

СКЕЙЛИНГ В ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВБЛИЗИ ВЕРХНЕЙ КРИТИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

И. М. Сулов*

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
117334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 21 октября 1997 г.

Явление верхней критической размерности d_{c2} исследуется с точки зрения скейлинговых представлений. Показано, что параметр Таулеса $g(L)$ не является единственным параметром, существенным при масштабных преобразованиях: второй существенный параметр связан с недиагональным беспорядком. Исследование возникающего двухпараметрического скейлинга выявляет возможность двух различных сценариев, смена которых и определяет верхнюю критическую размерность. Первый сценарий соответствует обычному однопараметрическому скейлингу и характеризуется постоянством $g(L)$ при масштабных преобразованиях для системы в критической точке. Во втором сценарии параметр Таулеса $g(L)$ растет в критической точке по закону $L^{d-d_{c2}}$, что является причиной нарушения соотношения Вегнера $s = \nu(d - 2)$ между критическими индексами s и ν проводимости и радиуса локализации, которое принимает вид $s = \nu(d_{c2} - 2)$. Полученные зависимости для $g(L)$ согласуются с построенной ранее симметричной теорией [30]. Предложена более строгая версия аргументации Мотта для локализации при топологическом беспорядке.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза однопараметрического скейлинга [1] сыграла важную роль в формировании современных представлений теории локализации [2–8] и стимулировала создание теории квантовых поправок [9], всесторонне подтверждаемой экспериментом. Критика однопараметрического скейлинга [10–13] относится не к физическим идеям, лежащим в его основе, а скорее к его обоснованию в формализме σ -моделей [14–16]. Проблема обоснования остается по-прежнему актуальной и может потребовать уточнения смысла используемых понятий и ограничения области применимости. В настоящей работе мы обсудим модификации скейлинговых представлений, которые, на наш взгляд, неизбежны в пространствах высокой размерности.

Весь опыт теории фазовых переходов [17, 18] свидетельствует о том, что скейлинг существует лишь для размерностей пространства d , лежащих в интервале между нижней и верхней критическими размерностями d_{c1} и d_{c2} ; для $d < d_{c1}$ фазовый переход отсутствует, а для $d > d_{c2}$ справедлива теория среднего поля. В теории локализации считается общепринятым, что $d_{c1} = 2$ [1], тогда как вопрос о верхней критической размерности являлся дискуссионным на протяжении многих лет [19–25]. Для задачи о плотности состояний (определяемой средней функцией Грина $\langle G \rangle$) он исчерпывающим образом решен в недавних работах автора [26–29]: в них утверждается, что $d_{c2} = 4$, показано, каким образом условие $d > 4$ приводит к упрощению проблемы, исследован характер

* E-mail: SUSLOV@KAPITZA.RAS.RU

сингулярности при $d = 4$, и построена $(4 - \epsilon)$ -мерная теория. Для задачи о проводимости, определяемой коррелятором $\langle G^R G^A \rangle$, значение верхней критической размерности в принципе могло бы быть другим; такое утверждение в явном виде делалось в работе [21], в которой, однако, имеются серьезные ошибки [26]. В действительности это не так: выделенность размерности $d = 4$ наиболее фундаментальным образом проявляется в перенормируемости теории [26–29], а ситуация с перенормируемостью в обеих задачах одинакова — это ясно уже из того, что в них используется одна и та же диаграммная техника. Неперенормируемость теории при $d > 4$ указывает на существенность структуры гамильтониана на атомном масштабе, что и является причиной нарушения масштабной инвариантности. Эти соображения подтверждаются построенной автором «симметричной теорией» [30], результаты которой согласуются с однопараметрическим скейлингом лишь при $d < 4$.

Настоящая работа стимулирована двумя обстоятельствами. С одной стороны, в последнее время известную популярность приобрела точка зрения, что $d_{c2} = \infty$ [10, 24, 25]. Эта точка зрения имеет под собой некоторые основания, так как в рамках однопараметрического скейлинга *не видно никаких указаний* на существование верхней критической размерности. Это означает ограниченность физических идей, лежащих в основе скейлинговой гипотезы, несмотря на то, что эти идеи выдержали многолетнюю дискуссию.

С другой стороны, следующее из скейлинговой теории соотношение Вегнера

$$s = (d - 2)\nu \quad (1)$$

между критическими индексами проводимости (s) и радиуса локализации волновых функций (ν) может быть выведено при более слабых предположениях [31] — достаточно предположить симметрию корреляционной длины по разные стороны перехода и независимость параметра Таулеса в критической точке от масштаба расстояний. Эти два предположения являются общепринятыми, и потому механизм нарушения соотношения Вегнера при $d > 4$ [23, 30, 32] требует осмысления на физическом уровне.

Настоящая работа имеет целью восполнить эти пробелы и исследовать явление верхней критической размерности с точки зрения скейлинговых представлений.

2. ПРОБЛЕМА ВТОРОГО ПАРАМЕТРА

В основе скейлинговых представлений лежит построение Таулеса [4, 33], аналогичное известному построению Каданова в теории критических явлений [17, 18]. Исходная неупорядоченная система, описываемая моделью Андерсона на d -мерной кубической решетке с интегралами перекрытия J между ближайшими соседями и разбросом уровней W , разбивается на блоки размера L ; при отсутствии взаимодействия между блоками в каждом из них имеется система случайно расположенных уровней с характерным расстоянием $\Delta(L) \sim J (a_0/L)^d$ между ними (a_0 — постоянная решетки). При «включении» взаимодействия между блоками появляются матричные элементы, связывающие состояния соседних блоков и приводящие к гибридизации «блочных» собственных функций. Наиболее подвержены гибридизации состояния, близкие по энергии, и на качественном уровне можно ограничиться только ими; выбирая в каждом блоке уровень, ближайший к рассматриваемой энергии E , получим эффективную модель Андерсона с разбросом уровней $W(L) \sim \Delta(L)$ и интегралами перекрытия $J(L)$, определяемыми величиной соответствующих матричных элементов. Эффективная модель Андерсона осуществляет

огрубленное описание системы на масштабах, больших чем L , и ее свойства определяются параметром Таулеса

$$g(L) = \frac{J(L)}{W(L)}, \quad (2)$$

связанным с кондактансом $G(L)$ блока размера L :

$$g(L) \sim \frac{\hbar}{e^2} G(L), \quad G(L) = \sigma(L)L^{d-2}. \quad (3)$$

Повторяя построение Таулеса для эффективной модели Андерсона, получим принципиальный алгоритм вычисления $g(bL)$ с целым b по заданному значению $g(L)$:

$$g(bL) = F(b, g(L)). \quad (4)$$

В работе [1] рассмотрен предел $b \rightarrow 1$ этого уравнения, когда оно может быть переписано в форме Гелл-Манна–Лоу:

$$\frac{d \ln g}{d \ln L} = \beta(g). \quad (5)$$

Точка перехода g_c определяется условием $\beta(g_c) = 0$, а проводимость $\sigma = \lim_{L \rightarrow \infty} \sigma(L)$ и радиус локализации ξ имеют вблизи нее поведение

$$\sigma \propto (g_0 - g_c)^s, \quad \xi \propto (g_c - g_0)^{-\nu} \quad (6)$$

(g_0 — значение $g(L)$ при $L \sim a_0$), где $1/\nu = g_c \beta'(g_c)$, а индекс s определяется соотношением (1).

Теория работы [1] соответствует простейшему сценарию однопараметрического скейлинга. В принципе нетрудно представить другие возможности. Например, если существенны *два параметра*, $g(L)$ и $h(L)$, то аналогично (4) имеем

$$g(bL) = F(b, g(L), h(L)), \quad h(bL) = G(b, g(L), h(L)), \quad (7)$$

что в пределе $b \rightarrow 1$ дает

$$\frac{d \ln g}{d \ln L} = \beta(g, h), \quad (8a)$$

$$\frac{d \ln h}{d \ln L} = \gamma(g, h), \quad (8б)$$

и результаты определяются свойствами двух функций, $\beta(g, h)$ и $\gamma(g, h)$.

Аргументация работы [1] в пользу существенности лишь *одного* параметра $g(L)$, несмотря на некоторую экстравагантность¹⁾, была хорошо продуманной. Если предложенная в ней общая физическая концепция правильна, то параметр $g(L)$ меняется на масштабе корреляционного радиуса ξ , который вблизи перехода сколь угодно велик, и

¹⁾ «We cannot see how any statistical feature of the energy levels other than this ... ratio can be relevant» [1].

уравнение (86) можно рассматривать при постоянном g . Если параметр $h(L)$ меняется в конечных пределах, то в случае монотонного изменения он на некотором масштабе $L_0 \ll \xi$ выходит на предельное значение $h_\infty(g)$, подстановка которого в (8а) возвращает к однопараметрическому скейлингу; осциллирующее поведение параметра $h(L)$ свидетельствует лишь о его «плохом» определении, так как усреднение по осцилляциям [34] приводит к системе уравнений типа (8) со сглаженным параметром $\bar{h}(L)$, который меняется монотонно. Параметр $h(L)$ может быть существенным, если он стремится к нулю или к бесконечности; но тогда его существование может быть обнаружено на уровне порядковых оценок, и он должен иметь прозрачный физический смысл. Такого физически значимого параметра научная общественность не смогла предъявить за весь период с 1979 г.

Имеются два очевидных кандидата на роль второго параметра, которые при ближайшем рассмотрении не подходят.

а) Если при построении Таулеса не делать никаких приближений, то эффективная модель Андерсона содержит на каждом узле большое число $n(L)$ уровней, которое возрастает с ростом L и может претендовать на роль второго параметра. Однако гибридизация блочных состояний с энергиями E и E' определяется параметром $J(L)/|E - E'|$ и для $|E - E'| \gg J(L)$ не существенна. Поэтому можно ограничиться числом $n(L) \sim J(L)/\Delta(L)$ уровней, ближайших к рассматриваемой энергии E , и параметр $n(L)$ не дает нового масштаба, оказываясь величиной порядка параметра Таулеса $g(L)$. Тем не менее указанная модификация построения Таулеса открывает новые возможности и в дальнейшем будет предполагаться проведенной.

б) Интегралы перекрытия, возникающие при построении Таулеса, являются случайными величинами, и отношение $\varphi(L) = \delta J(L)/J(L)$ их флуктуации $\delta J(L)$ к их типичному значению $J(L)$ можно рассматривать как второй параметр. Однако при $\delta J(L) \ll J(L)$ флуктуациями можно пренебречь, а случай $\delta J(L) \gg J(L)$ невозможен (предельный недиагональный беспорядок соответствует симметричному распределению интегралов перекрытия вблизи нуля, для которого $\delta J(L) \sim J(L)$). Следовательно, параметр $\varphi(L)$ может играть какую-то роль, лишь когда он имеет величину ~ 1 и не дает нового масштаба. Тем не менее недиагональный беспорядок оказывается существенным, но соответствующий параметр требует более аккуратного определения.

Оценки методом оптимальной флуктуации [35, 36] показывают, что для типичной волновой функции локализованных состояний справедлив результат

$$|\Psi(r)| \propto \begin{cases} r^{-\zeta}, & r \ll \xi \\ \exp(-r/\xi), & r \gg \xi \end{cases}, \quad (9)$$

где индекс $\zeta = d - 2$ возрастает с ростом размерности пространства. Этот результат справедлив вне непосредственной окрестности точки перехода, т.е. в области, аналогичной области применимости теории Ландау [7], однако в пространствах высокой размерности такие результаты имеют тенденцию быть точными. Для критической области аналогичный результат возникает в связи с исследованием мультифрактальных свойств волновых функций [37]

$$\langle |\Psi(r)|^2 |\Psi(r')|^2 \rangle \propto |r - r'|^{-\eta}, \quad |r - r'| \ll \xi, \quad (10)$$

где индекс $\eta \sim \epsilon$ для $d = 2 + \epsilon$ и $\eta \sim 1$ для $d = 3$, т.е. также возрастает с размерностью пространства. Поэтому примем, что результат (10) справедлив и в критической области, а показатель ζ неограниченно возрастает с ростом d , и посмотрим, не может ли это

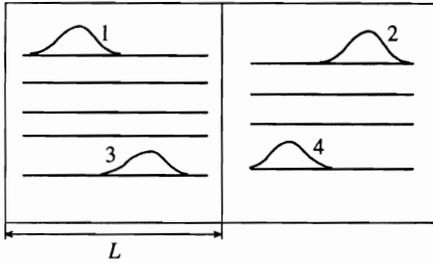


Рис. 1. При большой величине индекса ζ в (10) блочные собственные функции существенно локализованы на масштабах $L < \xi$, что приводит к сильному недиагональному беспорядку: например, перекрытие состояний 1 и 2 значительно меньше, чем состояний 3 и 4

привести к катастрофе. Большое значение показателя ζ означает, что при построении Таулеса блочные волновые функции сильно локализованы уже на масштабе, меньшем ξ (рис. 1), что приводит к сильному недиагональному беспорядку: например, интеграл перекрытия между состояниями 1 и 2 значительно меньше, чем между состояниями 3 и 4. Возможная катастрофа состоит в возникновении локализации за счет чисто недиагонального беспорядка, которая может произойти даже при $W(L) = 0$, т. е. при полном пренебрежении разбросом уровней; параметр Таулеса $g(L)$ при этом бесконечен и не может играть никакой роли, а гибридизация блочных состояний определяется каким-то другим параметром, связанным с недиагональным беспорядком.

3. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПРИ НЕДИАГОНАЛЬНОМ БЕСПОРЯДКЕ

Возможность локализации за счет чисто недиагонального беспорядка обсуждалась в связи с задачей о примесной зоне в полупроводнике, с которой фактически и началось создание теории локализации [38]. Введенная в полупроводник изолированная примесь может образовывать связанное состояние с энергией E_0 , лежащее внутри запрещенной зоны. При конечной концентрации таких примесей возникает примесная зона, которая в узельном представлении описывается моделью Андерсона с недиагональным беспорядком (иногда называемой моделью Лифшица [5])

$$\sum_{n'} J_{nn'} \Psi_{n'} + E_0 \Psi_n = E \Psi_n. \tag{11}$$

Для экспоненциального убывания интегралов перекрытия,

$$J_{nn'} \propto \exp \{-\kappa |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n'}|\} \tag{12}$$

(\mathbf{r}_n — координата n -ой примеси), примесная зона полностью локализована в пределе малых концентраций: интуитивные соображения в пользу этого привел Мотт [3, стр. 31], основываясь на систематике состояний, полученной Лифшицем [35, 36]. Мы дадим более рафинированную версию рассуждений Мотта с целью подчеркнуть некоторые физически значимые моменты, отсутствующие как у Мотта, так и у Лифшица.

Плотность состояний $\nu(E)$ примесной зоны является непрерывной функцией и формируется из уровней, с подавляющей вероятностью отличных от уровня изолированной примеси E_0 . Чтобы получить такие уровни, нужно учитывать взаимодействие фиксированного примесного атома 1 с окружением, каким бы слабым оно ни было. Согласно Лифшицу, главную роль играют «столкновения» примесных атомов, т. е. их

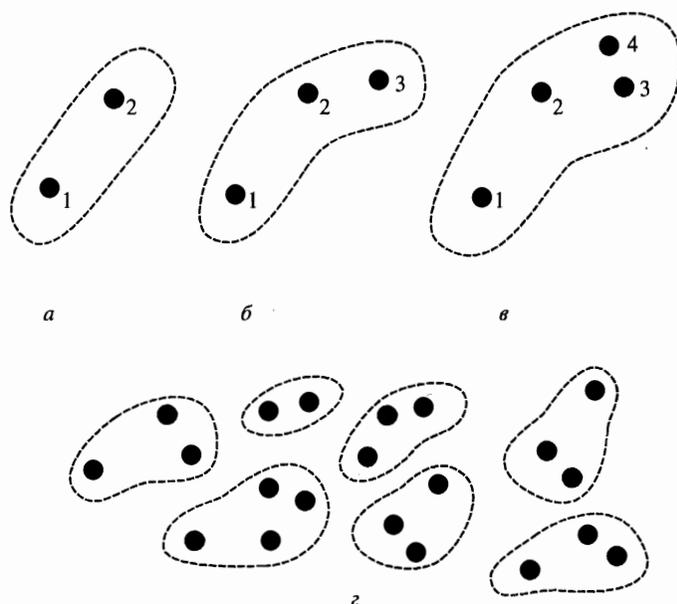


Рис. 2. Разбиение произвольной примесной конфигурации на кластеры

случайные сближения друг с другом. Если принять среднее расстояние между примесями за единицу, то пределу нулевой концентрации соответствует предел $\kappa \rightarrow \infty$ в (12); быстрое убывание интегралов перекрытия позволяет учитывать взаимодействие лишь ближайших примесей. При этом, однако, не удастся ограничиться лишь парными «столкновениями».

Действительно, пусть для атома 1 ближайшим соседом является атом 2; если для атома 2 ближайшим соседом является атом 1, то пару 1–2 можно в главном приближении рассматривать независимо от окружения (рис. 2а). Если же у атома 2 ближайший сосед — атом 3, то придется рассматривать кластер 1–2–3 (рис. 2б): сначала нужно учесть гибридизацию состояний атомов 2 и 3, а потом рассмотреть взаимодействие гибридных состояний с атомом 1. Если у атома 3 ближайшим соседом является не атом 2, а атом 4, то нужно рассматривать кластер 1–2–3–4 (рис. 2в) и т. д. Если такое построение начинается на атоме 1 и заканчивается на атоме i , то будем считать атом 1 принадлежащим к i -му кластеру; очевидно, к тому же кластеру будут принадлежать и атомы 2, 3, ..., выделяемые на промежуточных этапах построения. Принимая за атом 1 поочередно каждый из примесных атомов, получим разбиение на кластеры для произвольной их конфигурации (рис. 2г); разбиение однозначно, так как по построению каждый атом принадлежит какому-то кластеру и никакой атом не может принадлежать двум различным кластерам (в пренебрежении бесконечно малой вероятностью строгого равенства двух межатомных расстояний). Формально приходится рассматривать сколь угодно большие кластеры, однако с подавляющей вероятностью они будут содержать число атомов порядка единицы (существование бесконечного кластера означает скопление бесконечного числа атомов в конечном объеме).

Введем параметр R_1 — характерное расстояние между атомами в кластере и пара-

метр R_2 — характерное расстояние между кластерами. Строгое определение R_1 и R_2 требует более глубокого исследования, но при любом разумном определении имеем

$$R_1 < R_2, \quad (13)$$

так как по построению в кластеры объединялись ближайшие атомы.

Пренебрегая взаимодействием между кластерами и проводя диагонализацию гамильтонианов отдельных кластеров, получим нулевое приближение для плотности состояний $\nu(E)$ примесной зоны, ширина которой определяется параметром $\exp(-\kappa R_1)$. Это приближение в пределе нулевой концентрации является асимптотически точным, так как ближайший сосед каждого атома находится в том же кластере, и сдвиг соответствующего уровня относительно E_0 в главном приближении вычисляется правильно.

Объявляя каждый кластер узлом новой решетки и учитывая взаимодействие между кластерами, получим эффективную модель Андерсона с разбросом уровней $W \propto \exp(-\kappa R_1)$ и интегралами перекрытия $J \propto \exp(-\kappa R_2)$. Ввиду (13) имеем $J/W \rightarrow 0$ при $\kappa \rightarrow \infty$, и в пределе нулевой концентрации все состояния локализованы на построенных кластерах; этим определяется физический смысл последних.

Таким образом, мы доказали принципиальную возможность локализации всех состояний за счет чисто недиагонального беспорядка; заметим, что картина гибридизации блочных собственных функций (рис. 1) в пренебрежении разбросом уровней и в пределе $\zeta \rightarrow \infty$ близка к рассмотренному случаю топологического беспорядка в системе примесей с экспоненциальным перекрытием.

4. ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СКЕЙЛИНГ

При наличии недиагонального беспорядка неупорядоченную систему можно характеризовать двумя параметрами:

$$g(L) = \frac{J(L)}{W(L)}, \quad \varphi(L) = \frac{\delta J(L)}{J(L)}, \quad (14)$$

второй из которых ограничен сверху некоторой величиной φ_{max} (разд. 2). Фазовая диаграмма в плоскости (g, φ) показана на рис. 3. При $\varphi = 0$ граница между локализованными и делокализованными состояниями лежит при $g \sim 1$; увеличение φ добавляет беспорядок в системе, и граница двух фаз AB смещается вверх, в некоторой точке φ_c уходя на бесконечность (поведение типа AB' означало бы отрицание возможности локализации при чисто недиагональном беспорядке, для которого параметр Таулеса g бесконечен). Существование особой точки φ_c решает проблему второго параметра в ренормгруппе: возникновение нового нетривиального масштаба связано не с φ , а с $\varphi - \varphi_c$.

Если задание параметров g и φ полностью определяет неупорядоченную систему, то в результате построения Таулеса одна точка плоскости (g, φ) переходит в другую точку этой плоскости. Система, находящаяся в критической точке, не может покинуть ее в результате мысленного построения и может лишь передвигаться по критической поверхности AB , являющейся геометрическим местом таких точек.

Чтобы вернуться к обычной картине однопараметрического скейлинга, нужно в соответствии с общими представлениями теории критических явлений [17, гл. 6] предположить существование неподвижной точки F (рис. 4а), устойчивой для состояний на

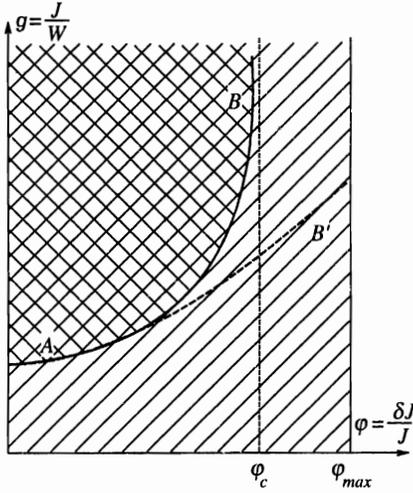


Рис. 3. Фазовая диаграмма в плоскости (g, φ) . Штриховкой показаны локализованные, двойной штриховкой — дelokализованные состояния

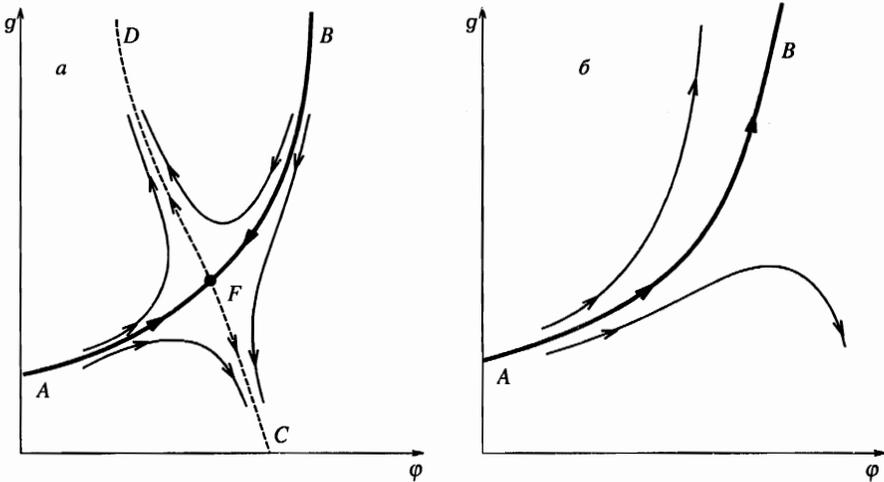


Рис. 4. Изменение параметров системы при увеличении размера блока L в построении Таулеса при наличии на критической поверхности AB неподвижной точки F (а) и при ее отсутствии (б)

критической поверхности, но неустойчивой вне ее. Таким свойством в теории дифференциальных уравнений [39] обладает седловая точка, характеризуемая двумя особыми линиями, AB и CD , и гиперболической формой траекторий вблизи нее (рис. 4а). В этом случае поведение параметра Таулеса $g(L)$ при изменении масштаба L показано на рис. 5а: он имеет постоянное значение g_c в точке F (кривая 1), релаксирует к g_c на конечном масштабе L_0 для точек на критической поверхности, отличных от F (кривые 2, 3), приближается к значению g_c на масштабе L_0 , а затем удаляется от него на масштабе ξ для точек, близких к критической поверхности (кривые 4, 5). Грубо говоря, движение в плоскости (g, φ) разбивается на две стадии — быстрой релаксации к кривой CD и медленной эволюции вдоль нее. На масштабах $L \gg L_0$ плоскость (g, φ) фактически

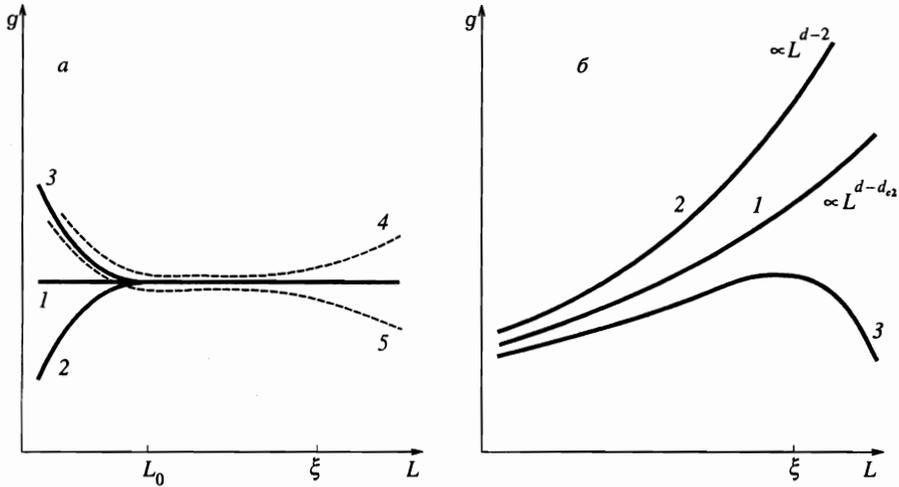


Рис. 5. Изменение параметра Таулеса для сценариев, изображенных на рис. 4а и 4б

компактифицируется в линию CD , положение на которой однозначно определяется параметром Таулеса²⁾. Тем самым мы возвращаемся к общепринятой картине, которую будем считать верной для низших размерностей.

Предположим, что при больших d на критической поверхности нет неподвижных точек. Тогда система, находящаяся в критической точке, при увеличении L непрерывно перемещается вверх вдоль кривой AB (рис. 4б): движение вниз невозможно, так как означало бы исчезновение при больших L недиагонального беспорядка в противоречии с физическими соображениями разд. 2. Параметр Таулеса $g(L)$ в точке перехода возрастает (рис. 5б, кривая 1), в металлической фазе выходит на более быструю зависимость $g(L) \sim \sigma L^{d-2}$ [1] (кривая 2), а в локализованной фазе имеет возвратное поведение (кривая 3). На первый взгляд, возвратное поведение является физически абсурдным: согласно представлениям работы [1], оно означает, что степень гибридизации блочных состояний сначала возрастает, а затем по неведомым причинам начинает убывать. В действительности это не так — гибридизация не определяется всецело параметром Таулеса, но зависит еще от параметра $\varphi(L)$. Фактически в точке перехода эффективный беспорядок (а потому и степень гибридизации) остается на одном уровне, но «перекачивается» из диагонального сектора в недиагональный. В локализованной фазе эффективный беспорядок монотонно возрастает, но на первом этапе это происходит в условиях роста параметра Таулеса: характеризуемый им диагональный беспорядок уменьшается за счет преобразования в недиагональный; и лишь при $L \gtrsim \xi$, когда рост суммарного беспорядка набирает силу, диагональный беспорядок также начинает возрастать.

При увеличении размерности пространства первый сценарий (рис. 4а) должен непрерывно перейти во второй (рис. 4б): следовательно, неподвижная точка F перемещается вверх по кривой AB и при некотором значении d_{c2} уходит на бесконечность. Это

²⁾ Принятое выше предположение о существенности лишь двух параметров, g и φ , подразумевает в действительности, что другие параметры быстро релаксируют к поверхности, находящейся во взаимно однозначном соответствии с плоскостью (g, φ) .

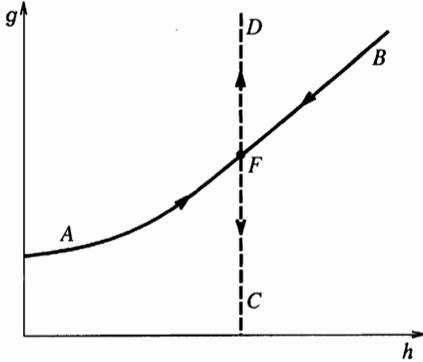


Рис. 6. То же, что на рис. 4а, после замены переменных $h = F(g, \varphi)$

значение мы и примем за определение верхней критической размерности. Дальнейшее имеет целью построить феноменологическое описание такой бифуркации.

Возможность феноменологического описания определяется тем, что функции $\beta(g, h)$ и $\gamma(g, h)$ в уравнениях двухпараметрического скейлинга (8) допускают регулярные разложения: в силу (7) они описывают связь двух конечных систем, тогда как все сингулярности возникают в термодинамическом пределе [17]. При этом, однако, подразумевается правильный выбор скейлинговых переменных, которые не содержат встроенных особенностей; в этом смысле переменная φ является «неправильной» ввиду наличия особой точки φ_c . Поэтому сделаем замену переменных $h = F(g, \varphi)$ так, чтобы в плоскости (g, h) рис. 4а принял вид, показанный на рис. 6, т.е. чтобы кривая AB имела асимптотику $g \sim h$ при $g, h \rightarrow \infty$, а кривая CD стала вертикальной. Мотивация для первого состоит в том, что критическая поверхность, с которой не связаны никакие сингулярности, должна регулярным образом проектироваться на обе координатные оси, второе принято для упрощения уравнений (см. ниже).

Для исследования указанной бифуркации систему уравнений (8) достаточно рассматривать в области больших g и h , в которой она может быть преобразована к виду

$$\frac{d \ln g}{d \ln L} = (d - 2) + \frac{Ah}{g} + \frac{Bh^2}{g^2} + \frac{Ch^3}{g^3} + \dots \equiv (d - 2) + \tilde{\beta} \left(\frac{g}{h} \right), \quad (15a)$$

$$\frac{d \ln h}{d \ln L} = \mu + \frac{b}{h}, \quad (15b)$$

где параметр μ меняет знак при $d = d_{c2}$,

$$\mu = \alpha(d - d_{c2}), \quad d \rightarrow d_{c2}, \quad (16)$$

и выполнены неравенства $\alpha > 0, b > 0, A < 0$. Действительно, при $h = \text{const}$ для функции $\beta(g, h)$ справедливо все сказанное в работе [1], т.е. она имеет асимптотики $d - 2$ и $\ln g$ при больших и малых g , а при $d > 2$ имеет корень g_c , который в данном случае зависит от h . Раскладывая $\beta(g, h)$ по степеням $1/g$,

$$\beta(g, h) = (d - 2) + \frac{A_1(h)}{g} + \frac{A_2(h)}{g^2} + \dots, \quad (17)$$

замечаем, что разложение $A_n(h)$ по степеням $1/h$ должно начинаться с h^n для обеспечения корня $g_c \sim h$ (рис. 6); сохраняя главные по h члены, получим (15а).

Согласно сказанному выше, функция $\gamma(g, h)$ при $d > d_{c2}$ должна обеспечивать неограниченный рост h , который, однако, не должен быть более быстрым, чем рост g , для сохранения смысла корня $g_c \sim h$; учитывая, что $g(L)$ растет не быстрее L^{d-2} [1], имеем при больших h неравенство $0 < \gamma(g, h) < d - 2$, указывающее, что разложение $\gamma(g, h)$ по $1/g, 1/h$ начинается с нулевого члена:

$$\gamma(g, h) = \mu + \frac{a}{g} + \frac{b}{h} + \dots \quad (18)$$

При выборе переменных, в которых кривая CD вертикальна, неподвижная точка h_c не зависит от g и коэффициент a в (18) равен нулю; неподвижная точка должна быть устойчивой при $d < d_{c2}$ и отсутствовать при $d > d_{c2}$, что определяет положительность b и изменение знака μ при $d = d_{c2}$, отраженные в (15), (16).

Систему уравнений (15) легко исследовать. При $d < d_{c2}$ уравнение (15б) имеет неподвижную точку $h_c = b/|\mu|$ и замена $g \rightarrow gh_c$ в (15а) возвращает к однопараметрическому скейлингу, так что критические индексы определяются уравнениями

$$1/\nu = g_c \tilde{\beta}'(g_c), \quad s = \nu(d - 2), \quad (d - 2) + \tilde{\beta}(g_c) = 0. \quad (19)$$

Для $d > d_{c2}$ при больших h имеем $h(L) \propto L^\mu$ и замена $g \rightarrow gL^\mu$ в уравнении (15б) приводит его к однопараметрическому виду с заменой $d - 2$ на $d - 2 - \mu$. При $L \lesssim \xi$ параметр Таулеса меняется по закону

$$g(L) = g_c \left(\frac{L}{a_0}\right)^\mu + (g_0 - g_c) \left(\frac{L}{a_0}\right)^{\mu+1/\nu}, \quad (20)$$

а критические индексы определяются уравнениями

$$1/\nu = g_c \tilde{\beta}'(g_c), \quad (21a)$$

$$s = \nu(d - 2 - \mu), \quad (21b)$$

$$(d - 2 - \mu) + \tilde{\beta}(g_c) = 0. \quad (21в)$$

Радиус локализации определяется как масштаб, на котором при $g_0 < g_c$, т. е. в локализованной фазе, параметр $g(L)$ начинает убывать, а индекс s определяется из сшивки результата (20) с законом $g(L) \sim \sigma L^{d-2}$ при $L \sim \xi$. В точке перехода параметр Таулеса растет по закону

$$g(L) \propto L^\mu, \quad (22)$$

что и является причиной нарушения соотношения Вегнера (см. (21б)). Сравнение (19) и (21) показывает, что критические индексы как функции d имеют излом при $d = d_{c2}$.

Обычно верхняя критическая размерность характеризуется тем, что выше нее критические индексы не зависят от d . Согласно (21б) это возможно при $\mu = d + \text{const}$, что совместно с (16) дает

$$\mu = d - d_{c2}. \quad (23)$$

С учетом (23) зависимость параметра Таулеса от масштаба расстояний при $L \lesssim \xi$ имеет вид

$$g(L) = g_c + (g_0 - g_c)(L/a_0)^{1/\nu}, \quad d < d_{c2}, \quad (24a)$$

$$g(L) = g_c(L/a_0)^{d-d_{c2}} + (g_0 - g_c)(L/a_0)^{d-d_{c2}+1/\nu}, \quad d > d_{c2}. \quad (24b)$$

Выражение (24b) является основным результатом построенной феноменологической схемы. Результат (24a) хорошо известен из однопараметрического скейлинга, но его область применимости оказывается ограниченной.

5. СОПОСТАВЛЕНИЕ С СИММЕТРИЙНОЙ ТЕОРИЕЙ

В симметричной теории [30] получаются такие же значения критических индексов, как в самосогласованной теории Вольхардта–Вольфле [32]:

$$\nu = 1/(d - 2), \quad s = 1 \quad \text{для} \quad 2 < d < 4,$$

$$\nu = 1/2, \quad s = 1 \quad \text{для} \quad d > 4. \quad (25)$$

При $d < 4$ они совместны с однопараметрическим скейлингом ввиду выполнения соотношения Вегнера $s = \nu(d - 2)$; его нарушение для $d > 4$ означает, что $d_{c2} = 4$.

Для сопоставления с результатом (24) найдем из симметричной теории [30] коэффициент диффузии D_L конечного блока размера L . Он определяется по известному коэффициенту диффузии $D(\omega, q)$ для бесконечной системы из соотношения³⁾

$$D_L \sim D \left(i \frac{D_L}{L^2}, L^{-1} \right). \quad (26)$$

Согласно [30],

$$D(\omega, q) = D_0(\omega)q^0, \quad q \ll a_0^{-1}, \quad (27)$$

а $D_0(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$D_0(\omega) = A\tau + B \left(-\frac{i\omega}{D_0(\omega)} \right)^{1/2\nu}, \quad (28)$$

где τ — расстояние до точки перехода. Учитывая, что $g(L) \propto D_L L^{d-2}$, а параметр τ пропорционален $g_0 - g_c$, легко получить из (26)–(28)

$$g(L) = g_c (L/a_0)^{d-2-1/\nu} + (g_0 - g_c) (L/a_0)^{d-2}. \quad (29)$$

³⁾ Соотношение (26) нарушается в локализованной фазе при $L \gtrsim \xi$ из-за нелокальности отклика [32].

По структуре результат аналогичен выражению (24), но в общем случае не совпадает с ним. Лишь при учете конкретных значений индексов (25) результаты (24) и (29) становятся идентичными:

$$\begin{aligned} g(L) &= g_c + (g_0 - g_c) (L/a_0)^{d-2}, & d < 4, \\ g(L) &= g_c (L/a_0)^{d-4} + (g_0 - g_c) (L/a_0)^{d-2}, & d > 4. \end{aligned} \quad (30)$$

Таким образом, построенная феноменологическая схема обнаруживает полное согласие с симметричной теорией [30]. Это согласие выглядит нетривиально, так как симметричная теория основана на совершенно других принципах и ни в коей мере не апеллирует к скейлинговым представлениям.

Работа стимулирована дискуссиями с В. Е. Кравцовым, А. Д. Мирлиным и М. В. Фейгельманом, которым автор выражает признательность. Автор благодарит также участников семинаров в ИФП и ФИАН за интерес к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (заявка № 580) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-02-19527).

Литература

1. E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673 (1979).
2. P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
3. Н. Мотт, Э. Дэвис, *Электронные процессы в некристаллических веществах*, Мир, Москва (1982).
4. D. J. Thouless, *Phys. Rep.* **13**, 92 (1974).
5. А. Л. Эфрос, *УФН* **126**, 41 (1978).
6. М. В. Садовский, *УФН* **133**, 223 (1981).
7. М. В. Садовский, *Sov. Sci. Rev. A. Phys.* **7**, 1 (1986).
8. D. Belitz and T. R. Kirkpatrick, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 261 (1994).
9. В. Л. Ал'tshuler, А. Г. Аронов, Д. Е. Хмельницкий, and А. И. Ларкин, in *Quantum Theory of Solids*, ed. by I. M. Lifshitz, Mir Publishers, Moscow (1982).
10. К. Б. Ефетов, *ЖЭТФ* **88**, 1032 (1985).
11. К. Б. Ефетов, *ЖЭТФ* **92**, 638 (1987).
12. Б. Л. Альтшулер, В. Е. Кравцов, И. В. Лернер, *ЖЭТФ* **91**, 2276 (1986).
13. В. Е. Кравцов, И. В. Лернер, В. И. Юдсон, *ЖЭТФ*, **94**, 255 (1988).
14. L. Schäfer and F. Wegner, *Z. Phys. B* **38**, 113 (1980).
15. К. Б. Ефетов, А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, *ЖЭТФ* **79**, 1120 (1980).
16. К. В. Efetov, *Adv. Phys.* **32**, 53 (1983).
17. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).
18. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, Москва (1982).
19. D. J. Thouless, *J. Phys. C* **9**, L603 (1976).
20. T. Lukes, *J. Phys. C* **12**, L797 (1979).
21. A. V. Harris and T. C. Lubensky, *Phys. Rev. B* **23**, 2640 (1981).
22. J. P. Straley, *Phys. Rev. B* **28**, 5393 (1983).
23. H. Kunz and R. Souillard, *J. de Phys. Lett.* **44**, L503 (1983).

24. A. D. Mirlin and I. V. Fyodorov, Phys. Rev. Lett. **72**, 526 (1994).
25. M. Schreiber and H. Grussbach, Phys. Rev. Lett. **76**, 1687 (1996).
26. И. М. Суслов, ЖЭТФ **102**, 1951 (1992).
27. И. М. Суслов, ЖЭТФ **106**, 560 (1994).
28. И. М. Суслов, ЖЭТФ **111**, 220 (1997).
29. И. М. Суслов, ЖЭТФ **111**, 1896 (1997).
30. И. М. Суслов, ЖЭТФ **108**, 1686 (1995).
31. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **43**, 544 (1986).
32. D. Vollhardt and P. Wölfle, Phys. Rev. B **22**, 4666 (1980); Phys. Rev. Lett. **48**, 699 (1982).
33. D. C. Licciardello and D. J. Thouless, Phys. Rev. Lett. **35**, 1475 (1975).
34. Н. Н. Монсеев, *Асимптотические методы нелинейной механики*, Наука, Москва (1969).
35. И. М. Лифшиц, УФН **83**, 617 (1964).
36. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1982).
37. T. Brandes, B. Huckestein, and L. Schweitzer, Ann. Phys. **5**, 633 (1996).
38. Ф. Андерсон, УФН **127**, 19 (1979).
39. Л. Э. Эльсгольц, *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*, Наука, Москва (1969).