

ДВУХФОТОННАЯ УЛЬТРАКОРОТКАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА КОГЕРЕНТНЫХ КВАЗИЧАСТИЦ БОЗОННОГО ТИПА В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ

*А. Х. Ротару, К. В. Шура**

*Государственный университет Молдовы
MD2009, Кишинев, Молдова*

Поступила в редакцию 18 января 1997 г.

Теоретически изучена ультракороткая нелинейная динамика квазичастиц бозонного типа в конденсированных средах при двухфотонных квантовых переходах. В резонансном приближении получены точные решения в виде эллиптических функций. Показано, что учет антирезонансных слагаемых в гамильтониане взаимодействия электромагнитного поля с квазичастицами приводит к принципиально новому явлению — возникновению ультракороткого хаоса. Динамическая стохастичность квазичастиц обусловлена разрушением интегралов движения системы. Предсказан эффект туннелирования нелинейного движения из одной потенциальной ямы в другую.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большое внимание уделяется изучению нелинейной динамики и, в особенности, динамического хаоса в физических, химических, биологических и других системах.

Открытие динамического хаоса в нелинейных детерминированных системах стало одной из крупнейших научных сенсаций последнего времени [1]. К настоящему времени имеется множество работ по изучению детерминированного хаоса. В монографиях, учебных пособиях и обзорных статьях [1–5] изложена теория стохастического поведения как диссипативных, так и гамильтоновых динамических систем.

Особый интерес представляет изучение оптического динамического хаоса, в частности, в конденсированных средах в связи с предсказанием в них новых физических явлений и их использованием для создания новых приборов оптоэлектроники, применением этих явлений к оптической обработке информации и созданием нового поколения ЭВМ на оптической основе.

Благодаря большим значениям нелинейности в полупроводниках на длинноволновом краю собственного поглощения кристалла в настоящее время интенсивно изучаются вопросы оптической самоорганизации, в том числе динамического хаоса в системе когерентных (в смысле Боголюбова) экситонов и биэкситонов.

В работах [6–12] построена теория диссипативного динамического хаоса экситонов и биэкситонов при различных квантовых переходах. В частности, показано, что в области M -полосы люминесценции полупроводника динамическая эволюция квазичастиц

* E-mail: shura@usm.md

описывается обобщенной системой уравнений Лоренца в четырехмерном фазовом пространстве. Доказано, что переход системы в хаотический режим осуществляется через бифуркации удвоения периода с образованием странного аттрактора в четырехмерном фазовом пространстве. В работах [13, 14] изучена динамическая эволюция когерентных экситонов и фотонов с учетом экситон-экситонного взаимодействия. В этом случае динамика квазичастиц описывается обобщенной системой уравнений Келдыша [15]. Показано, что в отличие от лоренцевского хаоса, где стохастические осцилляции и рождение странного аттрактора связаны с перескоками между соответствующими состояниями равновесия, в данном случае стохастичность связана с возникновением хаотического аттрактора в четырехмерном фазовом пространстве, которое сложным образом заполняется нестабильными фазовыми траекториями.

Что касается исследования динамического хаоса в гамильтоновых системах когерентных квазичастиц в полупроводниках и диэлектриках, то эти явления только начинают изучаться. В работах [16–18] доказана принципиальная возможность возникновения ультракороткого динамического хаоса в системе экситонов и биэкситонов в области M -полосы люминесценции кристалла и при двухфотонном рождении биэкситона из основного состояния кристалла. Показано, что при определенных критических параметрах в системе возникает стохастическая неустойчивость благодаря разрушению интегралов движения.

Данная работа посвящена изучению нового кооперативного нелинейного явления: ультракороткого динамического хаоса в системе когерентных бозонов при двухфотонных оптических переходах между уровнями. В качестве примера исследуется нелинейная динамика при двухфотонных переходах между экситонными либо экситон-биэкситонными уровнями за времена меньше характерных времен релаксации.

Благодаря тому что эти переходы характеризуются гигантскими силами осциллятора, эффекты когерентного нелинейного взаимодействия света с веществом в этой области частот проявляются наиболее ярко.

В работе Хакена и Ванга [19] и наших работах [20, 21] была построена теория двухфотонного лазера соответственно в модели двухуровневых атомов и при оптической конверсии биэкситонов в экситоны.

В [20, 21] с помощью методов квантовой теории флуктуации и затухания получено управляющее уравнение для матрицы плотности когерентных экситонов, фотонов и биэкситонов в твердых телах. С помощью P -представления Глаубера выведено уравнение Фоккера — Планка для системы когерентных квазичастиц. Найдены условия двухфотонной лазерной генерации биэкситонов в случае биэкситон-экситонной конверсии. Показано, что переход из неупорядоченной фазы в упорядоченную эквивалентен фазовому переходу первого рода.

Общий недостаток работ [19–21] состоит в том, что в них изучены лишь стационарные состояния частиц и квазичастиц при двухфотонных квантовых переходах. Между тем наибольший интерес представляет изучение нелинейной динамики при соответствующих квантовых переходах как с учетом, так и без учета диссипативных процессов.

2. ГАМИЛЬТОНИАН ЗАДАЧИ. ВЫВОД ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Изучим нелинейную ультракороткую динамику когерентных квазичастиц в конденсированных средах в случае двухфотонных экситон-биэкситонных либо экситон-экситонных переходов.

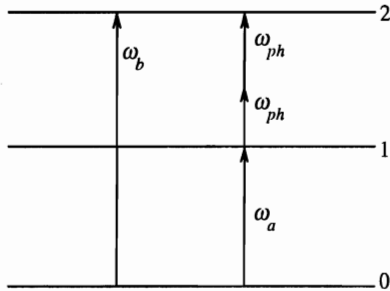


Рис. 1. Энергетическая схема двухфотонной конверсии бозонов из одного возбужденного состояния в другое: 0 — основное состояние кристалла, 1 — уровень энергии первого бозонного уровня, 2 — уровень энергии второго бозонного уровня, ω_{ph} — частота света, ω_a — частота первого бозонного перехода, ω_b — частота второго бозонного перехода

Рассматриваемая нами модель представлена на рис. 1. Роль основного состояния квазичастиц будет играть экситон либо первый экситонный уровень, а возбужденного состояния — биэкситон либо второй экситонный уровень.

Как известно, характерные времена релаксации экситонов и биэкситонов в полупроводниках и диэлектриках порядка 10^{-11} – 10^{-10} с. Однако, благодаря разработке методов генерации и формирования световых импульсов длительностью вплоть до 10^{-15} с, в настоящее время возможно экспериментальное изучение когерентных явлений за времена меньшие времен релаксации. В частности, для наблюдения ультракоротких явлений в системе экситонов и биэкситонов при их двухфотонном возбуждении необходимы временные импульсы в пико- и субпикосекундном диапазоне.

До сих пор нелинейная динамика когерентных экситонов и биэкситонов изучалась в резонансном приближении. Ниже будет показано, что учет нерезонансных слагаемых гамильтониана взаимодействия принципиальным образом изменяет нелинейную динамику квазичастиц и при определенных условиях приводит к возникновению нового кооперативного явления — ультракороткого двухфотонного динамического хаоса при экситон-биэкситонных либо экситон-экситонных переходах.

Основой рассмотрения двухфотонной нелинейной динамики в данном случае является гамильтониан однородно распределенных в кристалле когерентных квазичастиц:

$$\frac{H}{\hbar} = \omega_a a_p^+ a_p + \omega_b b_{2k+p}^+ b_{2k+p} + \omega_{ph} c_k^+ c_k + iq(a_p^+ + a_{-p})(c_k^+ + c_{-k})(c_k^+ + c_{-k})b_{2k+p} - iq(a_p + a_{-p}^+)(c_k + c_{-k}^+)(c_k + c_{-k}^+)b_{2k+p}^+, \tag{1}$$

где a_p^+ (a_p), b_p^+ (b_p) — операторы рождения (уничтожения) квазичастиц с волновым вектором p на первом и втором уровнях с энергиями образования соответственно $\hbar\omega_a$ и $\hbar\omega_b$; c_k^+ (c_k) — оператор рождения (уничтожения) фотона с волновым вектором k и энергией $\hbar\omega_{ph}$; q — константа двухфотонной конверсии между уровнями. В дальнейшем положим $\hbar = 1$ и перейдем к переменным амплитуда-фаза;

$$\begin{aligned} a_p &= \sqrt{n} \exp(-i\varphi_a + ipx), & a_p^+ &= \sqrt{n} \exp(i\varphi_a - ipx), \\ c_k &= \sqrt{f} \exp(-i\varphi_e + ikx), & c_k^+ &= \sqrt{f} \exp(i\varphi_e - ikx), \\ b_{2k+p} &= \sqrt{N} \exp(-i\varphi_b + i(2k+p)x), & b_{2k+p}^+ &= \sqrt{N} \exp(i\varphi_b - i(2k+p)x), \end{aligned} \tag{2}$$

где n , φ_a , N , φ_b — соответственно числа и фазы квазичастиц на первом и втором уровнях, f , φ_e — соответственно число и фаза фотонов.

В новых переменных гамильтониан системы принимает вид

$$H = H_0 + H_r + H_{ar},$$

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \omega_a n + \omega_b N + \omega_{ph} f, \\
 H_r &= 2q\sqrt{nN} f \sin(\varphi_b - \varphi_a - 2\varphi_e),
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 H_{ar} &= 2q\sqrt{nN} f [\sin(\varphi_b - \varphi_a + 2\varphi_e) + \sin(\varphi_b - \varphi_a) + \\
 &+ \sin(\varphi_b + \varphi_a - 2\varphi_e) + \sin(\varphi_b + \varphi_a + 2\varphi_e) + \sin(\varphi_b + \varphi_a)],
 \end{aligned}$$

где H_0 — гамильтониан свободных частиц, H_r и H_{ar} — резонансная и нерезонансная части гамильтониана взаимодействия частиц. Здесь и в дальнейшем опускаем индексы волновых векторов.

С учетом (3) легко получить систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих динамическую эволюцию когерентных квазичастиц:

$$\begin{aligned}
 \frac{dn}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi_a} = 2q\sqrt{nN} f [\cos(\varphi_b - \varphi_a - 2\varphi_e) + \cos(\varphi_b - \varphi_a + 2\varphi_e) + \\
 &+ 2 \cos(\varphi_b - \varphi_a) - \cos(\varphi_b + \varphi_a - 2\varphi_e) - \cos(\varphi_b + \varphi_a + 2\varphi_e) - 2 \cos(\varphi_b + \varphi_a)],
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi_b} = -2q\sqrt{nN} f [\cos(\varphi_b - \varphi_a - 2\varphi_e) + \cos(\varphi_b - \varphi_a + 2\varphi_e) + \\
 &+ 2 \cos(\varphi_b - \varphi_a) + \cos(\varphi_b + \varphi_a - 2\varphi_e) + \cos(\varphi_b + \varphi_a + 2\varphi_e) + 2 \cos(\varphi_b + \varphi_a)],
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi_e} = 4q\sqrt{nN} f [\cos(\varphi_b - \varphi_a - 2\varphi_e) - \cos(\varphi_b - \varphi_a + 2\varphi_e) + \\
 &+ \cos(\varphi_b + \varphi_a - 2\varphi_e) - \cos(\varphi_b + \varphi_a + 2\varphi_e)],
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varphi_a}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial n} = \omega_a + qf\sqrt{\frac{N}{n}} [\sin(\varphi_b - \varphi_a - 2\varphi_e) + \sin(\varphi_b - \varphi_a + 2\varphi_e) + \\
 &+ \sin(\varphi_b - \varphi_a) + \sin(\varphi_b + \varphi_a - 2\varphi_e) + \sin(\varphi_b + \varphi_a + 2\varphi_e) + \sin(\varphi_b + \varphi_a)],
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varphi_b}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial N} = \omega_b + qf\sqrt{\frac{n}{N}} [\sin(\varphi_b - \varphi_a - 2\varphi_e) + \sin(\varphi_b - \varphi_a + 2\varphi_e) + \\
 &+ \sin(\varphi_b - \varphi_a) + \sin(\varphi_b + \varphi_a - 2\varphi_e) + \sin(\varphi_b + \varphi_a + 2\varphi_e) + \sin(\varphi_b + \varphi_a)],
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varphi_e}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial f} = \omega_{ph} + 2q\sqrt{nN} [\sin(\varphi_b - \varphi_a - 2\varphi_e) + \sin(\varphi_b - \varphi_a + 2\varphi_e) + \\
 &+ \sin(\varphi_b - \varphi_a) + \sin(\varphi_b + \varphi_a - 2\varphi_e) + \sin(\varphi_b + \varphi_a + 2\varphi_e) + \sin(\varphi_b + \varphi_a)],
 \end{aligned} \tag{9}$$

Для выделения резонансной фазы введем обозначения

$$\psi = \varphi_b - \varphi_a - 2\varphi_e, \quad \varphi_1 = \varphi_b - \varphi_a + 2\varphi_e, \quad \varphi_2 = \varphi_b - \varphi_a,$$

$$\varphi_3 = \varphi_b + \varphi_a + 2\varphi_e, \quad \varphi_4 = \varphi_b + \varphi_a, \quad \varphi_5 = \varphi_b + \varphi_a - 2\varphi_e.$$

Тогда система уравнений (4)–(9) принимает вид

$$\frac{dn}{d\tau} = \frac{\lambda}{5} \sqrt{nN} f [\cos \psi + \varepsilon (\cos \varphi_1 + 2 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_3 - 2 \cos \varphi_4 - \cos \varphi_5)] , \quad (10)$$

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{2\lambda}{5} \sqrt{nN} f [\cos \psi - \varepsilon (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_3 - \cos \varphi_5)] , \quad (11)$$

$$\frac{dN}{d\tau} = -\frac{\lambda}{5} \sqrt{nN} f [\cos \psi + \varepsilon (\cos \varphi_1 + 2 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3 + 2 \cos \varphi_4 + \cos \varphi_5)] , \quad (12)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \Delta + \frac{\lambda}{10} \left[f \sqrt{\frac{n}{N}} - f \sqrt{\frac{N}{n}} - 2\sqrt{nN} \right] B , \quad (13)$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = \Delta + 4 + \frac{\lambda}{10} \left[f \sqrt{\frac{n}{N}} - f \sqrt{\frac{N}{n}} + 2\sqrt{nN} \right] B , \quad (14)$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau} = \Delta + 2 + \frac{\lambda}{10} \left[f \sqrt{\frac{n}{N}} - f \sqrt{\frac{N}{n}} \right] B , \quad (15)$$

$$\frac{d\varphi_3}{d\tau} = \Delta + 4 + 2 \frac{\omega_a}{\omega_{ph}} + \frac{\lambda}{10} \left[f \sqrt{\frac{n}{N}} + f \sqrt{\frac{N}{n}} + 2\sqrt{nN} \right] B , \quad (16)$$

$$\frac{d\varphi_4}{d\tau} = \Delta + 2 + 2 \frac{\omega_a}{\omega_{ph}} + \frac{\lambda}{10} \left[f \sqrt{\frac{n}{N}} + f \sqrt{\frac{N}{n}} \right] B , \quad (17)$$

$$\frac{d\varphi_5}{d\tau} = \Delta + 2 \frac{\omega_a}{\omega_{ph}} + \frac{\lambda}{10} \left[f \sqrt{\frac{n}{N}} + f \sqrt{\frac{N}{n}} - 2\sqrt{nN} \right] B , \quad (18)$$

где $B = \sin \psi + \varepsilon (\sin \varphi_1 + 2 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_3 + 2 \sin \varphi_4 + \sin \varphi_5)$, $\tau = tck$, $\lambda = 10q/\omega_{ph}$, $\Delta = (\omega_b - \omega_a - 2\omega_{ph})/\omega_{ph}$, а параметр ε введен нами искусственно и принимает значения 0 или 1. При $\varepsilon = 1$ система уравнений (10)–(18) эквивалентна системе уравнений (4)–(9). Резонансное приближение связано с пренебрежением членов, содержащих φ_i , $i = 1-5$, что эквивалентно $\varepsilon = 0$.

3. РЕЗОНАНСНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ($\varepsilon = 0$)

В резонансном приближении система имеет три интеграла движения для числа частиц:

$$2N + f = C, \quad n + N = C_1, \quad 2n - f = C_2. \quad (19)$$

При этом из (10)–(18) легко получить редуцированную систему уравнений, описывающую динамическую эволюцию когерентных квазичастиц в резонансном приближении:

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\partial P}{\partial N} = \Delta + \frac{\lambda}{10} \left[\sqrt{\frac{C_1 - N}{N}}(C - 2N) - \sqrt{\frac{N}{C_1 - N}}(C - 2N) - 2\sqrt{N(C_1 - N)} \right] \sin \psi, \quad (20)$$

$$\frac{dN}{d\tau} = -\frac{\partial P}{\partial \psi} = -\frac{\lambda}{5}(C - 2N)\sqrt{N(C_1 - N)} \cos \psi, \quad (21)$$

$$P = \frac{H - \omega_a C_1 - \omega_{ph} C}{\omega_{ph}} = \Delta N + \frac{\lambda}{5}(C - 2N)\sqrt{N(C_1 - N)} \sin \psi, \quad (22)$$

P — дополнительный интеграл движения, играющий роль гамильтониана в пространстве переменных (N, ψ) .

Эволюция системы в зависимости от соотношения между значениями интегралов движения и расстройки резонанса имеет различное поведение.

Вводя обозначения $\hat{\lambda} = \lambda C_1$, $\hat{n} = n/C_1$, $\hat{N} = N/C_1$, $\hat{f} = f/C_1$, $\hat{C} = C/C_1$, перейдя к переменным $(N, dN/d\tau)$, подставляя (22) в (21) и опуская далее знак $\hat{\cdot}$, для невозмущенного случая получаем

$$\left(\frac{dN}{d\tau}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{25} N(1 - N)(C - 2N)^2 - (P - \Delta N)^2. \quad (23)$$

Решение (23) имеет вид

$$N = \frac{N_4 N_{13} + N_1 N_{34} \operatorname{sn}^2((\lambda\tau/5)\sqrt{N_{24}N_{13}} + F(\varphi_0); \kappa)}{N_{13} + N_{34} \operatorname{sn}^2((\lambda\tau/5)\sqrt{N_{24}N_{13}} + F(\varphi_0); \kappa)}, \quad (24)$$

где $\varphi_0 = \sin^{-1} \sqrt{N_{13}N_{04}/N_{34}N_{10}}$ — аргумент эллиптического интеграла первого рода F , $\kappa = \sqrt{N_{12}N_{34}/N_{13}N_{24}}$ — модуль эллиптической функции, N_0 — начальное число частиц на втором уровне, $N_{ij} = N_i - N_j$, $N_4 < N_3 < N_2 < N_1$ — корни уравнения

$$\frac{\lambda^2}{25} N(1 - N)(C - 2N)^2 - (P - \Delta N)^2 = 0. \quad (25)$$

При этом нелинейная частота колебаний выражается формулой

$$\omega(P) = \frac{\pi q \sqrt{N_{13}N_{24}}}{K(\kappa)}, \quad (26)$$

где $K(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Таким образом, число квазичастиц изменяется во времени периодически с частотой, зависящей от значений интегралов движения и расстройки резонанса.

В случае если $P/\Delta = C/2$ и $C > 2$, получаем частное решение вида

$$N = \frac{N_4 N_{13} + N_1 N_{34} \sin^2((\lambda\tau/5)\sqrt{N_{24}N_{13}} + \varphi_0)}{N_{13} + N_{34} \sin^2((\lambda\tau/5)\sqrt{N_{24}N_{13}} + \varphi_0)}, \quad (27)$$

где $N_4 = 25\Delta^2/4\lambda^2$, $N_3 = 1$, $N_{1,2} = C/2$. При $P = \Delta = 0$, $N_1 = N_2 = N_3 = 1$, $N_4 = 0$ для N получаем

$$N = \frac{\lambda^2 \tau^2 / 25}{1 + \lambda^2 \tau^2 / 25}. \quad (28)$$

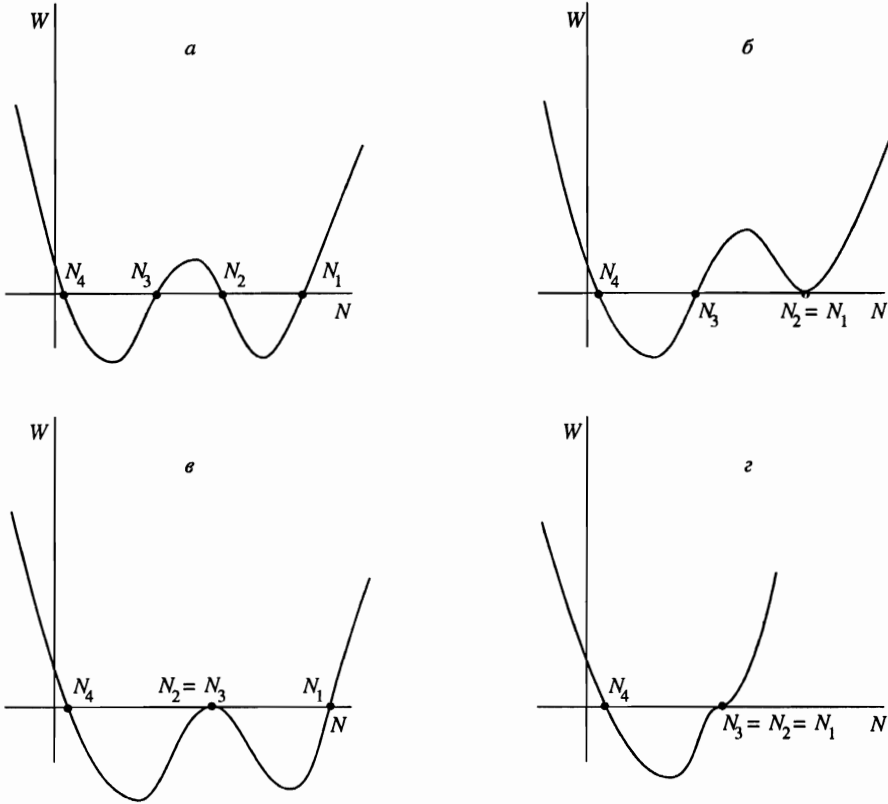


Рис. 2. Потенциальная энергия $W(N)$ нелинейного осциллятора: в общем случае (а), при $P = C\Delta/2$ и $C > 2$ (б), при $P = C\Delta/2$ и $C < 2$ (в), и при $P = \Delta = 0$ и $C = 2$ (г). Горизонтальная прямая соответствует полной энергии осциллятора

При $P/\Delta = C/2$ и $C < 2$ фазовая траектория системы является сепаратрисой. Как известно [2, 3], любые сколь угодно малые возмущения приводят к существенному разрушению траекторий вблизи сепаратрисы и при определенных условиях движение квазичастиц имеет стохастический характер.

Решение на сепаратрисе имеет вид

$$N = \frac{N_4 N_{13} + N_1 N_{34} \operatorname{th}^2 \left((\lambda\tau/5) \sqrt{N_{24} N_{13}} + \lg \left(\operatorname{tg}(\varphi_0/2) + \pi/4 \right) \right)}{N_{13} + N_{34} \operatorname{th}^2 \left((\lambda\tau/5) \sqrt{N_{24} N_{13}} + \lg \left(\operatorname{tg}(\varphi_0/2) + \pi/4 \right) \right)}. \quad (29)$$

При этом $N_4 = 25\Delta^2/4\lambda^2$, $N_{2,3} = C/2$, $N_1 = 1$.

Отметим, что различные решения уравнения (23) определяются формой потенциальной кривой (рис. 2)

$$W(N) = -\frac{\lambda^2}{25} N(1-N)(C-2N)^2 - (P-\Delta N)^2. \quad (30)$$

4. РАЗРУШЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ И СТОХАСТИЗАЦИЯ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

В невозмущенном случае траекториями движения являются замкнутые кривые $N(\psi)$, определяемые параметрическим уравнением (22). В случае учета антирезонансных членов $\varepsilon = 1$ при малых значениях λ имеет место изменение интегралов движения, а с ростом λ — их разрушение.

Изменение во времени интеграла движения P определяется выражением

$$\frac{dP(N, \psi, C, C_1)}{d\tau} = \frac{\partial P}{\partial N} \frac{dN}{d\tau} + \frac{\partial P}{\partial \psi} \frac{d\psi}{d\tau} + \frac{\partial P}{\partial C} \frac{dC}{d\tau} + \frac{\partial P}{\partial C_1} \frac{dC_1}{d\tau}. \tag{31}$$

С учетом (12), (13), (20), (21) для возмущенных уравнений получаем

$$\frac{dN}{d\tau} = -\frac{\partial P}{\partial \psi} + \delta \left(\frac{dN}{d\tau} \right), \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\partial P}{\partial N} + \delta \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right), \tag{32}$$

$$\delta \left(\frac{dN}{d\tau} \right) = -\frac{\lambda}{5} (C - 2N) \sqrt{N(C_1 - N)} (\cos \varphi_1 + 2 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3 + 2 \cos \varphi_4 + \cos \varphi_5), \tag{33}$$

$$\delta \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right) = \frac{\lambda}{10} \left[\sqrt{\frac{C_1 - N}{N}} (C - 2N) - \sqrt{\frac{N}{C_1 - N}} (C - 2N) - 2\sqrt{N(C_1 - N)} \right] \times \\ \times (\sin \varphi_1 + 2 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_3 + 2 \sin \varphi_4 + \sin \varphi_5). \tag{34}$$

Подставляя (32)–(34) в (31), получаем

$$\frac{dP}{d\tau} \approx \left\{ \frac{\lambda^2}{50} [(C - 2N)^2(1 - 2N) - 2(C - 2N)(1 - N)N] (\sin(\varphi_1 - \psi) + \right. \\ \left. + 2 \sin(\varphi_2 - \psi) + \sin(\varphi_3 - \psi) + 2 \sin(\varphi_4 - \psi) + \sin(\varphi_5 - \psi)) + \right. \\ \left. + \frac{\Delta \lambda}{5} (C - 2N) \sqrt{N(C_1 - N)} (\cos \varphi_1 + 2 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3 + 2 \cos \varphi_4 + \right. \\ \left. + \cos \varphi_5) \right\} / \left[1 + \frac{P - \Delta N}{C - 2N} \right], \tag{35}$$

где для N, ψ, φ_i можно воспользоваться невозмущенными выражениями.

Вблизи сепаратрисы $P/\Delta \rightarrow C/2, C < 2$, для характеристических корней получаем

$$N_1 = 1 - \frac{(P - \Delta)^2}{(2\lambda/5)^2 (C/2 - 1)^2 - 2(P - \Delta)}, \tag{36}$$

$$N_{2,3} = \frac{C}{2} - \frac{(P - \Delta C/2)(\Delta \pm (\lambda/5)\sqrt{C(2 - C)})}{(\lambda^2/25)C(2 - C) - \Delta^2}, \tag{37}$$

$$N_4 = \frac{P^2}{(\lambda C/5)^2 + 2\Delta P}. \tag{38}$$

Величина $N(\tau)$ изменяется почти от 0 до $C/2$, где в точке поворота гиперболического типа ее период стремится к бесконечности. При $\lambda \ll 1$ знаменатель в (35) ~ 1 , $[(C - 2N)^2(1 - 2N) - 2(C - 2N)(1 - N)N] \sim C^2$, $(C - 2N)\sqrt{N(C_1 - N)} \sim (P - \Delta C/2)/\lambda$ вдали от особой точки $N = C/2$ на малом интервале времени периода малых колебаний $2\pi/\omega_0$. В окрестности особой точки $[(C - 2N)^2(1 - 2N) - 2(C - 2N)(1 - N)N] \sim \sim (P - \Delta C/2)/\lambda$ и $(C - 2N)\sqrt{N(C_1 - N)} \sim (P - \Delta C/2)/\lambda$ на большом интервале времени $2\pi/\omega(P)$, где $\omega(P)$ — нелинейная частота колебаний. В этом случае вместо (35) имеем

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{\lambda^2}{50} C^2 A(\tau) (\sin \theta_1 + 2 \sin \theta_2 + \sin \theta_3 + 2 \sin \theta_4 + \sin \theta_5), \quad (39)$$

$$\frac{d\theta_1}{d\tau} = \Delta + 4 + O(\lambda), \quad (40)$$

$$\frac{d\theta_2}{d\tau} = \Delta + 2 + O(\lambda), \quad (41)$$

$$\frac{d\theta_3}{d\tau} = \Delta + 4 + 2 \frac{\omega_a}{\omega_{ph}} + O(\lambda), \quad (42)$$

$$\frac{d\theta_4}{d\tau} = \Delta + 2 + 2 \frac{\omega_a}{\omega_{ph}} + O(\lambda), \quad (43)$$

$$\frac{d\theta_5}{d\tau} = \Delta + 2 \frac{\omega_a}{\omega_{ph}} + O(\lambda), \quad (44)$$

где $A(\tau)$ — периодическая функция с периодом $2\pi/\omega(P)$, высотой ~ 1 и шириной $2\pi/\omega_0$, где $\omega_0 = \sqrt{2 + C}\lambda/5$ — частота малых колебаний системы при $P \rightarrow \Delta C/2$ и $C < 2$.

Перейдя в (39)–(44) к системе дискретных преобразований, получаем

$$P_{m+1} = P_m + \bar{\Delta}P, \quad (45)$$

$$\theta_{i,m+1} = \theta_{i,m} + \frac{4\pi}{\omega(P_{m+1})} = \theta_{i,m} + \frac{4\pi}{\omega(P_m)} - \frac{4\pi}{\omega^2(P_m)} \frac{d\omega(P_m)}{dP_m}, \quad i = 1-5, \quad (46)$$

$$\bar{\Delta}P \approx \frac{\lambda^2}{50} C^2 \int A(\tau) (\sin \theta_1 + 2 \sin \theta_2 + \sin \theta_3 + 2 \sin \theta_4 + \sin \theta_5) d\tau. \quad (47)$$

Характер решения (45)–(47) определяется величиной M [2, 3]:

$$M = \frac{4\pi}{\omega^2(P)} \left| \frac{d\omega(P)}{dP} \right|. \quad (48)$$

При $M \ll 1$ система когерентных квазичастиц совершает условно-периодические колебания, а при $M \gg 1$ движение становится стохастическим с временем расцепления корреляции фаз

$$R(\tau) = \left\langle \exp \left(\sum_{i=1,5} [\theta_i(\tau_1) - \theta_i(\tau_1 + \tau)] \right) \right\rangle \sim \exp \left(-\frac{5\tau}{\tau_c} \right), \quad (49)$$

где $\tau_c = 1/\omega(P) \ln M$.

Изменение P на одном шаге преобразований

$$\max \bar{\Delta}P \sim \frac{28}{10} C^2 \lambda \pi \exp \left(-\frac{5\alpha\pi}{2\lambda} \right), \quad (50)$$

где константа $\alpha \sim 1$. Частота нелинейных колебаний $\omega(P)$ вблизи сепаратрисы равна

$$\omega(P) = \pi \lambda \sqrt{N_{13}N_{24}} / 5 \ln \left[\frac{5\sqrt{C(2-C)} ((\lambda^2/25)C(2-C) - \Delta^2)}{\lambda(P - \Delta C/2)} \right]. \quad (51)$$

Подставляя (50), (51) в (48), получаем

$$M = 56C^2\pi \exp \left(-\frac{5\alpha\pi}{2\lambda} \right) / \left(P - \frac{\Delta C}{2} \right) \sqrt{N_{13}N_{24}}. \quad (52)$$

Граница стохастического слоя определяется из условия $M(P_0, H) \sim 1$:

$$P_0 = \frac{\Delta C}{2} + 56C^2\pi \exp \left(-\frac{5\alpha\pi}{2\lambda} \right) / \sqrt{N_{13}N_{24}}, \quad (53)$$

а инкремент распада нутационного движения определяется выражением

$$\gamma_c = \frac{\pi \lambda \sqrt{N_{13}N_{24}}}{5} \ln M / \ln \left[\frac{5\sqrt{C(2-C)} ((\lambda^2/25)C(2-C) - \Delta^2)}{\lambda(P - \Delta C/2)} \right]. \quad (54)$$

5. КОМПЬЮТЕРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Численный анализ проводился без ограничения общности при $\Delta = 0$. В общем случае система уравнений (4)–(9) имеет один интеграл движения — энергию системы H , и областью движения является пятимерная гиперповерхность, определяемая (3) в шестимерном фазовом пространстве.

В случае пренебрежения антирезонансными слагаемыми появляются дополнительные интегралы движения C, C_1, C_2 и P , два из которых — линейно независимые величины. Величины H, C и P определяют трехпараметрическое семейство траекторий, представляющих собой либо замкнутые кривые на поверхности, либо асимптотические кривые. Временная эволюция когерентных квазичастиц при этом суть нелинейные периодические колебания с конечным либо бесконечным периодом. С увеличением значения λ уменьшается период нутационных колебаний. По мере приближения к сепаратрисе ($C < 2, P \rightarrow 0$) углы фазовой траектории заостряются и принимают прямоугольную форму. Число квазичастиц изменяется от минимального до максимального значения (или наоборот) при постоянной фазе $\psi = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ в зависимости

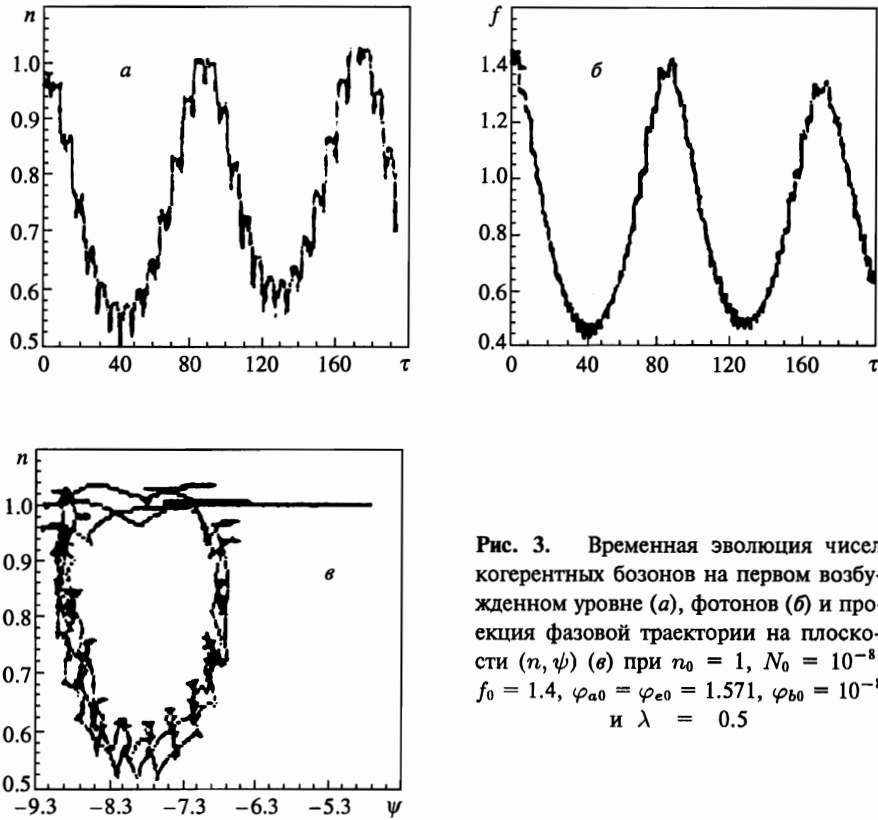


Рис. 3. Временная эволюция чисел когерентных бозонов на первом возбужденном уровне (а), фотонов (б) и проекция фазовой траектории на плоскости (n, ψ) (в) при $n_0 = 1$, $N_0 = 10^{-8}$, $f_0 = 1.4$, $\varphi_{a0} = \varphi_{e0} = 1.571$, $\varphi_{b0} = 10^{-8}$ и $\lambda = 0.5$

от начальных условий). При достижении экстремальных значений числа квазичастиц происходит скачкообразное изменение фазы $\psi_{t+0} = \psi_{t-0} \pm \pi$.

Учет антирезонансных членов в гамильтониане приводит к деформации формы потенциальной энергии, вследствие чего существующие аperiодические режимы колебаний исчезают. В этом случае для малых значений λ при любых начальных условиях система совершает условно-периодическое движение (рис. 3). В фазовом пространстве это движение изображается траекторией, которая наматывается на тороидальную трубку. Главная гармоника при этом модулируется субгармониками, амплитуда которых увеличивается с ростом λ , усложняя характер движения.

С ростом λ движение системы усложняется и условно-периодические колебания начинают переходить в хаотические. При этом происходит полное разрушение интегралов движения. На рис. 4 представлена хаотическая динамика числа квазичастиц n и f и соответствующий фазовый портрет. Отметим, что числа квазичастиц изменяются в пределах потенциальных ям, в которых они начинают свое движение. Интересное явление было выявлено в результате компьютерного эксперимента в пространстве параметров $C \sim 1.3-1.7$. При этих значениях наблюдается туннелирование нелинейного движения из одной потенциальной ямы в другую. Туннельный эффект сопровождается расширением траекторий по фазовому пространству (рис. 5). Из рисунка видно резкое изменение нижнего предела числа квазичастиц на первом уровне n и верхнего предела

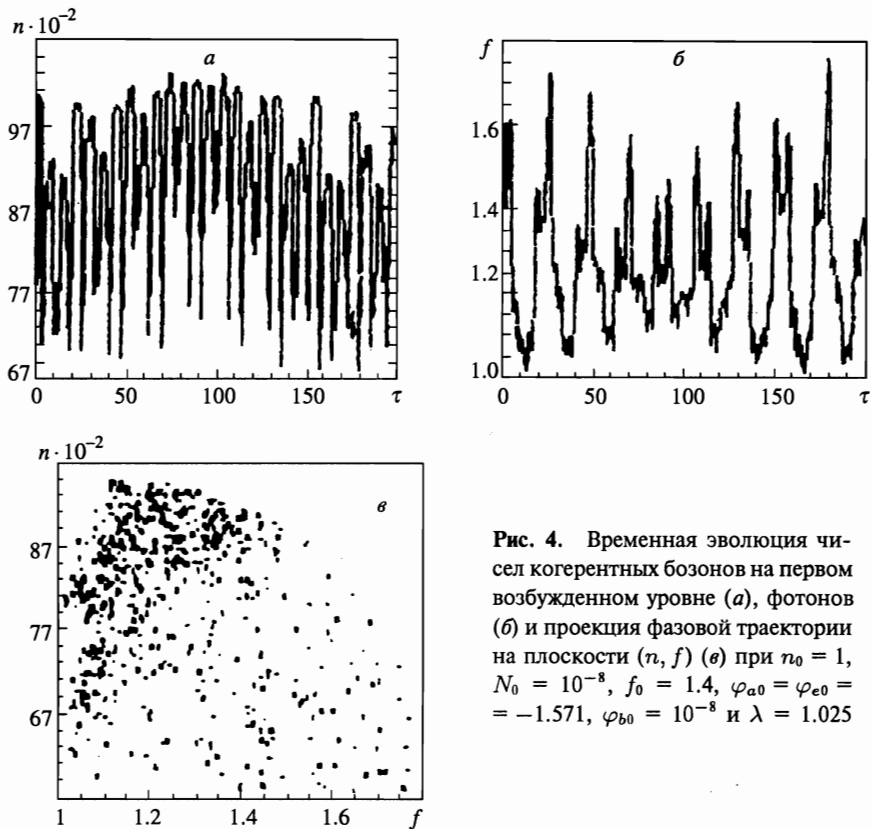


Рис. 4. Временная эволюция чисел когерентных бозонов на первом возбужденном уровне (а), фотонов (б) и проекция фазовой траектории на плоскости (n, f) (в) при $n_0 = 1$, $N_0 = 10^{-8}$, $f_0 = 1.4$, $\varphi_{a0} = \varphi_{e0} = -1.571$, $\varphi_{b0} = 10^{-8}$ и $\lambda = 1.025$

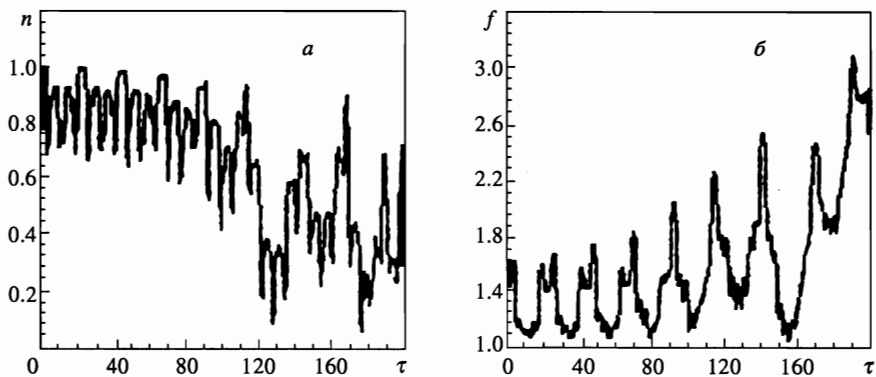


Рис. 5. Временная эволюция чисел когерентных бозонов на первом возбужденном уровне (а) и фотонов (б) при $n_0 = 1$, $N_0 = 10^{-8}$, $f_0 = 1.4$, $\varphi_{a0} = \varphi_{e0} = -1.571$, $\varphi_{b0} = 10^{-8}$ и $\lambda = 1.05$

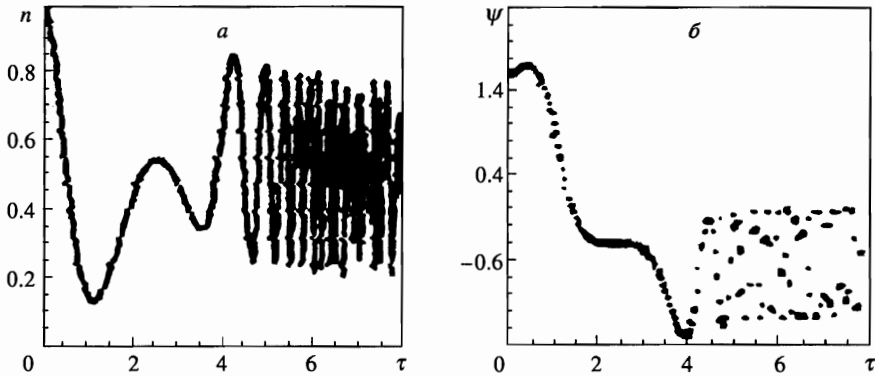


Рис. 6. Временная эволюция чисел когерентных бозонов на первом возбужденном уровне (а), когерентной фазы (б) при $n_0 = 1$, $N_0 = 10^{-8}$, $f_0 = 2$, $\psi_0 = \varphi_{01} = 1.571$ и $\lambda = 7.5$

числа фотонов f в сравнении с предыдущим рисунком, когда движение происходит в одной потенциальной яме. Фазовая траектория в этом случае размывается в фазовом пространстве, занимая больший фазовый объем.

Расчеты показали, что возможна локализация эволюции квазичастиц в пределах одной потенциальной ямы при постоянном значении λ путем изменения значения расстройки резонанса Δ , т. е. удалением от условия $P = \Delta C/2$.

Отметим одну принципиальную особенность данной модели. Условие $C < 2$ определяет не одну сепаратрису, как в работах [17, 18], а семейство сепаратрис. Каждой сепаратрисе соответствует определенный набор начальных концентраций квазичастиц. Изменяя концентрацию квазичастиц, мы оказываемся в окрестности другой сепаратрисы. Вблизи различных сепаратрис хаос наступает при различных величинах λ . Наиболее быстро хаос наступает при больших C . По мере уменьшения C хаос наступает при больших λ .

В зависимости от конкретной физической ситуации может оказаться, что в (6) отлично от нуля лишь одно нерезонансное слагаемое.

На рис. 6 представлена динамическая эволюция системы в случае отличного от нуля нерезонансного члена, содержащего $\sin \varphi_1$. Из рисунка видно, что при достижении резонансной фазой значения $\psi = -\pi/2$, что в невозмущенном случае соответствует гиперболической точке поворота, система переходит в режим стохастического движения, что свидетельствует об особой роли точек гиперболического типа в возникновении стохастической неустойчивости. Отметим также, что хотя эволюция чисел n и y является стохастической, интеграл $C = n + N$ сохраняется, т. е. нерезонансный член $\sin \varphi_1$ его не разрушает.

На рис. 7 представлено развитие локальной неустойчивости при различных значениях λ . Расстояние между двумя начально близкими траекториями определяется выражением

$$D = \left[(n_1 - n_2)^2 + (N_1 - N_2)^2 + (f_1 - f_2)^2 + \right.$$

$$+ \left\{ \frac{\varphi_{a1} - \varphi_{a2}}{2\pi} \right\}^2 + \left\{ \frac{\varphi_{b1} - \varphi_{b2}}{2\pi} \right\}^2 + \left\{ \frac{\varphi_{e1} - \varphi_{e2}}{2\pi} \right\}^2 \Big]^{1/2}. \tag{55}$$

Инкремент распада находим из выражения

$$D = D_0 \exp(\gamma_c \tau). \tag{56}$$

При малых λ расстояние между начально близкими траекториями остается малым во времени. С ростом λ при достижении λ_{cr} получаем значение $D \sim 1$. При $\lambda > \lambda_{cr}$ резко возрастает инкремент γ_c : $\gamma_c = 0.008, 0.04$ соответственно при $\lambda = 1.025, 1.05$ и $C = 1.4$. Каждой сепаратрисе соответствует свое λ_{cr} . Расчеты показали, что $C\lambda_{C,cr} \approx \text{const}$.

Предсказанный нами динамический хаос относится к явлению динамического хаоса в гамильтоновых системах.

В общем случае динамические уравнения для систем с n степенями свободы не являются полностью интегрируемыми.

В нашем случае система уравнений, описывающая динамическую эволюцию когерентных бозонов, разбита на интегрируемую часть (при $\epsilon = 0$) и неинтегрируемую, обусловленную нерезонансными слагаемыми ($\epsilon = 1$).

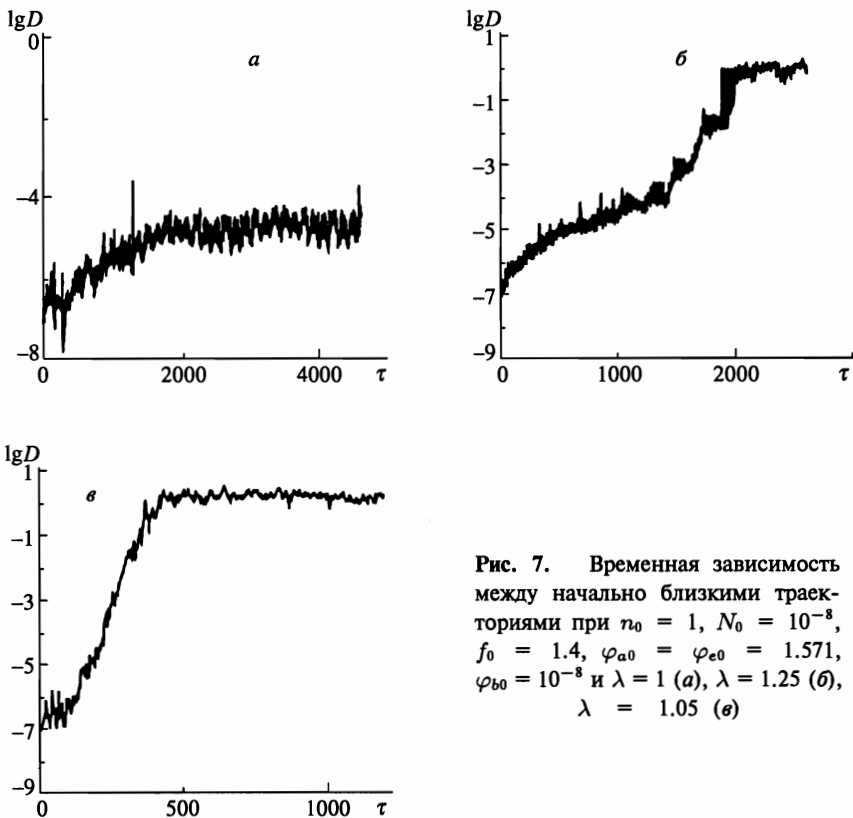


Рис. 7. Временная зависимость между начально близкими траекториями при $n_0 = 1, N_0 = 10^{-8}, f_0 = 1.4, \varphi_{a0} = \varphi_{e0} = 1.571, \varphi_{b0} = 10^{-8}$ и $\lambda = 1$ (а), $\lambda = 1.25$ (б), $\lambda = 1.05$ (в)

Если $\varepsilon = 0$, то система уравнений (10)–(18) является полностью интегрируемой в виде периодических тригонометрических и эллиптических функций и аperiodических гиперболических функций на сепаратрисе.

Насколько существенно изменяется характер интегрируемой системы при учете возмущений ($\varepsilon = 1$), дает ответ теорема Колмогорова — Арнольда — Мозера [22–25]. В этом случае энергетическая гиперповерхность разбивается на две области ненулевого объема. Одна область содержит деформированные за счет антирезонансных слагаемых гамильтониана торы. В другой, меньшей, области, объем которой при $\varepsilon = 0$ равен нулю, движение является очень сложным. В этой области существующие при $\varepsilon = 0$ торы разрушаются и движение становится хаотическим.

Как известно, при числе степеней свободы $n > 2$ (в нашем случае $n = 3$) n -мерные инвариантные неразрушенные торы не делят $2n - 1$ -мерную энергетическую поверхность на непересекающиеся части и области разрушенных резонансных торов сливаются, образуя сложную единую сеть — так называемую паутину Арнольда. При этом фазовые точки могут удаляться на существенное расстояние от начального положения, т. е. имеет место явление, называемое диффузией Арнольда [2, 26, 27]. Характерным для такой диффузии является то, что система не обладает глобальной устойчивостью.

Возникающая при этом хаотическая неустойчивость не связана с действием каких-либо случайных сил, а обусловлена внутренним свойством системы, а именно, локальной неустойчивостью.

В изученной нами модели выражение для возмущения является точным, так что хаотичность не связана с плохой сходимостью.

Компьютерный эксперимент был проделан с различной степенью погрешности, и было найдено, что хаотическое решение устойчиво относительно выбора шага вычисления, т. е. мы не имеем хаоса, обусловленного компьютерным экспериментом. Используемая нами программа была проверена воспроизведением результатов работы Заславского и Сагдеева [23] по динамическому хаосу и на системе уравнений Лоренца [10, с. 88].

Таким образом, доказана принципиальная возможность возникновения ультракороткого динамического хаоса при двухфотонных квантовых переходах между энергетическими уровнями квазичастиц бозонного типа в конденсированных средах. Показано, что учет антирезонансных слагаемых в гамильтониане взаимодействия электромагнитного поля с системой квазичастиц при определенных значениях параметров приводит к стохастизации системы. Значение $\lambda \sim 1$ является критическим (при $C = 1.4$) и приводит к большой области стохастичности. Предсказан эффект туннелирования нелинейного движения из одной потенциальной ямы в другую.

В заключение отметим, что двухфотонный ультракороткий динамический хаос возможен и в модели двухуровневых атомов.

Литература

1. Ю. Н. Неймарк, П. С. Ланда, *Стохастические и хаотические колебания*, Наука, Москва (1987).
2. Г. М. Заславский, *Стохастичность динамических систем*, Наука, Москва (1984).
3. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).
4. М. Н. Рабинович, Д. Н. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн*, Наука, Москва (1984).
5. *Странные аттракторы*, Мир, Москва (1981).

6. A. H. Rotaru and G. D. Shibarshina, Phys. Lett. A **109**, 292 (1985).
7. А. Х. Ротару, ФТТ **28**, 2492 (1986).
8. S. A. Moscalenco, A. H. Rotaru, and V. A. Zaloj, Phys. Stat. Sol. (b) **150**, 454 (1988).
9. А. Х. Ротару, В. А. Залож, ФТТ **31**, 234 (1989).
10. А. Х. Ротару, В. А. Залож, *Оптическая самоорганизация экситонов и биэкситонов в полупроводниках*, Кишинев, Штиинца (1990).
11. В. А. Залож, А. Х. Ротару, В. З. Трончу, ЖЭТФ **103**, 994 (1993).
12. В. А. Залож, А. Х. Ротару, В. З. Трончу, ЖЭТФ **105**, 260 (1994).
13. В. А. Залож, С. А. Москаленко, А. Х. Ротару, ЖЭТФ **95**, 601 (1989).
14. Б. Ш. Парканский, А. Х. Ротару, ЖЭТФ **99**, 899 (1991).
15. Л. В. Келдыш, *Современные проблемы физики*, Наука, Москва (1992), с. 433.
16. А. Х. Ротару, К. В. Шура, ФТТ **33**, 1993 (1991).
17. А. Х. Ротару, К. В. Шура, ЖЭТФ **104**, 2374 (1993).
18. А. Х. Ротару, К. В. Шура, ЖЭТФ **107**, 450 (1995).
19. Z. C. Wang and H. Z. Naken, Phys. V. Cond. Matter **55**, 364 (1984).
20. С. А. Москаленко, А. Х. Ротару, Ю. М. Швера, ФТТ **29**, 2396 (1987).
21. С. А. Москаленко, А. Х. Ротару, Ю. М. Швера, ТМФ **75**, 295 (1987).
22. В. И. Арнольд, УМН **18**, 13 (1963).
23. В. И. Арнольд, УМН **18**, 81 (1963).
24. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **98**, 527 (1954).
25. Ю. Мозер, Математика **16**, 51 (1963).
26. В. И. Арнольд, ДАН СССР **156**, 9 (1964).
27. А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, Мир, Москва (1984).