников. Прежде всего, остановимся на работе [5]. Полученный в ней в результате численного исследования график ВАХ качественно схож с графиком работы [8], построенным на основании формулы (1.7). Далее, в работе [5] для малых токов указана зависимость

$$j = \frac{L}{l} j_r. \quad (1.8)$$

Согласно закону (1.7) закономерность (1.8) имеет место при

$$\frac{V}{R_s j_c} \ll \frac{l}{L} \ll 1. \quad (1.9)$$

Это отвечает более узкой по сравнению с указанной в [5] области. Вторая асимптотическая формула работы [5] описывает выход на закон Ома:

$$j = j_r \left\{ 1 + \frac{L^2 j_c^2}{2(L^2 j_r^2 + l^2 j_c^2)} \right\}. \quad (1.10)$$

Эта формула имеет место при $V \gg j_c R_s$, как это следует из (1.7), и как на это указано в работе [5].

ВАХ работы [6] основывается на использовании точного решения резистивной модели для единичного вихря, движущегося с постоянной скоростью:

$$\varphi(z, t) = -\theta + \pi + 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{z - vt}{\rho} \right), \quad (1.11)$$

где $\theta = \arcsin \gamma$, $\rho = l/(1 - \gamma^2)^{1/2}$ и

$$v = \frac{l\omega_j^2}{\beta} \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}}. \quad (1.12)$$

Приняв возможность записи решения резистивной модели приближенно в виде цепочки вихрей (1.11), расположенных периодически, автор [6] получил ВАХ вида (1.7) только без первого слагаемого в правой части. Это означает, что результат работы [6] в случае

$L \gg l$ реализуется согласно (1.7) при малых напряжениях $V \ll j_c R_s$, чему соответствуют токи много большие омического. В то же время, согласно формуле (31) работы [6], плотность тока должна быть меньше критической джозефсоновской (ср. (1.12)). Проведенное обсуждение позволяет видеть ранее не обсуждавшуюся согласованность результатов резистивной модели, особенно при малых токах, что важно для дальнейшего. Заметим здесь, что для получения из (1.7) ВАХ кольцевого джозефсоновского перехода радиуса R следует заменить L в (1.7) на R/m , где m — натуральное число, отвечающее числу вихрей Абрикосова–Джозефсона в кольце (см. [8, 9]).

В интересующем нас случае малой диссипации, т. е. в пределе, противоположном реализуемому в резистивной модели, диссипация определяется излучением обобщенных волн Свихарта. Для единичного вихря Абрикосова–Джозефсона возникающее при этом торможение рассмотрено в работе [10]. При движении такого вихря с небольшой скоростью

$$v \ll l\omega_j \quad (1.13)$$

возбуждаются короткие волны с длиной волны меньшей лондоновской длины, когда спектр обобщенных волн Свихарта имеет вид (ср. [11])

$$\omega^2(k) = \omega_j^2(1 + |k|l), \quad (1.14)$$

где k — волновой вектор. Согласно условию черенковского излучения волновой вектор возбуждаемых возмущений определяется из уравнения

$$\omega^2(k) = k^2 v^2. \quad (1.15)$$

В отличие от работы [10] ниже для построения теории ВАХ воспользуемся точным стационарным решением уравнения (1.3) при $\gamma = 0$, полученным в [12] и описывающим цепочку вихрей Абрикосова–Джозефсона:

$$\varphi(z) = \pi + 2 \arctg \left(\frac{\operatorname{tg}[z/2L]}{\operatorname{th}[\alpha/2]} \right), \quad (1.16)$$

$$\operatorname{sh} \alpha = (l/L). \quad (1.17)$$

Подобно работе [10] примем, что структура (1.16) движется с малой скоростью v . Во втором разделе получено волновое возмущение, которое возникает при таком движении одного вихря в кольце, когда $L = R$. Далее в третьем разделе определена сила трения, которая воздействует на движущуюся вихревую структуру вместе с ее полем возмущения из-за диссипации, обусловленной конечной проводимостью σ квазичастиц через туннельный переход. В четвертом разделе рассмотрена компенсация силы трения силой Лоренца, обусловленной током через джозефсоновский переход. Это позволяет определить связь между скоростью движения вихревой структуры и током. В пятом разделе дано обобщение на случай m вихрей Абрикосова–Джозефсона в кольцевом переходе. В шестом разделе получена ВАХ. Седьмой раздел посвящен обсуждению результатов.

2. ДВИЖУЩАЯСЯ ВИХРЕВАЯ СТРУКТУРА

В этом разделе будем считать, что в кольцевом джозефсоновском переходе радиуса R находится один вихрь ($L = R$), который движется с малой скоростью, удовлетворяющей неравенству (1.13). В то же время диссипацию будем предполагать слабой, откуда

следует, что скорость такого движения должна быть не очень малой. Таким образом,

$$R\beta \ll v \ll l\omega_j. \quad (2.1)$$

Размер кольца считаем большим по сравнению с размером вихря Абрикосова-Джозефсона, что отвечает

$$R \gg l. \quad (2.2)$$

Возникающее при движении цепочки вихрей (1.16) возмущенное состояние ищем в виде

$$\varphi(z, t) = \varphi_0(z - vt) + \varphi_1(z, t), \quad (2.3)$$

где φ_0 определяется формулой (1.16), а

$$\varphi_1 \ll \varphi_0. \quad (2.4)$$

Подстановка (2.3) в уравнение (1.3) при $\gamma = 0$ после линеаризации дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \frac{\beta}{\omega_j^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \varphi_1 \cos \varphi_0 - \frac{l}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{z' - z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z'} = \\ = -\frac{v^2}{\omega_j^2} \frac{d^2 \varphi_0}{ds^2} + \frac{\beta v}{\omega_j^2} \frac{d\varphi_0}{ds}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $s = z - vt$. Слагаемое $\varphi_1 \cos \varphi_0$ в левой части уравнения (2.5) сравнительно невелико, и его удержание важно лишь для простоты математических операций. Поэтому подобно [10] мы заменим это слагаемое на φ_1 . Нетрудно видеть, что тогда можно записать следующее установившееся решение в виде бегущей со скоростью v структуры:

$$\begin{aligned} \varphi_1(z, t) = \varphi_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{nl}{R}\right) \left[\left(\frac{n\beta v}{R}\right)^2 + \left(\omega_n^2 - \frac{n^2 v^2}{R^2}\right)^2 \right]^{-1} \times \\ \times \left\{ \frac{2v^2}{R^2} \left[\frac{n\beta v}{R} \cos\left(\frac{ns}{R}\right) + \left(\omega_n^2 - \frac{n^2 v^2}{R^2}\right) \sin\left(\frac{ns}{R}\right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{2\beta v}{R} \left[\left(\omega_n^2 - \frac{n^2 v^2}{R^2}\right) \cos\left(\frac{ns}{R}\right) - \frac{n\beta v}{R} \sin\left(\frac{ns}{R}\right) \right] \right\} + \frac{\beta v}{R\omega_j^2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\omega_n = \omega_j \sqrt{1 + \frac{nl}{R}} \quad (2.7)$$

отвечает формуле (1.14) для спектра обобщенных волн Свихарта, когда $k = n/R$. Последнее слагаемое (2.6) возникло из-за вклада

$$\left\langle \frac{d\varphi_0}{ds} \frac{\beta v}{\omega_j^2} \right\rangle = \frac{\beta v}{R\omega_j^2} \quad (2.8)$$

в правую часть уравнения (2.5). Здесь угловые скобки означают усреднение по периоду. В силу левого неравенства (2.1) пренебрежем вторым слагаемым в фигурных скобках (2.6) по сравнению с первым.

Ввиду малости β ясно, что формула (2.6) описывает резонансную зависимость от скорости. При этом номер резонансного слагаемого n_r в сумме (2.6) и резонансное значение скорости v_r связаны соотношением

$$\omega_{n_r}^2 = \omega_j^2 \left(1 + \frac{n_r l}{R} \right) = \left(\frac{n_r v_r}{R} \right)^2. \quad (2.9)$$

Соответственно

$$n_r = \frac{l R \omega_j^2}{v_r^2} \quad (2.10)$$

и согласно (2.2) и правой части (2.1) имеем

$$n_r \gg \frac{R}{l} \gg 1. \quad (2.11)$$

Последнее оправдывает возможность замены $\varphi_1 \cos \varphi_0$ на φ_1 при рассмотрении резонансных эффектов. В результате для резонансного слагаемого при $v = v_r$ можно записать

$$\varphi_r(z - v_r t) = \frac{2v_r}{\beta R} \exp \left(-\frac{l^2 \omega_j^2}{v_r^2} \right) \cos \left[\frac{l \omega_j^2}{v_r^2} (z - v_r t) \right]. \quad (2.12)$$

Это выражение отличается от возникающего в теории черенковского излучения единичного вихря Абрикосова–Джозефсона [10] лишь предэкспоненциальным множителем. Это отличие связано с тем, что (2.12) учитывает диссипацию в кольцевом джозефсоновском переходе.

Далее заметим, что благодаря левой части неравенства (2.1) при $v \approx v_r$ и для $n \neq n_r$ выполнено условие:

$$\left(\frac{n \beta v}{R} \right)^2 \ll \left(\omega_n^2 - \frac{n^2 v^2}{R^2} \right)^2. \quad (2.13)$$

Это позволяет во всех нерезонансных слагаемых формулы (2.6) пренебречь β , что приводит к следующему нерезонансному вкладу в $\varphi_1(s)$:

$$\varphi_{nr}(s) = \frac{2v^2}{R^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_r}}^{\infty} n \left\{ \omega_n^2 - \left(\frac{nv}{R} \right)^2 \right\}^{-1} \exp \left\{ -\frac{nl}{R} \right\} \sin \left(\frac{ns}{R} \right). \quad (2.14)$$

Последнее выражение может быть упрощено при использовании (2.11) и пренебрежении таким вкладом, который с очевидностью мал по сравнению с резонансным. Тогда

$$\varphi_{nr} \approx \frac{2}{n_r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n + (R/l)} \exp \left(-\frac{nl}{R} \right) \sin \left(\frac{ns}{R} \right). \quad (2.15)$$

Укажем здесь также на относительную малость расстояния между соседними резонансными значениями скорости. Действительно, согласно (2.9) имеем

$$\Delta v_r = \frac{v_r}{2n_r} = v_r \frac{l}{2R} \left(\frac{v_r^2}{l^2 \omega_j^2} \right) \ll v_r. \tag{2.16}$$

Тогда при отклонении от резонанса,

$$2|v - v_r| < \Delta v_r \ll v_r, \tag{2.17}$$

можно убедиться, что (2.13) выполнено, и записать

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) = & \frac{v_r}{R} \left[\frac{\beta^2}{4} + \frac{n_r^2(v - v_r)^2}{R^2} \right]^{-1} \exp \left(-\frac{l^2 \omega_j^2}{v_r^2} \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{\beta}{2} \cos \left(\frac{n_r s}{R} \right) - \frac{n_r(v - v_r)}{R} \sin \left(\frac{n_r s}{R} \right) \right\} + \varphi_{nr}(s) + \frac{\beta v}{R \omega_j^2}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Остановимся теперь на реализации приближения (2.4). Во-первых, правое неравенство (2.1) обеспечивает необходимую малость φ_{nr} . Во-вторых, малость резонансного вклада в сравнении с φ_0 дается неравенством

$$\exp \left(\frac{l^2 \omega_j^2}{v_r^2} \right) \gg \frac{2v_r}{\beta R}, \tag{2.19}$$

которым ниже мы также воспользуемся для выполнения условия (2.4).

3. СИЛА ТРЕНИЯ

Диссипация ($\beta \neq 0$) приводит к потере энергии. Скорость убывания энергии вихревой структуры в кольцевом джозефсоновском переходе дается выражением (ср., например, [13])

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\hbar j_c}{2|e|} \frac{\beta}{\omega_j^2} \int_0^{2\pi R} dz \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2. \tag{3.1}$$

Здесь E — энергия, приходящаяся на единицу длины джозефсоновского перехода.

Используя полученное в предыдущем разделе выражение $\varphi_0 + \varphi_1$, можем записать для скорости диссипации энергии следующее выражение:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{v^2 \beta}{\omega_j^2} \frac{\pi \hbar j_c}{|e|l} \left\{ 1 + \frac{l^3 \omega_j^4}{2v^2 R} \frac{\exp \left(-2 [l \omega_j / v_r]^2 \right)}{(\beta/2)^2 + [n_r(v - v_r)/R]^2} \right\}. \tag{3.2}$$

Первое слагаемое в фигурной скобке правой части отвечает потере энергии движущейся периодической структуры φ_0 , а второе слагаемое — потере энергии резонансно возбуждаемой волны $\varphi_r(s)$ (2.18).

Потерю энергии вихревой структуры часто связывают с силой трения f_{fr} (см., например, [14]), которая определяется соотношением

$$f_{fr} = \frac{1}{v} \frac{dE}{dt}. \quad (3.3)$$

Соответственно этому из формулы (3.2) следует

$$f_{fr} = -\frac{v\beta}{\omega_j^2} \frac{\pi \hbar j_c}{|e|l} \left\{ 1 + \frac{l^3 \omega_j^4}{2v^2 R} \frac{\exp(-2[l\omega_j/v_r]^2)}{(\beta/2)^2 + [n_r(v - v_r)/R]^2} \right\}. \quad (3.4)$$

О силе трения и об относительно небольших потерях энергии вихревой структуры можно говорить тогда, когда

$$\beta\tau \ll 1, \quad (3.5)$$

где $\tau = 2\pi R/v$ — период вращения вихревой структуры в кольце. Это условие оказывается выполненным согласно (2.1).

4. СИЛА ЛОРЕНЦА И УСЛОВИЕ КОМПЕНСАЦИИ СИЛ

Для решения поставленной задачи о ВАХ джозефсоновского перехода примем теперь, что через него течет постоянный и пространственно-однородный ток с плотностью j . Последнее приводит к воздействию тока на вихревую структуру со следующей, отнесенной к единице длины, силой Лоренца [13]:

$$f_L = \frac{1}{c} j\Phi, \quad (4.1)$$

где Φ — поток магнитного поля через джозефсоновский переход. При этом (см. [13])

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2\pi} [\varphi(z = 2\pi R, t) - \varphi(z = 0, t)], \quad (4.2)$$

где $\Phi_0 = \pi \hbar c / |e|$ — квант магнитного потока. Поскольку возмущение φ_1 является согласно (2.6) периодической функцией, то (4.2) определяется функцией φ_0 . Поэтому согласно формуле (1.16) при $L = R$, что принято во втором разделе, имеем $\Phi = \Phi_0$. В этом случае сила Лоренца равна:

$$f_L = \frac{1}{c} j\Phi_0. \quad (4.3)$$

В стационарном случае движения рассматриваемой нами вихревой структуры постоянное значение скорости v определяется из условия компенсации ускоряющей силы Лоренца (4.3) тормозящей силой трения (3.4). Это условие приводит к следующей связи:

$$\frac{j}{j_c} = \frac{\beta v}{\omega_j^2 l} \left\{ 1 + \frac{l^3 \omega_j^4}{2v^2 R} \frac{\exp(-2[l\omega_j/v_r]^2)}{(\beta/2)^2 + [n_r(v - v_r)/R]^2} \right\} \quad (4.4)$$

между плотностью тока j и скоростью движения вихревой структуры v . Подчеркнем, что согласно условиям (2.1) и (2.19) правая часть формулы (4.4) мала по сравнению с единицей, т. е. $j \ll j_c$.

Отметим, что формула (4.4) может быть получена на основании вытекающего из уравнения (1.3) энергетического соотношения

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\hbar j_c}{2|e|} \int_0^{2\pi R} dz \left(-\frac{\beta}{\omega_j^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad (4.5)$$

где E — энергия джозефсоновского перехода, а формула (4.5) описывает изменение во времени энергии благодаря диссипации (трению) и благодаря ускоряющему воздействию тока ($\gamma = j/j_c$). Подстановка в соотношение (4.5) полученного во втором разделе выражения (2.3) при выполнении условия неизменности энергии ($dE/dt = 0$) приводит также к формуле (4.4).

5. МУЛЬТИВИХРЕВАЯ СТРУКТУРА

В этом разделе дадим обобщение проведенному до этого рассмотрению на случай наличия в кольцевом джозефсоновском переходе нескольких вихрей. Обобщение на случай наличия m вихрей достигается заменой в формулах (1.16), (1.17) L на R/m . Поскольку в разд. 2–4 было принято $L = R$, то необходимое обобщение достигается заменой в формулах этих разделов R на R/m . Следует заметить, что условия применимости нашего рассмотрения (2.1) и (2.2) принимают вид

$$(\beta R/m) \ll v \ll l\omega_j \quad \text{и} \quad ml \ll R. \quad (5.1)$$

Соответственно номер черенковского резонанса дается формулой

$$n_r = \frac{Rl\omega_j^2}{mv_r^2} \gg \frac{R}{ml} \gg 1. \quad (5.2)$$

Аналог условия (2.19) имеет вид

$$\exp\left(\frac{l^2\omega_j^2}{v_r^2}\right) \gg \frac{2mv_r}{\beta R}. \quad (5.3)$$

При использовании таких условий можно дать обобщение формулы (3.4), позволяющее описать силу трения, действующую на цепочку m вихрей Абрикосова–Джозефсона, движение которой является также причиной возбуждения обобщенных волн Свихарта. Для силы трения имеем

$$f_{fr} = -\frac{mv\beta}{\omega_j^2} \frac{\pi \hbar j_c}{|e|l} \left\{ 1 + \frac{ml^3\omega_j^4}{2v^2R} \frac{\exp(-2[l\omega_j/v_r]^2)}{(\beta/2)^2 + [mn_r(v - v_r)/R]^2} \right\}. \quad (5.4)$$

Поскольку для силы Лоренца в отличие от (4.3) теперь имеем $f_L = (m/c)j\Phi_0$, то из условия равновесия сил получаем следующее обобщение соотношения (4.4):

$$\frac{j}{j_c} = \frac{\beta v}{\omega_j^2 l} \left\{ 1 + \frac{ml^3\omega_j^4}{2v^2R} \frac{\exp(-2[l\omega_j/v_r]^2)}{(\beta/2)^2 + [mn_r(v - v_r)/R]^2} \right\}. \quad (5.5)$$

При этом аналогично (2.17) выполнено условие

$$2|v - v_r| < \Delta v_r = \frac{v_r}{2n_r} = v_r \frac{ml}{2R} \frac{v_r^2}{l^2 \omega_j^2} \ll v_r, \quad (5.6)$$

где Δv_r обозначает расстояние между соседними резонансами. Выполнение условий (5.6) и (5.2) позволяет заменить v_r в экспоненте формулы (5.5) на v . Действительно,

$$\frac{|\exp[-2(l\omega_j/v)^2] - \exp[-2(l\omega_j/v_r)^2]|}{\exp[-2(l\omega_j/v_r)^2]} = |\exp[4(l\omega_j/v_r)^2(v - v_r)/v_r] - 1| < \\ < \exp[2(l\omega_j/v_r)^2 \Delta v_r / v_r] - 1 = (ml/R) \ll 1.$$

Таким образом, соотношение (5.5) можно записать в виде

$$\frac{j}{j_c} = \frac{\beta v}{\omega_j^2 l} \left\{ 1 + \frac{ml^3 \omega_j^4}{2v^2 R} \frac{\exp(-2[l\omega_j/v]^2)}{(\beta/2)^2 + [mn_r(v - v_r)/R]^2} \right\}. \quad (5.7)$$

Эта связь плотности тока и скорости движения вихревой структуры позволяет записать искомую ВАХ, что проделано в следующем разделе.

6. ВОЛЬТ-АМПЕРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Для получения ВАХ воспользуемся определением статической разности потенциалов

$$V = -\frac{\hbar}{2|e|} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle, \quad (6.1)$$

где усреднение проводится по длине кольца, что в нашем случае отвечает усреднению по времени. В нашем случае ненулевой вклад при усреднении возникает только от $\varphi_0(z - vt)$. При этом оказывается

$$V = \hbar m v / 2|e|R.$$

Последняя формула позволяет переписать соотношение (5.7) в виде ВАХ

$$\frac{j}{j_c} = \frac{V}{R_s j_c} \frac{R}{lm} \left\{ 1 + \frac{2m^3 (R_s j_1 / V)^2 \exp(-2m^2 V_0^2 / V^2)}{1 + [(V/V_s)^2 (V - V_r)^2 / (\Delta V_r)^2]} \right\}, \quad (6.2)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\Delta V_r = V_r / 2n_r \quad (6.3)$$

— расстояния между соседними резонансными значениями напряжения V_r на ВАХ:

$$V_r [\text{мкВ}] = \frac{\hbar v_r m}{2|e|R} = \frac{\hbar c}{2|e|\lambda} \sqrt{\frac{md}{R\epsilon n_r}} = \frac{100}{R} \sqrt{\frac{mdR}{\lambda^2 \epsilon n_r}}, \quad (6.4)$$

$$V_0 [\text{мкВ}] = \frac{\hbar l \omega_j}{2|e|R} = \frac{\hbar c}{2|e|R} \sqrt{\frac{d}{\epsilon \lambda} \frac{j_0}{j_c}} = \frac{100}{R} \sqrt{\frac{d}{\lambda \epsilon} \frac{j_0}{j_c}}. \quad (6.5)$$

В последних численных выражениях R измеряется в миллиметрах. Наконец,

$$j_1 = j_c \left(\frac{\lambda}{R} \frac{j_0}{j_c} \right)^{3/2}, \quad V_s = \frac{2\pi\hbar\sigma}{|e|\varepsilon} = \frac{\hbar}{2|e|R_s C_s}. \quad (6.6)$$

Заметим, что $j_1/V_0 = (c/8\pi\lambda)\sqrt{\varepsilon/dR}$ и не зависит от j_c . В резонансном знаменателе формулы (6.2) $|V - V_r| < (1/2)\Delta V_r$. В соответствии с формулами (5.1) и (5.3) ВАХ (6.2) имеет место для напряжений V , удовлетворяющих неравенствам

$$V_s \ll V \ll mV_0, \quad (6.7)$$

$$\exp\left(\frac{m^2 V_0^2}{V^2}\right) \gg 2 \frac{V}{V_s}. \quad (6.8)$$

Согласно формуле (6.2) ширина резонанса δV_r на половине его высоты составляет

$$\delta V_r = \frac{V_s}{V} \Delta V_r. \quad (6.9)$$

В соответствии с неравенством (6.7) это означает, что ширина резонанса много меньше расстояния между соседними резонансами. Поэтому можно говорить о различности отдельных резонансов. С другой стороны, согласно определению (6.3) и согласно неравенству (5.2), резонансы располагаются весьма часто. Поэтому, если в эксперименте не хватает точности разрешения ΔV_r , будет наблюдаться огибающая кривой (6.2), описываемая формулой

$$\frac{j}{j_c} = \frac{V}{j_c R_s} \frac{R}{lm} \left\{ 1 + 2m^3 \frac{R_s^2 j_1^2}{V^2} \exp\left(-2m^2 \frac{V_0^2}{V^2}\right) \right\}. \quad (6.10)$$

7. ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 2 изображены ВАХ (6.10) при нескольких значениях числа вихрей в джозефсоновском переходе ($m = 1, 2, 3$). Этот рисунок служит иллюстрацией нашего обсуждения. Начнем его с малых значений напряжения, когда ВАХ отвечают прямолинейным участкам кривых. Такие прямолинейные участки отвечают балансу ускорения током и торможения диссипацией основной периодической структуры вихрей φ_0 , когда наличие резонансных потерь практически не проявляется. Поэтому ограничение напряжения снизу в формуле (6.7) для таких прямолинейных участков ВАХ несущественно. Эти прямолинейные участки соответствуют асимптотическому результату работы [5], согласно которому сверхпроводящий ток через джозефсоновский переход превышает в (R/lm) омический ток $j_r = V/R_s$ (см. (1.8)). На рис. 2 омическому току отвечает штриховая линия. В резистивном приближении работ [5, 7] с ростом напряжения согласно (1.7) замедляется рост тока и согласно формуле (1.10), полученной в работе [5], ВАХ приближается к омическому закону.

В отличие от резистивного приближения наше рассмотрение ведет не к замедлению, а к более быстрому росту тока с ростом напряжения. Эта качественная зависимость подобна известной для джозефсоновского перехода с небольшой критической плотностью и слабой диссипацией, теория которых строится на основании обычного уравнения синус-Гордон с трением. Необходимое сравнение проведем с помощью результата

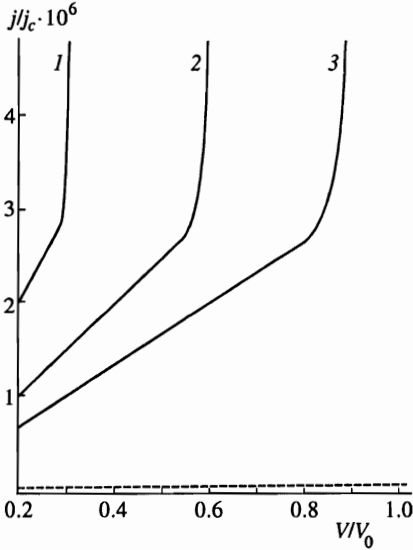


Рис. 2. ВАХ кольцевого джозефсоновского перехода при $m = 1, 2, 3$ и $l/R = 10^{-2}$, $(j_1 R_s / V_0) = 10^4$

работы [1] о ВАХ джозефсоновского перехода с малой диссипацией при условии, что размер вихря, как и в нашем случае, много меньше периода вихревой структуры в джозефсоновском переходе:

$$\frac{j}{j_c} = \frac{4V}{\pi j_c R_s} \frac{R}{lm} \frac{\sqrt{j_0/j_c}}{\sqrt{1 - (V/mV_0)^2(j_0/j_c)}}. \tag{7.1}$$

Заметим, что при малых напряжениях на линейном участке ВАХ эта формула дает ток в $(2/\pi)\sqrt{j_0/j_c}$ раз отличающийся от результата теории джозефсоновского перехода с критической плотностью тока, удовлетворяющей условию (1.1). Однако для нас важно прежде всего другое свойство (7.1), отвечающее тому, что при приближении напряжения к значению

$$V \rightarrow mV_0\sqrt{j_c/j_0} \tag{7.2}$$

обычная ВАХ описывает резкое увеличение тока. В нашем случае ВАХ (6.10) также происходит резкое увеличение тока, отвечающее отклонению кривых рис. 2 от прямолинейных участков области малых напряжений. Однако на таком качественном подобии сходство ВАХ (6.10) и (7.1) заканчивается. Поэтому теперь следует обсудить различие.

Прежде всего различается функциональная зависимость превышения ВАХ над продолжением линейного участка. В отличие от сравнительно плавного подхода к корневой особенности (7.1), которая в эксперименте не реализуется из-за срыва ВАХ на состояния с большим числом вихрей в джозефсоновском переходе, в нашем случае (6.10) предсказывается более резкое экспоненциальное нарастание тока с увеличением напряжения. Это качественное отличие может быть обнаружено на опыте (ср. [15]).

Второе отличие (6.10) от (7.1) заключается в том, что для джозефсоновского перехода с большой критической плотностью тока (1.1) резкий рост предсказывается не при

приближении напряжения к значению (7.2), а при

$$V \sim \frac{mV_0}{\sqrt{\ln[mR_s^2 j_1^2 / V_0^2]}} \equiv \frac{mV_0}{\sqrt{\ln[m\varepsilon(d/R)(c/4\pi\lambda\sigma)^2]}}. \quad (7.3)$$

В соответствии с правым неравенством (6.7) это значение должно быть меньше mV_0 , что возможно при выполнении условия

$$\sqrt{m \frac{\varepsilon d}{R}} \gg \frac{4\pi\sigma\lambda}{c} \sim 4 \cdot 10^{-14} (\lambda[\text{мкм}]) (\sigma[\text{с}^{-1}]), \quad (7.4)$$

что легко реализуемо. С другой стороны, наш подход к нахождению резонансной добавки φ_r требует выполнения левого неравенства (6.7), в котором теперь вместо напряжения следует использовать (7.3). При этом возникает следующее неравенство:

$$m \sqrt{\frac{\varepsilon d \lambda}{R^2} \frac{j_0}{j_c}} \frac{1}{\sqrt{\ln[m\varepsilon(d/R)(c/4\pi\lambda\sigma)^2]}} \gg \frac{4\pi\sigma\lambda}{c}. \quad (7.5)$$

Левая часть этого неравенства при m порядка единиц существенно меньше левой части (7.4). Поэтому (7.5) является главным ограничением на величину проводимости джозефсоновского перехода. Например, при $\varepsilon = 10$, $d/R = 10^{-6}$, $j_c = 5j_0$ неравенство (7.5) принимает вид

$$\frac{m \sqrt{\lambda/R} \cdot 10^{11}}{\sqrt{\ln[\sqrt{m} \cdot 10^{11} / \lambda[\text{мкм}] \sigma[\text{с}^{-1}]]}} \gg 4\lambda[\text{мкм}] \sigma[\text{с}^{-1}],$$

что, если принять $\lambda/R \sim (10^{-2} \div 10^{-3})$, не дает чрезмерно жестких ограничений на проводимость.

Отметим, что поскольку усредненная по кольцу напряженность постоянного магнитного поля дается соотношением

$$\bar{H} = m\Phi_0 / 4\pi\lambda R,$$

формулы (6.2) и (6.10) могут использоваться для описания зависимости ВАХ от магнитного поля.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для кольцевого джозефсоновского перехода с большой критической плотностью тока¹⁾ (1.1) впервые построена теория ВАХ, описывающая экспоненциально резкую зависимость от напряжения для огибающей участков возбуждения резонансных состояний, а также описывающая и тонкую структуру ВАХ, определяющуюся такими резонансами.

¹⁾ В работе [16] сообщается о плотности критического тока джозефсоновских переходов, равной $2 \cdot 10^4$ А/см².

Для того чтобы лучше было понято значение изложенного здесь материала, заметим, что указание на экспоненциальную зависимость тока от скорости уединенного джозефсоновского вихря в теории джозефсоновских переходов с малой критической плотностью тока имеется в работе [17]. Наше рассмотрение приводит к существенному количественному отличию, да и отличается физической сущностью явления. Во-первых, экспоненциальный эффект работы [17] отвечает скоростям вихря близким к обычной скорости Свихарта $c_s = \lambda_j \omega_j$, тогда как обсуждаемый в нашей работе эффект отвечает скорости $l\omega_j$, которая в $\sqrt{j_0/j_c}$ раз меньше скорости Свихарта. Соответственно экспоненциальный рост тока на рис. 2 отвечает в $\sqrt{j_0/j_c}$ раз меньшему напряжению. Это отличие определяется новым по сравнению с работой [7] нашим условием (1.1). Во-вторых, если рассматриваемая в работе [17] диссипация обусловлена черенковским возбуждением обобщенных волн Свихарта, энергия которых бесконечно далеко уходит от вихря, т. е. излучается из джозефсоновского перехода, то в нашем случае резонансно-возбужденная черенковская волна никуда не уходит из джозефсоновского перехода, а поглощается в нем благодаря диссипации. Это приводит к тому, что предэкспоненциальный множитель в нашей ВАХ (6.10) оказывается зависящим от сопротивления джозефсоновского перехода, что, естественно, не может возникнуть в подходе работы [17]. Наконец, подчеркнем, что в работе [17] ВАХ не получена.

Работа выполнена при поддержке Научного совета по ВТСП (проект АД № 95008) и в рамках проекта № 96-02-17303 Российского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. P. M. Marcus and Y. Imry, *Solid State Comm.* **33**, 345 (1980).
2. A. Shnirman, Z. Hermon, A. V. Ustinov, B. A. Malomed, and E. Ben-Jacob, *Phys. Rev. B* **50**, 12795 (1994).
3. Z. Hermon, A. Stern, and E. Ben-Jacob, *Phys. Rev. B* **49**, 9757 (1994).
4. Yu. M. Aliev, G. L. Alfimov, K. N. Ovchinnikov, V. P. Silin, and S. A. Uryupin, *Low Temp. Phys.* **22**(6), 477 (1996).
5. М. Ю. Куприянов, К. К. Лихарев, А. К. Семенов, *ФНТ* **2**(6), 706 (1976).
6. A. Gurevich, *Phys. Rev. B* **48**, 12857 (1993).
7. В. П. Силин, *Письма в ЖЭТФ* **60**, 442 (1994).
8. В. П. Силин, С. А. Урюпин, *ЖЭТФ* **108**, 2163 (1995).
9. Г. Л. Алфимов, В. П. Силин, *ЖЭТФ* **108**, в. 5 (II), 1668 (1995).
10. В. П. Силин, А. В. Студенов, *ФТТ* **39**(3), 444 (1997).
11. Ю. М. Алиев, В. П. Силин, С. А. Урюпин, *Сверхпроводимость: физика, химия, техника* **5**, 228 (1992).
12. Г. Л. Алфимов, В. П. Силин, *ЖЭТФ* **106**, 671 (1994).
13. A. Barone and G. Paterno, *Physics and Application of Josephson Effect*, Wiley, N. Y. (1982).
14. A. Gurevich, *Phys. Rev. B* **46**, 3187 (1992).
15. A. V. Ustinov, T. Doderer, R. P. Huebener, N. F. Pederson, B. Mayer, and V. A. Oboznov, *Phys. Rev. Lett.* **69**(12), 1815 (1992).
16. Y. M. Zhang, D. Winkler, P.-A. Nilsson, and T. Claeson, *Phys. Rev. B* **51**(13), 8684 (1995).
17. R. G. Mints and I. B. Snapiro, *Phys. Rev. B* **52**(13), 9691 (1995).