

## ДУАЛЬНОСТЬ В ДВУМЕРНЫХ $Z(N)$ -СИММЕТРИЧНЫХ СПИНОВЫХ МОДЕЛЯХ НА РЕШЕТКЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

А. И. Бугрий\*, В. Н. Шадура

*Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова  
Национальной академии наук Украины  
252143, Киев, Украина*

Поступила в редакцию 10 февраля 1997 г.

Предложен метод вывода соотношений дуальности для двумерных неоднородных  $Z(N)$ -симметричных спиновых моделей на конечной квадратной решетке, намотанной на тор. С использованием этого метода получены соотношения дуальности для векторной модели Поттса,  $Z(N)$ -модели Березинского–Виллена, модели Эшкина–Теллера, 8-вершинной модели на решетке с косою намоткой на тор, а также точное соотношение, связывающее статистические суммы двух последних моделей.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование дуальности в моделях статистической механики и теории поля является важным способом непertурбативного исследования их фазовой диаграммы. Впервые преобразование дуальности было открыто Крамерсом и Ванье [1] в двумерной модели Изинга. В работе [2] соотношение дуальности было обобщено для неоднородной модели Изинга, в которой параметры взаимодействия по горизонтальным и вертикальным связям  $K_x(r)$  и  $K_y(r)$  являются произвольными функциями координат узлов решетки:

$$\left\{ \prod_{\tilde{r}, \mu} \text{sh } 2\tilde{K}_\mu(\tilde{r}) \right\}^{-1/4} \tilde{Z}[\tilde{K}] = \left\{ \prod_{r, \mu} \text{sh } 2K_\mu(r) \right\}^{-1/4} Z[K], \quad (1)$$

$$\text{sh } 2K_x(r) \cdot \text{sh } 2\tilde{K}_{-y}(\tilde{r}) = 1, \quad \text{sh } 2K_y(r) \cdot \text{sh } 2\tilde{K}_{-x}(\tilde{r}) = 1. \quad (2)$$

Здесь индекс  $\mu$  принимает значения  $x, y$ , тильдой обозначены величины, относящиеся к дуальной решетке, и  $\tilde{K}_{-\mu}(\tilde{r}) = \tilde{K}_\mu(\tilde{r} - \hat{\mu})$  ( $\hat{\mu} = \hat{x}, \hat{y}$  — единичные векторы вдоль осей  $x$  и  $y$ ).

Как отмечалось еще авторами работ [1, 2], для однородной модели это соотношение становится точным в термодинамическом пределе, т. е. для удельной свободной энергии. Однако в неоднородном случае сама процедура перехода к термодинамическому пределу неоднозначна. В [2] соотношение дуальности (1) было выведено для сферических граничных условий, которые для решеточных моделей являются нефизическими. Сложность вывода соотношения дуальности для решетки, намотанной на тор, например, методом сравнения высокотемпературного и низкотемпературного разложений для

\*E-mail: abugrij@gluk.apc.org

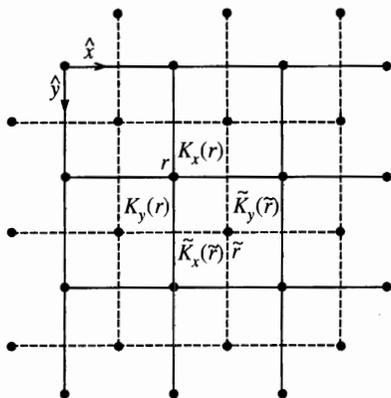


Рис. 1. Соответствие координат и констант взаимодействия на взаимно дуальных решетках  $R$  (сплошные линии) и  $\tilde{R}$  (штриховые линии)

статистической суммы, связана с учетом замкнутых графов, охватывающих тор некоторое число раз.

В [3, 4] было предложено точное соотношение дуальности для неоднородной двумерной модели Изинга на квадратной решетке  $R$  конечного размера  $n \times m$ , намотанной на тор (на рис. 1 решетки  $R$  и  $\tilde{R}$  имеют размер  $3 \times 3$ , и спины, расположенные на противоположных краях решеток, необходимо отождествить):

$$\left\{ \prod_{\tilde{r}, \mu} \text{sh } 2\tilde{K}_\mu(\tilde{r}) \right\}^{-1/4} \tilde{Z}^{(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y)}[\tilde{K}] = \frac{1}{2} \left\{ \prod_{r, \mu} \text{sh } 2K_\mu(r) \right\}^{-1/4} \sum_{p_x, p_y=0}^1 T_{p_x, p_y}^{\tilde{p}_x, \tilde{p}_y} Z^{(p_x, p_y)}[K]. \quad (3)$$

Здесь  $Z^{(p_x, p_y)}[K]$  являются статистическими суммами модели Изинга с соответствующими комбинациями периодических (индекс  $p_x, p_y = 0$ ) и антипериодических (индекс  $p_x, p_y = 1$ ) граничных условий вдоль осей  $x$  и  $y$ :

$$Z^{(p_x, p_y)}[K] = \sum_{[\sigma]} \exp \left\{ \sum_{r, \nu} K_\nu(r) \sigma(r) \nabla_\nu^{(p_\nu)} \sigma(r) \right\}, \quad (4)$$

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Изинговский спин принимает два значения:  $\sigma(r) = \pm 1$ ; координаты узлов дуальной решетки  $\tilde{R}$  совпадают с координатами центров плакетов исходной решетки  $R$  и наоборот (см. рис. 1):  $\tilde{r} = r + (\hat{x} + \hat{y})/2$ ,  $r = (x, y)$ , где  $x = 1, \dots, n, y = 1, \dots, m$ . Операторы сдвига  $\nabla_x, \nabla_y$  действуют на  $\sigma(r)$  следующим образом:

$$\nabla_x \sigma(r) = \sigma(r + \hat{x}), \quad \nabla_y \sigma(r) = \sigma(r + \hat{y}).$$

При этом они удовлетворяют граничным условиям

$$\nabla_x^{(p_x)} \sigma(n, y) = (-)^{p_x} \sigma(1, y), \quad \nabla_y^{(p_y)} \sigma(x, m) = (-)^{p_y} \sigma(x, 1). \quad (6)$$

В [3] на основе точного решения двумерной модели Изинга соотношение дуальности (3) было выведено для однородной модели, а для неоднородного случая это соотношение было доказано по теории возмущений и проверено прямым вычислением на решетках малых размеров. В [4] были получены соотношения дуальности для модели Изинга с магнитным полем, приложенным к границам решетки.

В данной работе мы формулируем систематический метод вывода соотношений дуальности для  $Z(N)$ -симметричных спиновых моделей на квадратной решетке, намотанной на тор. В принципе, этот метод нетрудно обобщить на случаи решеток больших размерностей, компактифицированных на гипертор, и решеточных моделей, обладающих непрерывной глобальной или калибровочной симметрией. В качестве примера мы выводим соотношения дуальности для векторной модели Поттса,  $Z(N)$ -модели Березинского–Виллена ( $Z(N)$ -симметричной гауссовой модели) [5, 6], модели Эшкина–Теллера, 8-вершинной модели на решетке с косоной намоткой на тор, а также точное соотношение, связывающее статистические суммы двух последних моделей. Соотношения дуальности для этих моделей были получены в [7, 8] (см. также [9, 10]) без учета граничных условий. Кроме того, будет показано, что соотношение (3) является частным случаем соотношения дуальности для векторной модели Поттса при  $N = 2$ .

Прежде чем изложить идею метода, введем понятия магнитной дислокации, «топологического» заряда и калибровочного преобразования конфигураций констант взаимодействия на примере векторной модели Поттса, которая обладает глобальной дискретной группой симметрии  $Z_N$ . Гамильтониан этой модели записывается в виде

$$-\beta H^{(p,q)}[K, \sigma] = \frac{1}{2} \sum_{r,\nu} \{ K_\nu(r) \sigma^*(r) \nabla_\nu^{(p,q)} \sigma(r) + \text{c.c.} \}, \quad (7)$$

где спиновая переменная принимает  $N$  значений:

$$\sigma(r) = \exp \left[ i \frac{2\pi}{N} l(r) \right], \quad l(r) = 0, \dots, N - 1.$$

Индексы  $p_x = p$  и  $p_y = q$  ( $p, q = 0, \dots, N - 1$ ) в гамильтониане (7) обозначают циклические граничные условия:

$$\nabla_x^{(p)} \sigma(n, y) = \exp \left( i \frac{2\pi}{N} p \right) \sigma(1, y), \quad \nabla_y^{(q)} \sigma(x, m) = \exp \left( i \frac{2\pi}{N} q \right) \sigma(x, 1). \quad (8)$$

и, соответственно, для переменной  $l(r)$

$$l(n + 1, y) = l(1, y) + p, \quad l(x, m + 1) = l(x, 1) + q. \quad (9)$$

Периодическим граничным условиям соответствуют равенства  $p = 0$  и  $q = 0$ .

Используя явный вид граничных условий (8), гамильтониан  $H^{(p,q)}[K, \sigma]$  удобно представить в виде гамильтониана  $H_D^{(0,0)}[K, d, \sigma]$  с магнитной дислокацией  $D^{(p,q)}$ , соответствующей граничным условиям  $(p, q)$ , и с периодическими граничными условиями для спиновой переменной  $\sigma(r)$ :

$$-\beta H^{(p,q)}[K, \sigma] = -\beta H_D^{(0,0)}[K, d, \sigma] = \frac{1}{2} \sum_{r,\nu} \left\{ K_\nu(r) \exp \left[ i \frac{2\pi}{N} d_\nu^{(p,q)}(r) \right] \times \right. \\ \left. \times \sigma^*(r) \nabla_\nu^{(0)} \sigma(r) + \text{c.c.} \right\} = \sum_{r,\nu} K_\nu(r) \cos \left\{ \frac{2\pi}{N} [\Delta_\nu l(r) + d_\nu^{(p,q)}(r)] \right\}. \quad (10)$$

Здесь  $\Delta_\nu = \nabla_\nu^{(0)} - 1$  является разностной производной с периодическими граничными условиями, векторные поля  $K_\nu(r)$  и  $d_\nu^{(p,q)}(r)$ , определенные на ребрах решетки, удобно рассматривать как модуль и фазу комплексной константы взаимодействия соседних спинов. Магнитная дислокация  $D^{(p,q)}$  определяется фазой

$$d_\nu^{(p,q)}(r) = (d_x(r), d_y(r)) = (p\delta_{B_X}(r), q\delta_{B_Y}(r)), \quad (11)$$

которая отлична от нуля вдоль граничных циклов  $B_X$  и  $B_Y$ , задающих пространственную конфигурацию дислокации на торе:

$$\delta_{B_X}(r) = \sum_{r' \in B_X} \delta^2(r - r'), \quad \delta_{B_Y}(r) = \sum_{r' \in B_Y} \delta^2(r - r'), \quad (12)$$

где  $\delta^2(r - r')$  —  $\delta$ -функция Кронекера и

$$B_X = \{(x, m), x = 1, \dots, n\}, \quad B_Y = \{(n, y), y = 1, \dots, m\}.$$

Фазу  $d_\nu^{(p,q)}(r)$  можно рассматривать как плотность «топологического» заряда  $Q_\nu$  магнитной дислокации. Этот заряд, например, для дислокации  $D^{(p,q)}$  равен

$$Q_\nu = \sum_r d_\nu^{(p,q)}(r) = (pn, qm). \quad (13)$$

Мы будем называть магнитные дислокации  $D^{(p,q)}$  ( $p, q = 0, \dots, N - 1$ ) базисными магнитными дислокациями. Заметим, что периодические граничные условия вдоль всех циклов тора ( $p = q = 0$ ) на самом деле соответствуют случаю отсутствия магнитных дислокаций. Тем не менее для удобства мы ввели обозначение  $D^{(0,0)}$  для этих граничных условий.

Гамильтониан (7) обладает инвариантностью относительно локальных  $Z_N$ -калибровочных преобразований [11]:

$$\sigma'(r) = \exp\left[i\frac{2\pi}{N}\phi(r)\right]\sigma(r), \quad K'_\mu(r) = \exp\left[i\frac{2\pi}{N}\phi(r)\right]K_\mu(r)\exp\left[i\frac{2\pi}{N}\phi(r + \hat{\mu})\right], \quad (14)$$

где  $\phi(r)$  имеет периодические граничные условия. Эта инвариантность приводит к следующему соотношению для статистической суммы  $Z_V$  векторной модели Поттса

$$Z_V^{(p,q)}[K] = \sum_{[\sigma]} \exp\{-\beta H^{(p,q)}[K, \sigma]\} = \sum_{[\sigma']} \exp\{-\beta H^{(p,q)}[K', \sigma']\} = Z_V^{(p,q)}[K'].$$

Калибровочные преобразования переменных  $l(r)$  и  $d_\mu(r)$  в гамильтониане (10) имеют вид

$$l'(r) = l(r) + \phi(r), \quad d'_\mu(r) = d_\mu^{(p,q)}(r) + \Delta_\mu\phi(r). \quad (15)$$

Эти преобразования приводят как к деформации базисных магнитных дислокаций, так и к появлению новых замкнутых дислокаций. Тогда  $d'_\mu(r)$  описывает поле замкнутых магнитных дислокаций на торе и является плотностью топологического заряда такого поля. Очевидно, что полный топологический заряд такого поля магнитных дислокаций

не меняется при калибровочных преобразованиях. Так, например, для гамильтониана  $H_D^{(0,0)}[K, d, \sigma]$  с дислокацией  $D^{(p,q)}$  имеем

$$Q'_\mu = \sum_r d'_\mu(r) = \sum_r d_\mu^{(p,q)}(r) + \sum_r \Delta_\mu \phi(r).$$

Здесь периодические граничные условия для фазы  $\phi(r)$  приводят к обращению в нуль второго слагаемого, и, стало быть,  $Q'_\mu = Q_\mu$ . Отсюда следует, что множество конфигураций констант взаимодействия  $[K, d]$  (содержащих замкнутые дислокации) можно разбить на калибровочно-неэквивалентные классы  $\Omega^{(p,q)}$  с соответствующим каждому классу значением топологического заряда  $Q_\mu = (pn, qm)$ . Элементы класса  $\Omega^{(p,q)}$  генерируются с помощью калибровочных преобразований (14) из базисной магнитной дислокации  $D^{(p,q)}$ .

Идея предлагаемого метода состоит в следующем: при выводе соотношений дуальности с помощью фурье-преобразования возникают дельта-функции. Условие обращения в нуль аргумента дельта-функции приводит к системе уравнений, определяющих связь между исходными спиновыми переменными и дуальными. Обычно (см., например, [9]) не учитывают граничные условия и выписывают только одно решение этой системы уравнений. Однако для модели на торе существует много решений, которые можно разбить на калибровочно-неэквивалентные классы  $\tilde{\Omega}^{(p,q)}$  конфигураций констант взаимодействия для дуальной модели, причем каждый класс имеет вполне определенное значение дуального топологического заряда  $\tilde{Q}_\mu = (\tilde{p}n, \tilde{q}m)$ . Поэтому при дуальном преобразовании статистической суммы необходимо просуммировать по всем калибровочно-неэквивалентным классам на дуальной решетке с коэффициентами, зависящими от граничных условий на исходной решетке. Так, например, при  $N = 2$  имеется четыре калибровочно-неэквивалентных класса:  $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ . Четыре слагаемых в правой части соотношения дуальности (3) для модели Изинга как раз отражают эту ситуацию.

В разд. 2 выведено соотношение дуальности для векторной модели Поттса на квадратной решетке, намотанной на тор. Подробно рассмотрены случаи самодуальности для этой модели:  $N = 2$  — модель Изинга,  $N = 3$  и  $N = 4$  — две изинговские подсистемы, взаимодействующие через граничные спины. В разд. 3 получены соотношения дуальности для  $Z(N)$ -модели Березинского-Виллена, которая самодуальна для любого  $N$ . Подробно рассмотрен случай  $N = 4$ , который соответствует модели Эшкина-Теллера с подсистемами спинов  $\sigma(r)$  и  $s(r)$  взаимодействующих специальным образом на границах решетки, намотанной на тор. В разд. 4 мы выводим соотношения дуальности для неоднородных модели Эшкина-Теллера и восьмивершинной модели с кривой намоткой решетки на тор, а также точное соотношение между статистическими суммами этих моделей.

## 2. ВЕКТОРНАЯ МОДЕЛЬ ПОТТСА

Сначала мы выведем соотношение дуальности для векторной модели Поттса. Для этого будем использовать стандартный метод [7–9] дуального преобразования в спиновых моделях. Статистическую сумму этой модели можно представить в следующем виде:

$$Z_V^{(p,q)}[K, d] = \sum_{\{l\}} \exp \{-\beta H^{(p,q)}[K, l]\} = \sum_{\{l\}} \exp \left\{ \sum_{r,\mu} K_\mu(r) \times \right. \\ \left. \times \cos \left[ \frac{2\pi}{N} [\Delta_\mu l(r) + d_\mu^{(p,q)}(r)] \right] \right\} = \quad (16)$$

$$= \sum_{\{l\}} \sum_{\{t\}} \exp(-\beta \tilde{H}[t]) \exp \left\{ i \frac{2\pi}{N} \sum_{r,\mu} t_\mu(r) [\Delta_\mu l(r) + d_\mu^{(p,q)}(r)] \right\} = \quad (17)$$

$$= \sum_{\{l\}} \exp \left\{ -\beta \tilde{H}[t] + i \frac{2\pi}{N} \sum_{r,\mu} t_\mu(r) d_\mu^{(p,q)}(r) \right\} \prod_r N \delta_N(\Delta_\mu t_\mu(r) - \hat{\mu}), \quad (18)$$

где

$$\sum_{\{l\}} = \prod_r \left( \sum_{l(r)=0}^{N-1} \right), \quad \sum_{\{t\}} = \prod_{r,\mu} \left( \sum_{t_\mu(r)=0}^{N-1} \right).$$

В (17) мы сделали фурье-преобразование к векторному полю  $t_\mu(r)$ , причем в каждом узле  $t_\mu(r) = 0, 1, \dots, N-1$  и  $-\beta \tilde{H}[t]$  является фурье-образом гамильтониана (10):

$$-\beta \tilde{H}[t] = \sum_{k=0}^M \sum_{r,\mu} g_\mu^{(k)}(K) \cos^k \left[ \frac{2\pi}{N} t_\mu(r) \right]. \quad (19)$$

Здесь  $M = N/2$ , если  $N$  — четное и  $M = (N-1)/2$ , если  $N$  — нечетное. В формуле (18) величина  $\delta_N(s)$  является  $\delta$ -функцией Кронекера по mod  $N$ : она равна единице, если  $s = NL$ , где  $L$  — целое, и нулю — в остальных случаях.

Чтобы избавиться от  $\delta$ -функций в (18), необходимо решить уравнение

$$\Delta_\mu t_\mu(r - \hat{\mu}) = 0 \pmod{N}. \quad (20)$$

Нетривиальные решения этого уравнения на торе можно записать в виде

$$t_\mu^{(\alpha)}(r) = \epsilon_{\mu\nu} \Delta_\nu \tilde{l}(\tilde{r} - \hat{\nu}) + \epsilon_{\mu\nu} \tilde{d}_\nu^{(\alpha)}(\tilde{r} - \hat{\nu}), \quad (21)$$

где индекс  $\alpha$  нумерует решения, величина  $\tilde{l}(\tilde{r}) = 0, 1, \dots, N-1$  задана на узлах дуальной решетки и  $\tilde{d}_\nu^{(\alpha)}(\tilde{r})$  является плотностью топологического заряда (соответствующего данному решению  $\alpha$ ) поля замкнутых магнитных дислокаций на дуальной решетке

$$\tilde{d}_\mu^{(\alpha)}(\tilde{r}) = \sum_{i \in Z_\alpha} s_i^{(\alpha)} \sum_{r' \in \Gamma_i} \epsilon_{\mu\nu} a_\nu(r') \delta^2(r - r'), \quad s_i^{(\alpha)} = 0, 1, \dots, N-1. \quad (22)$$

Здесь по аналогии с (11), (12) функция  $\tilde{d}_\mu^{(\alpha)}(\tilde{r})$  определена на ребрах дуальной решетки. Для удобства мы записали дислокации на дуальной решетке с помощью замкнутых путей  $\Gamma_i$  на исходной решетке. В (22)  $Z_\alpha$  обозначает подмножество путей (соответствующее номеру решения  $\alpha$ ) из множества  $\Gamma$  всех замкнутых путей на исходной решетке ( $\Gamma_i \in \Gamma$ ). Вектор  $a_\mu(r) = e_\mu(r)$ , если направление обхода по пути  $\Gamma_i$  в узле  $r$  (направление обхода — против часовой стрелки) совпадает с направлением единичного вектора  $e_\mu(r) = \hat{\mu}$  в этом узле, в противном случае  $a_\mu(r) = -e_\mu(r)$ .

Выражение (22) нетрудно получить, замечая, что решение (21) формально удовлетворяет уравнению (20) в узле  $\tilde{r}$ , если выполняется соотношение

$$\epsilon_{\mu\nu} \Delta_\mu \tilde{d}_\nu^{(\alpha)}(\tilde{r} - \hat{\mu} - \hat{\nu}) = 0,$$

которое становится тождеством при выполнении одного из следующих трех условий:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_y^{(\alpha)}(\tilde{r} - \hat{y}) &= \tilde{d}_y^{(\alpha)}(\tilde{r} - \hat{x} - \hat{y}), & \tilde{d}_x^{(\alpha)}(\tilde{r} - \hat{x}) &= \tilde{d}_x^{(\alpha)}(\tilde{r} - \hat{x} - \hat{y}); \\ \tilde{d}_y^{(\alpha)}(\tilde{r} - \hat{y}) &= \tilde{d}_x^{(\alpha)}(\tilde{r} - \hat{x}), & \tilde{d}_y^{(\alpha)}(\tilde{r} - \hat{x} - \hat{y}) &= \tilde{d}_x^{(\alpha)}(\tilde{r} - \hat{x} - \hat{y}); \\ \tilde{d}_y^{(\alpha)}(\tilde{r} - \hat{y}) &= -\tilde{d}_x^{(\alpha)}(\tilde{r} - \hat{x} - \hat{y}), & \tilde{d}_x^{(\alpha)}(\tilde{r} - \hat{x}) &= \tilde{d}_y^{(\alpha)}(\tilde{r} - \hat{x} - \hat{y}). \end{aligned}$$

Совместность этих решений на некотором множестве узлов требует, чтобы эти узлы лежали на замкнутых путях  $\Gamma_i$  на торе, т. е. эти решения должны быть «склеены» так, чтобы образовать замкнутые магнитные дислокации.

Обозначим через  $[\tilde{d}^{(\alpha)}]$  конфигурацию констант взаимодействия на дуальной решетке, соответствующую решению (22). В зависимости от номера решения эти конфигурации будут содержать как замкнутые дислокации, не охватывающие циклы тора (их топологический заряд равен нулю), так и дислокации, охватывающие циклы. Дислокации первого типа можно исключить с помощью калибровочных преобразований (15) на дуальной решетке, а дислокации второго типа могут быть трансформированы в базисные магнитные дислокации  $\tilde{D}^{(\tilde{p}, \tilde{q})}$  на дуальной решетке. Это означает, что все конфигурации  $[\tilde{d}^{(\alpha)}]$  могут быть расклассифицированы в калибровочно-неэквивалентные классы  $\tilde{\Omega}^{(\tilde{p}, \tilde{q})}$  с топологическим зарядом

$$\tilde{Q}_\nu = \sum_{\tilde{r}} \tilde{d}_\nu^{(\tilde{p}, \tilde{q})}(\tilde{r}) = (\tilde{p}n, \tilde{q}m),$$

где  $\tilde{p}, \tilde{q} = 0, 1, \dots, N - 1$ . Поскольку соотношения дуальности связывают статистические суммы двух моделей, которые являются калибровочно-инвариантными величинами, то при снятии  $\delta$ -функций в (18) нужно просуммировать по калибровочно-неэквивалентным решениям уравнения (20):

$$t_\mu^{(\tilde{p}, \tilde{q})}(\tilde{r}) = \epsilon_{\mu\nu} \Delta_\nu \tilde{l}(\tilde{r} - \hat{\nu}) + \epsilon_{\mu\nu} \tilde{d}_\nu^{(\tilde{p}, \tilde{q})}(\tilde{r} - \hat{\nu}), \tag{23}$$

где  $\tilde{d}_\mu^{(\tilde{p}, \tilde{q})}$  определяется на дуальной решетке соотношениями аналогичными (11)–(13). Подставляя эти решения в соотношение (18), получаем

$$\begin{aligned} Z_V^{(p, q)}[K, d] &= \frac{1}{N} \sum_{\tilde{p}, \tilde{q}} \sum_{[l]} \exp(-\beta \tilde{H}[\Delta_\mu \tilde{l} + \tilde{d}_\mu^{(\tilde{p}, \tilde{q})}]) \times \\ &\times \exp \left\{ i \frac{2\pi}{N} \sum_{\tilde{r}, \mu} \epsilon_{\mu\nu} \tilde{d}_\mu^{(\tilde{p}, \tilde{q})}(\tilde{r}) [\Delta_\nu \tilde{l}(\tilde{r} - \hat{\nu}) + \tilde{d}_\nu^{(\tilde{p}, \tilde{q})}(\tilde{r} - \hat{\nu})] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь множитель  $1/N$  необходимо ввести, поскольку соотношение (23) приводит к тому, что сумма по конфигурациям  $[l]$  в  $N$  раз больше суммы по конфигурациям  $[t]$ . Замечая, что

$$\sum_{\tilde{r}, \mu} \epsilon_{\mu\nu} \tilde{d}_\mu^{(\tilde{p}, \tilde{q})}(\tilde{r}) \Delta_\nu \tilde{l}(\tilde{r} - \hat{\nu}) = 0,$$

соотношение (18) можно записать в более компактном виде:

$$\begin{aligned} Z_V^{(p,q)}[K, d] &= \frac{1}{N} \sum_{\tilde{p}, \tilde{q}} \exp \left\{ i \frac{2\pi}{N} \sum_{r, \mu} \epsilon_{\mu\nu} d_\mu^{(p,q)}(r) \tilde{d}_\nu^{(\tilde{p}, \tilde{q})}(\tilde{r} - \tilde{\nu}) \right\} \tilde{Z}_V^{(\tilde{p}, \tilde{q})}[\tilde{K}, \tilde{d}] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\tilde{p}, \tilde{q}} \exp \left\{ i \frac{2\pi}{N} (p\tilde{q} - q\tilde{p}) \right\} \tilde{Z}_V^{(\tilde{p}, \tilde{q})}[\tilde{K}, \tilde{d}], \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\tilde{Z}_V^{(\tilde{p}, \tilde{q})}[\tilde{K}, \tilde{d}] = \sum_{\{\tilde{l}\}} \exp(-\beta \tilde{H}^{(\tilde{p}, \tilde{q})}[\tilde{l}, \tilde{d}])$$

— статистическая сумма модели на дуальной решетке. Как видно из соотношения (24), векторная модель Поттса не является самодуальной для произвольного значения  $N$ . Мы подробно рассмотрим случаи  $N = 2, 3, 4$ , для которых эта модель является самодуальной [8].

Гамильтониан (7) при  $N = 2$  совпадает с гамильтонианом (4) модели Изинга. В этом случае из (19) получаем

$$-\beta \tilde{H}_2^{(\tilde{p}, \tilde{q})}[\tilde{l}] = \sum_{r, \nu} [g_\nu^{(0)}(\tilde{K}) + g_\nu^{(1)}(\tilde{K}) \cos(\pi \Delta_\nu^{(\tilde{p}, \tilde{q})} \tilde{l}(r))].$$

Для того чтобы найти коэффициенты  $g_\mu^{(i)}(\tilde{K})$ , используем обратное преобразование Фурье:

$$\exp \left\{ \sum_{k=0}^M g_\mu^{(k)}(\tilde{K}) \cos^k \left( \frac{2\pi}{N} \tilde{t}_\mu \right) \right\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp \left[ K_\nu \cos \left( \frac{2\pi}{N} n \right) - i \frac{2\pi}{N} n \tilde{t}_\nu \right], \quad \mu \neq \nu. \quad (25)$$

Отсюда для  $N = 2$  ( $M = 1$ ) нетрудно получить

$$\exp \{ 2g_\mu^{(0)}(\tilde{r}) \} = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2K_\nu(r), \quad \exp \{ -2g_\mu^{(1)}(\tilde{r}) \} = \operatorname{th} K_\nu(r) = \exp[-2\tilde{K}_{-\mu}(\tilde{r})],$$

где последнее соотношение совпадает с (2). Используя эти выражения, соотношение дуальности (24) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \left\{ \prod_{r, \nu} \operatorname{sh} 2K_\nu(r) \right\}^{-1/4} Z^{(p,q)}[K] &= \frac{1}{2} \left\{ \prod_{\tilde{r}, \nu} \operatorname{sh} 2\tilde{K}_\nu(\tilde{r}) \right\}^{-1/4} \times \\ &\times \sum_{\tilde{p}, \tilde{q}=0}^1 \exp \{ i\pi(p\tilde{q} - q\tilde{p}) \} \tilde{Z}^{(\tilde{p}, \tilde{q})}[\tilde{K}], \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\tilde{Z}^{(\tilde{p}, \tilde{q})}[\tilde{K}] = \sum_{\{\tilde{l}\}} \exp \sum_{\tilde{r}, \nu} \tilde{K}_\nu(\tilde{r}) \cos[\pi(\Delta_\nu^{(\tilde{p}, \tilde{q})} \tilde{l}(r))] = \sum_{\{\sigma\}} \exp \sum_{\tilde{r}, \nu} \tilde{K}_\nu(\tilde{r}) \tilde{\sigma}(\tilde{r}) \nabla_\nu^{(\tilde{p}, \tilde{q})} \tilde{\sigma}(\tilde{r}),$$

и  $\tilde{\sigma}(\tilde{r}) = \pm 1$ . Нетрудно убедиться, что (26) совпадает с соотношением дуальности (3), поскольку экспонента в правой части (26) есть не что иное, как матрица  $\hat{T}$ , фигурирующая в (3):

$$T_{p_x, p_y}^{p_x, p_y} = T_{p, q}^{p, q} = \exp \{i\pi(p\tilde{q} - q\tilde{p})\}. \tag{27}$$

Гамильтониан (7) при  $N = 3$  соответствует трехпозиционной векторной модели Поттса. В этом случае из соотношения (16) получаем

$$\begin{aligned} \exp(g_\mu^{(0)}(\tilde{r})) &= \frac{1}{3} \left\{ \exp(K_\nu(r)) + 2 \exp\left(-\frac{K_\nu(r)}{2}\right) \right\}^{1/3} \left\{ \exp(K_\nu(r)) - \exp\left(-\frac{K_\nu(r)}{2}\right) \right\}^{2/3}, \\ \exp\left(-\frac{3}{2}g_\mu^{(1)}(\tilde{r})\right) &= \frac{2 \operatorname{sh}[3K_\nu(r)/4]}{3 \operatorname{ch}[3K_\nu(r)/4] - \operatorname{sh}[3K_\nu(r)/4]} = \exp\left(-\frac{3}{2}\tilde{K}_\mu(\tilde{r})\right), \end{aligned}$$

и соотношение дуальности (24) принимает следующий вид:

$$Z_3^{(p, q)}[K] = \frac{1}{3} \prod_{\tilde{r}, \mu} \exp(g_\mu^{(0)}(\tilde{r})) \sum_{\tilde{p}, \tilde{q}=0}^2 \exp\left\{i\frac{2\pi}{3}(p\tilde{q} - q\tilde{p})\right\} \tilde{Z}_3^{(\tilde{p}, \tilde{q})}[\tilde{K}].$$

При  $N = 4$  статистическую сумму модели (7) с циклическими граничными условиями (9) можно представить в виде произведения статистических сумм двух моделей Изинга, взаимодействующих через граничные спины. Действительно, используя замену спиновой переменной

$$\sigma(r) = \exp\left(i\frac{\pi}{2}l(r)\right) = \frac{1}{2} \{\tau_1(r) + \tau_2(r) + i[\tau_1(r) - \tau_2(r)]\}, \tag{28}$$

которая каждому значению  $l = 0, 1, 2, 3$  ставит в однозначное соответствие значение  $\tau_1(r)$  и  $\tau_2(r)$  ( $\tau_i(r) = \pm 1$ ), гамильтониан (7) можно записать в виде

$$-\beta H_4^{(p, q)} = \sum_{\tau, \nu} K_\nu(r) \cos\left\{\frac{\pi}{2}\Delta_\nu^{(p, q)}l(r)\right\} = \frac{1}{2} \sum_{\tau, \nu, i} K_\nu(r) \tau_i(r) \bar{\nabla}_\nu^{(p, q)} \tau_i(r). \tag{29}$$

Здесь  $p, q = 0, 1, 2, 3$  и в силу граничных условий (8) для  $\sigma(r)$  и соотношения (28) оператор  $\bar{\nabla}_\nu^{(p, q)}$  удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\bar{\nabla}_x^{(p, q)} \tau_i(n, y) = \tau_i(n + 1, y) = \left[\cos \frac{\pi p}{2} + (-)^j \sin \frac{\pi q}{2}\right] \tau_j(1, y), \tag{30}$$

$$\bar{\nabla}_y^{(p, q)} \tau_i(x, m) = \tau_i(x, m + 1) = \left[\cos \frac{\pi q}{2} + (-)^j \sin \frac{\pi p}{2}\right] \tau_j(x, 1), \tag{31}$$

которые генерируют взаимодействие спинов  $\tau_1(r)$  и  $\tau_2(r)$  на границе ( $i \neq j$ ).

Используя (25), можно вычислить коэффициенты в гамильтониане (29):

$$\exp(-g_\mu^{(0)}(\tilde{r})) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} K_\nu(r), \quad \exp(-g_\mu^{(1)}(\tilde{r})) = \operatorname{th} \frac{K_\nu(r)}{2} = \exp\left(-\frac{3}{2}\tilde{K}_\mu(\tilde{r})\right), \quad g_\mu^{(2)}(\tilde{r}) = 0.$$

Из (24) получаем соотношение дуальности для двух моделей Изинга на торе, взаимодействующих через спины на границе:

$$\left\{ \prod_{\tau, \mu} \text{sh } K_{\mu}(r) \right\}^{-1/2} Z_{2I}^{(p, q)}[K] = \frac{1}{4} \left\{ \prod_{\tilde{\tau}, \mu} \text{sh } \tilde{K}_{\mu}(\tilde{r}) \right\}^{-1/2} \times \\ \times \sum_{\tilde{p}, \tilde{q}=0}^3 \exp \left\{ i \frac{\pi}{2} (p\tilde{q} - q\tilde{p}) \right\} \tilde{Z}_{2I}^{(\tilde{p}, \tilde{q})}[\tilde{K}],$$

где для этой модели

$$\text{sh } K_x(r) \text{sh } \tilde{K}_{-y}(\tilde{r}) = 1, \quad \text{sh } K_y(r) \text{sh } \tilde{K}_{-x}(\tilde{r}) = 1.$$

### 3. $Z(N)$ -МОДЕЛЬ БЕРЕЗИНСКОГО-ВИЛЛЕНА

Рассмотрим теперь вывод соотношений дуальности для  $Z(N)$ -модели Березинско-Виллена [5, 6] (гауссовой  $Z(N)$ -симметричной модели). Статистическую сумму этой модели можно записать в следующем виде [7, 8]:

$$Z_{BV}^{(p, q)}[K] = \sum_{|l|} \exp \left( -\beta H_G^{(p, q)}[K, l] \right) = \\ = \sum_{|l|} \sum_{|k|} \prod_{\tau, \mu} \exp \left\{ -\frac{1}{2} K_{\mu}(r) \left[ \frac{2\pi}{N} \Delta_{\mu} l(r) - 2\pi k_{\mu}(r) \right]^2 \right\}, \quad (32)$$

где

$$\sum_{|l|} \dots = \prod_r \left( \sum_{l(r)=0}^{N-1} \dots \right), \quad \sum_{|k|} \dots = \prod_{\tau, \mu} \left( \sum_{k_{\mu}(r)=-\infty}^{\infty} \dots \right).$$

Здесь величина  $l(r) = 0, \dots, N-1$  задана на узлах квадратной решетки, индекс  $(p, q)$  фиксирует граничные условия (9) и сумма по  $k_{\mu}$  обеспечивает периодичность гамильтониана относительно сдвига  $l \rightarrow l(r) + NL(r)$ , где  $L$  — целое число. Статистическую сумму (32) по аналогии с векторной моделью Поттса можно переписать через базисные дислокации  $D^{(p, q)}$ :

$$Z_{BV}^{(p, q)}[K, d] = \sum_{|l|} \sum_{|k|} \prod_{\tau, \mu} \exp \left\{ -\frac{1}{2} K_{\mu}(r) \left[ \frac{2\pi}{N} [\Delta_{\mu} l(r) + d_{\mu}^{(p, q)}(r)] - 2\pi k_{\mu}(r) \right]^2 \right\}, \quad (33)$$

где  $l(r)$  удовлетворяет периодическим граничным условиям и плотность топологического заряда  $d_{\mu}(r)$  определяется соотношениями (11)–(13).

Для вывода соотношения дуальности проведем с (33) следующую цепочку преобразований:

$$Z_{BV}^{(p, q)}[K, d] = \sum_{|l|} \sum_{|k|} \prod_{\tau, \mu} \exp \left\{ -\frac{1}{2} K_{\mu}(r) \left[ \frac{2\pi}{N} [\Delta_{\mu} l(r) + d_{\mu}(r)] - 2\pi k_{\mu}(r) \right]^2 \right\} = \\ = \left( \prod_{\tau, \mu} N \right)^{1/2} \sum_{|s|} \sum_{|k|} \int D\theta \prod_{\tau, \mu} \exp \left\{ -\frac{1}{2} K_{\mu}(r) \left[ \left( \Delta_{\mu} \theta(r) + \frac{2\pi}{N} d_{\mu}(r) \right) - 2\pi k_{\mu}(r) \right]^2 \right\} +$$

$$\left. + i \frac{N}{2} s(r) \theta(r) \right\} = \tag{34}$$

$$= \left( \prod_{r,\mu} \frac{N}{2\pi K_\mu(r)} \right)^{1/2} \sum_{|s|} \sum_{|t|} \int D\theta \prod_{r,\mu} \exp \left\{ -\frac{t_\mu^2(r)}{2K_\mu(r)} + it_\mu(r) (\Delta_\mu \theta(r) + \frac{2\pi}{N} d_\mu(r)) + \right. \\ \left. + i \frac{N}{2} s(r) \theta(r) \right\} = \tag{35}$$

$$= \left( \prod_{r,\mu} \frac{N}{2\pi K_\mu(r)} \right)^{1/2} \sum_{|s|} \sum_{|t|} \prod_{r,\mu} \exp \left\{ -\frac{t_\mu^2(r)}{2K_\mu(r)} + i \frac{2\pi}{N} t_\mu(r) d_\mu(r) \right\} \times \\ \times \prod_r \delta \left( \sum_\mu \Delta_\mu t_\mu(r - \hat{\mu}) - N s(r) \right), \tag{36}$$

где

$$\sum_{|t|} \dots = \prod_{r,\mu} \left( \sum_{t_\mu(r)=-\infty}^{\infty} \dots \right), \quad \int D\theta = \prod_r \int_0^{2\pi} \frac{d\theta(r)}{2\pi}.$$

При выводе (34),(35),(36) мы использовали соответственно формулу суммирования

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \delta \left( \theta - \frac{2\pi}{N} l \right) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{iNs\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2} K (f - 2\pi k)^2 \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi K}} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{1}{2K} t^2 + itf \right)$$

и определение  $\delta$ -функции Кронекера

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta(r)}{2\pi} e^{i\theta l} = \delta(l).$$

Для того чтобы снять  $\delta$ -функции в соотношении (36), необходимо решить уравнение

$$\sum_\mu \Delta_\mu t_\mu(r - \hat{\mu}) = N s(r).$$

Анализ решений этого уравнения аналогичен анализу формул (20)–(23) и приводит к следующему выражению для калибровочно–неэквивалентных решений

$$t_\mu^{(\tilde{p}\tilde{q})}(\tilde{r}) = \epsilon_{\mu\nu} \Delta_\nu \tilde{l}(\tilde{r} - \hat{\nu}) + \epsilon_{\mu\nu} \tilde{d}_\nu^{(\tilde{p},\tilde{q})}(\tilde{r} - \hat{\nu}) - N \epsilon_{\mu\nu} \tilde{k}_\nu(\tilde{r} - \hat{\nu}),$$

$$s(r) = \epsilon_{\mu\nu} \Delta_\mu \tilde{k}_\nu(\tilde{r} - \hat{\nu} - \hat{\mu}).$$

Эти решения являются базисными магнитными дислокациями  $\tilde{D}^{(\tilde{p}, \tilde{q})}$  на дуальной решетке в соответствующих калибровочно-неэквивалентных классах  $\tilde{\Omega}^{(\tilde{p}, \tilde{q})}$  с топологическим зарядом  $\tilde{Q}_\mu = (\tilde{p}n, \tilde{q}m)$  ( $\tilde{p}, \tilde{q} = 0, 1, \dots, N-1$ ). Тогда при снятии  $\delta$ -функции в (36) необходимо просуммировать по всем таким решениям. В результате получаем соотношение дуальности для  $Z(N)$ -модели Березинского–Виллена:

$$\begin{aligned} & \left( \prod_{r, \mu} \frac{2\pi K_\mu(r)}{N} \right)^{1/4} Z_{BV}^{(p, q)}[K, d] = \\ & = \frac{1}{N} \sum_{\tilde{p}, \tilde{q}} \exp \left\{ i \frac{2\pi}{N} (p\tilde{q} - q\tilde{p}) \right\} \left( \prod_{r, \mu} \frac{2\pi \tilde{K}_\mu(\tilde{r})}{N} \right)^{1/4} \tilde{Z}_{BV}^{(\tilde{p}, \tilde{q})}[\tilde{K}, \tilde{d}], \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$K_\mu(r) \tilde{K}_{-\nu}(\tilde{r}) = \left( \frac{N}{2\pi} \right)^2, \quad \mu \neq \nu.$$

Как было показано в [7], гауссова  $Z(N)$ -симметричная модель при  $N = 2$  соответствует модели Изинга, что согласуется с нашим результатом (37), который совпадает с (3) в этом случае, а при  $N = 4$  — модели Эшкина–Теллера [12]. Сейчас мы более подробно рассмотрим последний случай. Гамильтониан неоднородной модели Эшкина–Теллера можно записать в виде

$$\begin{aligned} -\beta H_{AT}^{(p_\nu, q_\nu)} = & \sum_{r, \nu} [P_\nu(r) + I_\nu(r)\tau_1(r)\nabla_\nu^{(p_\nu)}\tau_1(r) + J_\nu(r)\tau_2(r)\nabla_\nu^{(q_\nu)}\tau_2(r) + \\ & + L_\nu(r)\tau_1(r)\nabla_\nu^{(p_\nu)}\tau_1(r)\tau_2(r)\nabla_\nu^{(q_\nu)}\tau_2(r)]. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь в каждом узле  $r$  квадратной решетки  $R$  размера  $n \times m$  находятся две спиновые переменные  $\sigma(r)$  и  $s(r)$ , принимающие значения  $\pm 1$ ; индекс  $\nu = x, y$  нумерует координатные оси  $x$  и  $y$ , а индексы  $p_\nu = 0, 1$  и  $q_\nu = 0, 1$  ( $\nu = x, y$ ) описывают граничные условия (6) для спиновых переменных  $\sigma(r)$  и соответственно  $s(r)$ ;  $I_\nu, J_\nu, L_\nu$  — константы взаимодействия вдоль соответствующих осей.

Статистический вес модели Эшкина–Теллера связан со статистическим весом гауссовой  $Z(4)$ -симметричной модели следующим соотношением [12]:

$$\begin{aligned} & \exp [P_\nu(r) + I_\nu(r)\tau_1(r)\nabla_\nu\tau_1(r) + J_\nu(r)\tau_2(r)\nabla_\nu\tau_2(r) + L_\nu(r)\tau_1(r)\nabla_\nu\tau_1(r)\tau_2(r)\nabla_\nu\tau_2(r)] = \\ & = \sum_{k_\mu(r)=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -2\pi^2 K_\nu(r) \left[ \frac{1}{4} (\Delta_\nu l(r) + d_\nu(r)) - k_\nu(r) \right]^2 \right\}, \end{aligned}$$

где величина  $l(r)$  связана со спиновыми переменными  $\tau_1(r)$  и  $\tau_2(r)$  соотношением (28). Отсюда получаем параметризацию констант взаимодействия модели Эшкина–Теллера через константы  $K_\nu$ :

$$\exp(4P_\nu) = \omega_0\omega_1\omega_2\omega_3, \quad \exp(4L_\nu) = \frac{\omega_0\omega_3}{\omega_1\omega_2},$$

$$\exp(4I_\nu) = \frac{\omega_0\omega_1}{\omega_2\omega_3}, \quad \exp(4J_\nu) = \frac{\omega_0\omega_2}{\omega_1\omega_3},$$

где

$$\omega_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi^2 K_\nu m^2), \quad \omega_1 = \omega_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[-2\pi^2 K_\nu \left(m - \frac{1}{4}\right)^2\right],$$

$$\omega_3 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[-2\pi^2 K_\nu \left(m - \frac{1}{2}\right)^2\right].$$

Откуда следует  $I_\nu = J_\nu$ . Используя это соответствие, из (37) нетрудно получить соотношение самодуальности для модели Эшкина–Теллера:

$$Z_{AT}^{(p,q)}[P, J, L] = \frac{1}{4} \sum_{\tilde{p}, \tilde{q}=0}^3 \exp\left\{i\frac{\pi}{2}(p\tilde{q} - q\tilde{p})\right\} \tilde{Z}_{AT}^{(\tilde{p}, \tilde{q})}[\tilde{P}, \tilde{J}, \tilde{L}], \quad (39)$$

где

$$Z_{AT}^{(p,q)} = \sum_{[\tau_1], [\tau_2]} \exp\left\{-\beta H_{AT}^{(p,q)}[\tau_1, \tau_2]\right\}.$$

Здесь гамильтониан  $H_{AT}^{(p,q)}$  по своей структуре совпадает с (38), но операторы сдвига  $\nabla_\nu^{(p,\cdot)}$  и  $\nabla_\nu^{(\cdot,q)}$  заменены на  $\tilde{\nabla}_{x,y}^{(p,q)}$  ( $p, q = 0, \dots, 3$ ) с граничными условиями (30), (31), что приводит к взаимодействию спиновых переменных  $\tau_1(r)$  и  $\tau_2(r)$  на границах. Как уже обсуждалось, эти граничные условия возникают вследствие граничных условий (9) для переменной  $l(r)$  и соотношения (28).

В (39) дуальные константы взаимодействия связаны с исходными следующим образом:

$$\exp(-2J_\mu(r) - 2L_\mu(r)) = \frac{\text{th } \tilde{J}_{-\nu}(\tilde{r}) \left[1 + \text{th } \tilde{L}_{-\nu}(\tilde{r})\right]}{1 + \text{th}^2 \tilde{J}_{-\nu}(\tilde{r}) \text{th } \tilde{L}_{-\nu}(\tilde{r})},$$

$$\exp\{-4J_\mu(r)\} = \frac{\text{th}^2 \tilde{J}_{-\nu}(\tilde{r}) + \text{th } \tilde{L}_{-\nu}(\tilde{r})}{1 + \text{th}^2 \tilde{J}_{-\nu}(\tilde{r}) \text{th } \tilde{L}_{-\nu}(\tilde{r})},$$

$$\frac{1}{2} \exp(P_\mu + 2J_\mu + L_\mu) = \exp(\tilde{P}_{-\nu}) \left[\text{ch}^2 \tilde{J}_{-\nu} \text{ch } \tilde{L}_{-\nu} + \text{sh}^2 \tilde{J}_{-\nu} \text{sh } \tilde{L}_{-\nu}\right].$$

Эти равенства являются частным случаем соотношений (72), которые будут получены в следующем разделе, где мы выводим более общие формулы самодуальности для модели Эшкина–Теллера с гамильтонианом (38).

#### 4. МОДЕЛЬ ЭШКИНА–ТЕЛЛЕРА И 8-ВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим статистическую сумму

$$Z_{AT}^{(p_\nu, q_\nu)}[P, I, J, L] = \sum_{|\sigma|, |s|} \exp\left(-\beta H_{AT}^{(p_\nu, q_\nu)}\right) \quad (40)$$

неоднородной модели Эшкина–Теллера на конечной квадратной решетке  $R$  размера  $n \times m$ , намотанной на тор, с гамильтонианом (38) и граничными условиями (6) для спиновых переменных  $\sigma(r)$  и  $s(r)$ .

Для дуального преобразования статистической суммы (40) можно воспользоваться соотношением дуальности для неоднородной модели Изинга (3). Для этого необходимо расфакторизовать четырехспиновый член в (40) с помощью простого тождества

$$\exp[L_\nu(r)\sigma(r)\sigma(r+\hat{\nu})s(r)s(r+\hat{\nu})] = \sum_{\tau_\nu(r)} \alpha_\nu(r) \exp\{\gamma_\nu(r)\tau_\nu(r)[\sigma(r)\sigma(r+\hat{\nu})+s(r)s(r+\hat{\nu})]\},$$

где спиновая переменная  $\tau_\nu(r) = \pm 1$  находится на ребрах решетки  $(r, r + \nu)$  и

$$\exp[2L_\nu(r)] = \text{ch } 2\gamma_\nu(r), \quad \exp[-L_\nu(r)] = 2\alpha_\nu(r). \quad (41)$$

После факторизации получаем для статистической суммы (40) представление в виде линейной комбинации произведений двух статистических сумм неоднородных моделей Изинга:

$$Z_{AT}^{(p_\nu, q_\nu)} = \sum_{|\tau_\nu|} \prod_{\tau, \nu} \{\alpha_\nu(r) \exp(P_\nu(r))\} Z_\sigma^{(p_x, p_y)}[I'_\mu] Z_s^{(q_x, q_y)}[J'_\nu] \quad (42)$$

где

$$Z_\sigma^{(p_x, p_y)}[I'_\mu] = \sum_{|\sigma|} \prod_{r, \nu} \exp[I'_\nu(r)\sigma(r)\nabla_\nu^{(p_\nu)}\sigma(r)],$$

$$Z_s^{(q_x, q_y)}[J'_\nu] = \sum_{|s|} \prod_{r, \nu} \exp[J'_\nu(r)s(r)\nabla_\nu^{(q_\nu)}s(r)]$$

и константы взаимодействия определяются равенствами

$$I'_\nu(r) = I_\nu(r) + \gamma_\nu(r)\tau_\nu(r), \quad J'_\nu(r) = J_\nu(r) + \gamma_\nu(r)\tau_\nu(r). \quad (43)$$

Поскольку соотношение дуальности (3) справедливо для произвольной конфигурации констант взаимодействия  $[K]$ , мы можем использовать его для дуального преобразования статистических сумм  $Z_s^{(q_x, q_y)}$  и  $Z_\sigma^{(p_x, p_y)}$ . При этом, совершая преобразование дуальности, например, только для  $Z_s^{(q_x, q_y)}$ , мы находим связь между статистическими суммами модели Эшкина–Теллера и 8-вершинной модели, тогда как одновременное преобразование  $Z_s^{(q_x, q_y)}$  и  $Z_\sigma^{(p_x, p_y)}$  приводит к статистической сумме дуальной модели Эшкина–Теллера.

Рассмотрим сначала первый случай. Используя соотношение (3) для дуального преобразования  $Z_s^{(q_x, q_y)}$ , получаем

$$Z_{AT}^{(p_\nu, q_\nu)} = \frac{1}{2} \prod_{\tau, \nu} \{\alpha_\nu(r) \exp(P_\nu(r))\} \sum_{|\tau_\nu|} Z_\sigma^{(p_x, p_y)}[I'] \times$$

$$\times \sum_{\substack{\tilde{q}_x, \tilde{q}_y=0 \\ \tilde{\tau}}^1} \exp[i\pi(q_x\tilde{q}_y - q_y\tilde{q}_x)] \sum_{|\tilde{\tau}|} \prod_{\tilde{\tau}, \nu} \left\{ \text{sh } 2\tilde{J}'_{-\nu}(\tilde{r}) \right\}^{1/2} \exp\left[\tilde{J}'_{-\nu}(\tilde{r})\tau(\tilde{r})\nabla_{-\nu}^{(q_\nu)}\tau(\tilde{r})\right], \quad (44)$$

где через  $\tau(\tilde{r})$  обозначена спиновая переменная, дуальная к  $s(r)$ , и

$$\text{th } \tilde{J}'_{-\nu}(\tilde{r}) = \exp[-2J'_\mu(r)] \quad (\mu \neq \nu), \quad (45)$$

$\tilde{r}$  обозначает узлы дуальной решетки  $\tilde{R}$ , которые связаны с координатами узлов исходной решетки соотношением  $\tilde{r} = r + (\hat{x} + \hat{y})/2$ , и  $\tilde{J}'_{-\nu}(\tilde{r}) = \tilde{J}'_\nu(\tilde{r} - \hat{\nu})$ . Таким образом, в правой части (44) мы получили статистическую сумму, в которой спиновые переменные заданы на двух решетках  $R$  и  $\tilde{R}$ . Используя (45) и тождество

$$\exp(K\sigma_i\sigma_j) = \text{ch } K + \text{sh } K\sigma_i\sigma_j, \quad (46)$$

сумму по  $[\tau_\nu]$  в (44) можно записать в следующем виде:

$$\prod_{\tau, \nu} \sum_{\tau_\nu = \pm 1} [\exp(J'_\nu) \text{ch } I'_\nu + \exp(J'_\nu) \text{sh } I'_\nu \sigma(r) \nabla_\nu^{(p_\nu)} \sigma(r) + \\ + \exp(-J'_\nu) \text{ch } I'_\nu \tau(\tilde{r}) \nabla_{-\mu}^{(q_\mu)} \tau(\tilde{r}) + \exp(-J'_\nu) \text{sh } I'_\nu \sigma(r) \nabla_\nu^{(p_\nu)} \sigma(r) \tau(\tilde{r}) \nabla_{-\mu}^{(q_\mu)} \tau(\tilde{r})] \quad (\mu \neq \nu).$$

После суммирования по  $\tau_\nu$  получаем

$$Z_{AT}^{(p_\nu, q_\nu)} = \frac{1}{2} \prod_{\tau, \nu} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp[P_\nu(r) - L_\nu(r)] \sum_{\tilde{q}_x, \tilde{q}_y = 0}^1 \exp[i\pi(q_x \tilde{q}_y - q_y \tilde{q}_x)] \times \\ \times \sum_{[\tau, \sigma]} \prod_{\tau, \nu} \exp(J_\nu + L_\nu) \text{ch}(I_\nu + L_\nu) \left[ 1 + \text{th}(I_\nu + L_\nu) \sigma(r) \nabla_\nu^{(p_\nu)} \sigma(r) + \right. \\ \left. + \exp(-2J_\nu) \frac{\text{ch}(I_\nu - L_\nu)}{\text{ch}(I_\nu + L_\nu)} \tau(\tilde{r}) \nabla_{-\mu}^{(q_\mu)} \tau(\tilde{r}) + \right. \\ \left. + \exp(-2J_\nu) \frac{\text{sh}(I_\nu - L_\nu)}{\text{ch}(I_\nu + L_\nu)} \sigma(r) \nabla_\nu^{(p_\nu)} \sigma(r) \tau(\tilde{r}) \nabla_{-\mu}^{(q_\mu)} \tau(\tilde{r}) \right]. \quad (47)$$

Известно [10], что статистическую сумму 8-вершинной модели можно представить в виде статистической суммы спиновой модели, состоящей из двух изинговских подрешеток  $R$  и  $\tilde{R}$ , связанных четырехспиновым взаимодействием. В общем виде гамильтониан такой модели удобно записать в виде

$$-\beta H_{IV}^{(p_\nu, q_\nu)} = \sum_{\tau, \nu} [P_\nu^v(r) + I_\nu^v(r) \sigma(r) \nabla_\nu^{(p_\nu)} \sigma(r) + \\ + J_{-\mu}^v(\tilde{r}) \tau(\tilde{r}) \nabla_{-\mu}^{(q_\mu)} \tau(\tilde{r}) + L_\nu^v(r) \sigma(r) \nabla_\nu^{(p_\nu)} \sigma(r) \tau(\tilde{r}) \nabla_{-\mu}^{(q_\mu)} \tau(\tilde{r})] \quad (\mu \neq \nu), \quad (48)$$

где опять спины  $\sigma(r) = \pm 1$  расположены на исходной решетке  $R$ , а спины  $\tau(\tilde{r}) = \pm 1$  — на узлах решетки  $\tilde{R}$ , дуальной к исходной (см. рис. 2а). Статистическая сумма такой модели совпадает со статистической суммой (47) при определенных соотношениях между константами взаимодействия этих моделей. Действительно, используя (46), можно получить

$$Z_{IV}^{(p_\nu, q_\nu)} = \sum_{[\tau], [\sigma]} \exp(-\beta H_{IV}^{(p_\nu, q_\nu)}) = \sum_{[\tau], [\sigma]} \prod_{\tau, \nu} \bar{P}_\nu [1 + \bar{I}_\nu \sigma(r) \nabla_\nu^{(p_\nu)} \sigma(r) + \bar{J}_\nu \tau(\tilde{r}) \nabla_{-\mu}^{(q_\mu)} \tau(\tilde{r}) + \\ + \bar{L}_\nu \sigma(r) \nabla_\nu^{(p_\nu)} \sigma(r) \tau(\tilde{r}) \nabla_{-\mu}^{(q_\mu)} \tau(\tilde{r})], \quad (49)$$

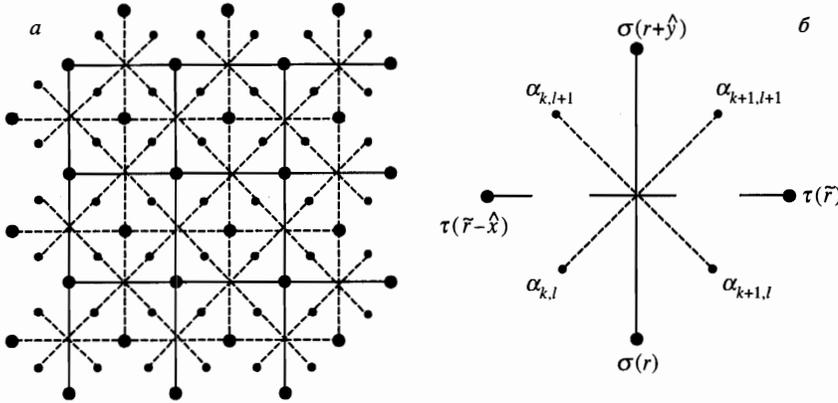


Рис. 2. *a* — Двухподрешеточная модель Изинга и 8-вершинная модель с кособой намоткой на тор. *б* — Связь между спиновыми переменными  $\sigma(r)$ ,  $\tau(\hat{r})$  и  $\alpha_{k,l}$

константы взаимодействия определяются ниже. Сравнивая (47) и (49), получаем соотношения между константами взаимодействия модели Эшкина-Теллера и спиновой модели с гамильтонианом (48):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \exp [P_\nu(r) + J_\nu(r)] = \exp [P_\mu^\nu(r) [\text{ch } I_\nu^\nu(r) \text{ch } J_{-\mu}^\nu(\tilde{r}) \text{ch } L_\nu^\nu(r) + \text{sh } I_\nu^\nu(r) \text{sh } J_{-\mu}^\nu(\tilde{r}) \text{sh } L_\nu^\nu(r)]] = \bar{P}_\nu, \quad (50)$$

$$\text{th}(I_\nu + L_\nu) = \frac{\text{th } I_\nu^\nu(r) + \text{th } J_{-\mu}^\nu(\tilde{r}) \text{th } L_\nu^\nu(r)}{1 + \text{th } I_\nu^\nu(r) \text{th } J_{-\mu}^\nu(\tilde{r}) \text{th } L_\nu^\nu(r)} = \bar{I}_\nu, \quad (51)$$

$$\exp(-2J_\nu) \frac{\text{ch}(I_\nu - J_\nu)}{\text{ch}(I_\nu + J_\nu)} = \frac{\text{th } J_{-\mu}^\nu(\tilde{r}) + \text{th } I_\nu^\nu(r) \text{th } L_\nu^\nu(r)}{1 + \text{th } I_\nu^\nu(r) \text{th } J_{-\mu}^\nu(\tilde{r}) \text{th } L_\nu^\nu(r)} = \bar{J}_\nu, \quad (52)$$

$$\exp(-2J_\nu) \frac{\text{sh}(I_\nu - J_\nu)}{\text{ch}(I_\nu + J_\nu)} = \frac{\text{th } L_\nu^\nu(r) + \text{th } I_\nu^\nu(r) \text{th } J_{-\mu}^\nu(\tilde{r})}{1 + \text{th } I_\nu^\nu(r) \text{th } J_{-\mu}^\nu(\tilde{r}) \text{th } L_\nu^\nu(r)} = \bar{L}_\nu, \quad (53)$$

а также соотношение, связывающее статистические суммы:

$$Z_{AT}^{(p_\nu, q_\nu)} = \frac{1}{2} \sum_{\tilde{q}_x, \tilde{q}_y=0}^1 \exp [i\pi(q_x \tilde{q}_y - q_y \tilde{q}_x)] Z_{2I}^{(p_x, p_y, \tilde{q}_x, \tilde{q}_y)}. \quad (54)$$

Нетрудно показать, что статистическая сумма модели с гамильтонианом (48) связана со статистической суммой неоднородной двухподрешеточной 8-вершинной модели соотношением

$$Z_{IV}^{(p_\nu, q_\nu)} = 2Z_{8V}^{(p_x+q_x, p_y+q_y)}. \quad (55)$$

Действительно, как видно из рис. 2 (ребра решетки для 8-вершинной модели изображены короткими штриховыми линиями), эта модель определена на квадратной решетке

с косою намоткой на тор при условии тороидальных граничных условий (6) для модели (48) (на рис. 2а подрешетки  $R$  и  $\tilde{R}$  имеют размер  $3 \times 3$ , и спины, расположенные на противоположных краях подрешеток, необходимо отождествить при намотке решетки на тор). Обычно спиновыми переменными в 8-вершинной модели являются стрелки, расположенные на ребрах решетки и принимающие два значения. Для удобства мы будем обозначать их в виде изинговых спиновых переменных  $\alpha$ , принимающих значения  $\pm 1$  и находящихся на узлах расположенных в середине соответствующих ребер. Тогда из рис. 2а видно, что для учета тороидальных граничных условий для 8-вершинной модели на решетке с косою намоткой на тор ее удобно представить как модель на квадратной решетке (с прямой намоткой на тор) размера  $2n \times 2m$  с постоянной решетки в два раза меньше, чем для исходной решетки  $R$ , на которой заданы спины  $\sigma(r)$ . В узлах такой решетки находятся спиновые переменные  $\alpha_{k,l} = \pm 1$ , удовлетворяющие граничным условиям

$$\nabla_{x/2}^{(l_x)} \alpha_{2n,l} = (-1)^{l_x} \alpha_{1,l}, \quad \nabla_{y/2}^{(l_y)} \alpha_{k,2m} = (-1)^{l_y} \alpha_{k,1},$$

где  $l_x, l_y = 0, 1$  обозначают граничные условия, а пары  $(k, l)$ ,  $k = 1, \dots, 2n$ ,  $l = 1, \dots, 2m$  нумеруют узлы решетки. Связь между спиновыми переменными  $\sigma(r)$ ,  $\tau(\tilde{r})$  и  $\alpha_{k,l}$  показана на рис. 2б и определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha_{k,l} &= \sigma(r)\tau(\tilde{r} - \hat{x}), & \alpha_{k+1,l+1} &= \sigma(r + \hat{y})\tau(\tilde{r}), \\ \alpha_{k,l+1} &= \sigma(r + \hat{y})\tau(\tilde{r} - \hat{x}), & \alpha_{k+1,l} &= \sigma(r)\tau(\tilde{r}). \end{aligned} \tag{56}$$

Используя эти соотношения, статистическую сумму 8-вершинной модели на такой решетке можно представить в виде

$$\begin{aligned} Z_{8V}^{(l_x, l_y)} &= \sum_{|\alpha|} \exp(-\beta H_{8V}^{(l_x, l_y)}) = \\ &= \sum_{|\alpha|} \prod_{i,j=1}^{n,m} \omega_1(\alpha_{2i-1,2j-1}, \alpha_{2i,2j} | \alpha_{2i-1,2j}, \alpha_{2i,2j-1}) \omega_2(\alpha_{2i,2j}, \alpha_{2i+1,2j+1} | \alpha_{2i,2j+1}, \alpha_{2i+1,2j}), \end{aligned} \tag{57}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \exp \left\{ \frac{1}{2} [2P_y^v + I_y^v(\alpha_{2i-1,2j-1} \nabla_{x/2}^{(l_x)} \alpha_{2i-1,2j-1} + \alpha_{2i-1,2j} \nabla_{x/2}^{(l_x)} \alpha_{2i-1,2j}) + \right. \\ &+ J_{-x}^v(\alpha_{2i-1,2j-1} \nabla_{y/2}^{(l_y)} \alpha_{2i-1,2j-1} + \alpha_{2i,2j-1} \nabla_{y/2}^{(l_y)} \alpha_{2i,2j-1}) + \\ &+ L_y^v(\alpha_{2i-1,2j-1} \alpha_{2i,2j} + \alpha_{2i-1,2j} \alpha_{2i,2j-1}) \left. \right\} \delta(\alpha_{2i-1,2j-1} \alpha_{2i,2j} \alpha_{2i-1,2j} \alpha_{2i,2j-1} - 1), \\ \omega_2 &= \exp \left\{ \frac{1}{2} [2P_x^v + I_x^v(\alpha_{2i,2j} \nabla_{y/2}^{(l_y)} \alpha_{2i,2j} + \alpha_{2i+1,2j} \nabla_{y/2}^{(l_y)} \alpha_{2i+1,2j}) + \right. \\ &+ J_{-y}^v(\alpha_{2i,2j} \nabla_{x/2}^{(l_x)} \alpha_{2i,2j} + \alpha_{2i,2j+1} \nabla_{x/2}^{(l_x)} \alpha_{2i,2j+1}) + \\ &+ L_x^v(\alpha_{2i-1,2j-1} \alpha_{2i,2j} + \alpha_{2i-1,2j} \alpha_{2i,2j-1}) \left. \right\} \delta(\alpha_{2i,2j} \alpha_{2i+1,2j+1} \alpha_{2i+1,2j} \alpha_{2i,2j+1} - 1). \end{aligned}$$

Здесь  $\omega_1$  и  $\omega_2$  описывают статистические веса двух подрешеток в 8-вершинной модели. Очевидно, что при

$$P_x^v = P_y^v = P^v, \quad I_x^v = J_{-x}^v, \quad I_y^v = J_{-y}^v, \quad L_x^v = L_y^v = L^v \tag{58}$$

статистические веса  $\omega_1$  и  $\omega_2$  совпадают, и мы приходим к обычной модели [10]. Для сравнения приведем связь  $\omega_1$  с обычной вершинной записью статистических весов в 8-вершинной модели:

$$\begin{aligned} a &= \omega_1(+ + | + +) = \exp [P^v(r) + I_x^v(r) + I_y^v(r) + L^v(r)], \\ b &= \omega_1(+ + | - -) = \exp [P^v(r) - I_x^v(r) - I_y^v(r) + L^v(r)], \\ c &= \omega_1(+ - | - +) = \exp [P^v(r) + I_x^v(r) - I_y^v(r) - L^v(r)], \\ d &= \omega_1(+ - | + -) = \exp [P^v(r) - I_x^v(r) + I_y^v(r) - L^v(r)], \end{aligned} \tag{59}$$

Связь граничных условий для спиновых переменных  $\sigma(r), \tau(\tilde{r})$  и  $\alpha_{k,l}$  определяется соотношением (56), откуда следует

$$\nabla_{x/2}^{(l_x)} \alpha_{k,l} = \nabla_x^{(p_x)} \sigma(r) \nabla_x^{(q_x)} \tau(\tilde{r}), \quad \nabla_{y/2}^{(l_y)} \alpha_{k,l} = \nabla_y^{(p_y)} \sigma(r) \nabla_y^{(q_y)} \tau(\tilde{r}).$$

Отсюда видим, что индексы граничных условий связаны следующим образом:

$$l_x = p_x + q_x, \quad l_y = p_y + q_y, \tag{60}$$

где сумма подразумевается по mod 2. С учетом этого получаем (55). Теперь, учитывая (54), (55) и (60), нетрудно получить точное соотношение, связывающее статистические суммы модели Эшкина–Теллера и 8-вершинной модели с косой намоткой решетки на тор:

$$Z_{AT}^{(p_\nu, q_\nu)} [P, I, J, L] = \sum_{\tilde{q}_x, \tilde{q}_y=0}^1 \exp [i\pi(q_x \tilde{q}_y - q_y \tilde{q}_x)] Z_{8V}^{(p_x + \tilde{q}_x, p_y + \tilde{q}_y)} [P^v, I^v, J^v, L^v],$$

где константы взаимодействия связаны соотношениями (50)–(53).

Вернемся к выводу соотношения дуальности для модели Эшкина–Теллера. Для этого необходимо, используя (5), сделать в (42) дуальное преобразование статистических сумм  $Z_\sigma$  и  $Z_s$  одновременно. В результате получаем

$$\begin{aligned} Z_{AT}^{(p_\nu, q_\nu)} &= \frac{1}{4} \sum_{\tilde{p}_\nu, \tilde{q}_\nu=0}^1 \exp [i\pi(p_x \tilde{p}_y - p_y \tilde{p}_x + q_x \tilde{q}_y - q_y \tilde{q}_x)] \prod_{r,\nu} \{ \alpha_\nu(r) \exp (P_\nu(r)) \} \times \\ &\times \sum_{[\tilde{r}]} \sum_{[\tilde{\sigma}]} \prod_{r,\nu} \left[ (\text{sh } 2\tilde{I}'_\nu(\tilde{r}))^{-1/2} \exp \left\{ \tilde{I}'_\nu(\tilde{r}) \tilde{\sigma}(\tilde{r}) \nabla_\nu^{(p_\nu)} \tilde{\sigma}(\tilde{r}) \right\} \right] \times \\ &\times \sum_{[s]} \prod_{r,\nu} \left[ (\text{sh } 2\tilde{J}'_\nu(\tilde{r}))^{-1/2} \exp \left\{ \tilde{J}'_\nu(\tilde{r}) \tilde{s}(\tilde{r}) \nabla_\nu^{(q_\nu)} \tilde{s}(\tilde{r}) \right\} \right], \end{aligned}$$

где  $I'_\nu(r), J'_\nu(r)$  определены в (43) и

$$\text{th } \tilde{J}'_{-\mu}(\tilde{r}) = \exp [-2J'_\nu(r)], \quad \text{th } \tilde{I}'_{-\mu}(\tilde{r}) = \exp [-2I'_\nu(r)].$$

Теперь, повторяя вычисления, которые мы делали при выводе (47), нетрудно получить следующее представление для статистической суммы модели Эшкина–Теллера:

$$\begin{aligned}
 Z_{AT}^{(p_\nu, q_\nu)} &= \frac{1}{4} \sum_{\tilde{p}_\nu, \tilde{q}_\nu=0}^1 \exp [i\pi (p_x \tilde{p}_y - p_y \tilde{p}_x + q_x \tilde{q}_y - q_y \tilde{q}_x)] \times \\
 &\times \sum_{[\tilde{\sigma}], [\tilde{s}]} \prod_{r, \nu} \exp [P_\nu(r) + I_\nu(r) + J_\nu(r) + L_\nu(r)] \times \\
 &\times \left\{ 1 + \exp [-2I_\nu(r) - 2L_\nu(r)] \tilde{\sigma}(\tilde{r}) \nabla_{-\mu}^{(\tilde{p}_\mu)} \tilde{\sigma}(\tilde{r}) + \right. \\
 &+ \exp [-2J_\nu(r) - 2L_\nu(r)] \tilde{s}(\tilde{r}) \nabla_{-\mu}^{(\tilde{q}_\mu)} \tilde{s}(\tilde{r}) + \\
 &\left. + \exp [-2I_\nu(r) - 2J_\nu(r)] \tilde{\sigma}(\tilde{r}) \nabla_{-\mu}^{(\tilde{p}_\mu)} \tilde{\sigma}(\tilde{r}) \tilde{s}(\tilde{r}) \nabla_{-\mu}^{(\tilde{q}_\mu)} \tilde{s}(\tilde{r}) \right\}. \tag{61}
 \end{aligned}$$

Используя тождество (46), статистическую сумму дуальной модели

$$\begin{aligned}
 \tilde{Z}_{AT}^{(\tilde{p}_\nu, \tilde{q}_\nu)} &= \sum_{[\tilde{\sigma}], [\tilde{s}]} \exp \left\{ \sum_{\tilde{r}, \nu} \left[ \tilde{P}_\nu(\tilde{r}) + \tilde{I}_\nu(\tilde{r}) \tilde{\sigma}(\tilde{r}) \nabla_{-\nu}^{(\tilde{p}_\nu)} \tilde{\sigma}(\tilde{r}) + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \tilde{J}_\nu(\tilde{r}) \tilde{s}(\tilde{r}) \nabla_{-\nu}^{(\tilde{q}_\nu)} \tilde{s}(\tilde{r}) + \tilde{L}_\nu(\tilde{r}) \tilde{\sigma}(\tilde{r}) \nabla_{-\nu}^{(\tilde{p}_\nu)} \tilde{\sigma}(\tilde{r}) \tilde{s}(\tilde{r}) \nabla_{-\nu}^{(\tilde{q}_\nu)} \tilde{s}(\tilde{r}) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

можно привести к виду аналогичному (49), и, сравнивая коэффициенты при произведениях дуальных спинов с коэффициентами при соответствующих произведениях в выражении (61), получаем соотношения между исходными и дуальными константами взаимодействия:

$$\begin{aligned}
 \exp [-2J_\mu(r) - 2L_\mu(r)] &= \frac{\text{th } \tilde{J}_{-\nu}(\tilde{r}) + \text{th } \tilde{I}_{-\nu}(\tilde{r}) \text{th } \tilde{L}_{-\nu}(\tilde{r})}{1 + \text{th } \tilde{J}_{-\nu}(\tilde{r}) \text{th } \tilde{I}_{-\nu}(\tilde{r}) \text{th } \tilde{L}_{-\nu}(\tilde{r})}, \\
 \exp [-2I_\mu(r) - 2L_\mu(r)] &= \frac{\text{th } \tilde{I}_{-\nu}(\tilde{r}) + \text{th } \tilde{J}_{-\nu}(\tilde{r}) \text{th } \tilde{L}_{-\nu}(\tilde{r})}{1 + \text{th } \tilde{J}_{-\nu}(\tilde{r}) \text{th } \tilde{I}_{-\nu}(\tilde{r}) \text{th } \tilde{L}_{-\nu}(\tilde{r})}, \\
 \exp [-2I_\mu(r) - 2J_\mu(r)] &= \frac{\text{th } \tilde{L}_{-\nu}(\tilde{r}) + \text{th } \tilde{I}_{-\nu}(\tilde{r}) \text{th } \tilde{J}_{-\nu}(\tilde{r})}{1 + \text{th } \tilde{J}_{-\nu}(\tilde{r}) \text{th } \tilde{I}_{-\nu}(\tilde{r}) \text{th } \tilde{L}_{-\nu}(\tilde{r})}, \\
 \frac{1}{2} \exp (P_\mu + I_\mu + J_\mu + L_\mu) &= \exp (\tilde{P}_{-\nu}) (\text{ch } \tilde{I}_{-\nu} \text{ch } \tilde{J}_{-\nu} \text{ch } \tilde{L}_{-\nu} + \text{sh } \tilde{I}_{-\nu} \text{sh } \tilde{J}_{-\nu} \text{sh } \tilde{L}_{-\nu}),
 \end{aligned} \tag{62}$$

а также соотношение самодуальности для модели Эшкина–Теллера:

$$Z_{AT}^{(p_\nu, q_\nu)} [P, I, J, L] = \frac{1}{4} \sum_{\tilde{p}_\mu, \tilde{q}_\mu=0}^1 T_{\tilde{p}_x, \tilde{p}_y}^{p_x, p_y} T_{\tilde{q}_x, \tilde{q}_y}^{q_x, q_y} \tilde{Z}_{AT}^{(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{q}_x, \tilde{q}_y)} [\tilde{P}, \tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{L}]. \tag{63}$$

Здесь матрица  $\hat{T}$  определена в (5), (27).

Используя эти результаты, нетрудно получить соотношения дуальности для 8-вершинной модели на решетке с кривой намоткой на тор. Действительно, как видно из (38) и (48), гамильтонианы моделей Эшкина–Теллера и двухподрешеточной модели Изинга с четырехспиновым взаимодействием имеют одинаковую структуру взаимодействия

спиновых переменных. Тогда соотношение дуальности для последней модели выводится таким же образом, как и для модели Эшкина–Теллера. В результате получаем подобное (63) выражение:

$$Z_{IV}^{(p_\nu, q_\nu)}[P^v, I^v, J^v, L^v] = \frac{1}{4} \sum_{\tilde{p}_\mu, \tilde{q}_\mu=0}^1 T_{\tilde{p}_x, \tilde{p}_y}^{p_x, p_y} T_{\tilde{q}_x, \tilde{q}_y}^{q_x, q_y} \tilde{Z}_{IV}^{(\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{q}_x, \tilde{q}_y)}[\tilde{P}^v, \tilde{I}^v, \tilde{J}^v, \tilde{L}^v],$$

где константы взаимодействия исходной и дуальной моделей связаны соотношениями (62). Используя теперь это соотношение и связь (55) между статистическими суммами 8-вершинной модели на решетке с кривой намоткой на тор и двухподрешеточной модели Изинга, а также связь между индексами граничных условий в этих моделях (60), легко получить соотношение дуальности для 8-вершинной модели:

$$Z_{8V}^{(l_x, l_y)}[P^v, I^v, J^v, L^v] = \frac{1}{4} \sum_{p_\mu, q_\mu=0}^1 \delta(p_x + q_x - l_x) \delta(p_y + q_y - l_y) \times \\ \times \frac{1}{4} \sum_{\tilde{p}_\mu, \tilde{q}_\mu=0}^1 T_{\tilde{p}_x, \tilde{p}_y}^{p_x, p_y} T_{\tilde{q}_x, \tilde{q}_y}^{q_x, q_y} \tilde{Z}_{8V}^{(p_x + \tilde{q}_x, p_y + \tilde{q}_y)}[\tilde{P}^v, \tilde{I}^v, \tilde{J}^v, \tilde{L}^v], \tag{64}$$

где статистические суммы исходной и дуальной моделей имеют вид (57), суммирование индексов граничных условий подразумевается по mod 2 и константы взаимодействия связаны соотношениями (62). Заметим, что после несложных алгебраических преобразований можно показать, что эти соотношения при выполнении условий (58) и (59) совпадают с условиями дуальности 8-вершинной модели, приведенными в [10]:

$$\tilde{a} = \frac{1}{2}(a + b + c + d), \quad \tilde{b} = \frac{1}{2}(a + b - c - d), \\ \tilde{c} = \frac{1}{2}(a - b + c - d), \quad \tilde{d} = \frac{1}{2}(a - b - c + d).$$

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно из вышеизложенного, соотношения дуальности, полученные в данной работе для  $Z(N)$ -симметричных моделей на квадратной решетке, намотанной на тор, имеют достаточно общее топологическое происхождение. Поэтому предлагаемый метод может быть обобщен для спиновых моделей с непрерывной группой симметрии, например, для XY-модели на торе.

Отметим, что соотношения дуальности (64) получены для неоднородной 8-вершинной модели. Используя метод, предложенный в [4], можно разрезать тор вдоль его циклов и получить соотношения дуальности для модели на плоскости с разными граничными условиями на ее краях. Кроме того, используя (64), можно получить соотношения дуальности для корреляционных функций 8-вершинной модели на квадратной решетке с кривой намоткой на тор, которые должны обобщить соотношения, полученные в [13] для бесконечных решеток.

Авторы благодарны М. А. Лашкевичу, С. З. Пакуляку и С. Хорошкину за полезные обсуждения. Один из авторов (В. Н. Ш.) благодарит А. А. Белавина за поддержку и А. Ю. Морозова за гостеприимство в ИТЭФ, где эта работа была закончена.

Работа выполнена благодаря поддержке ГКНТ Украины (грант 2.5.1/051) и INTAS (грант 93-1038).

## Литература

1. H. A. Kramers and G. N. Wannier, *Phys. Rev.* **60**, 252 (1941).
2. L. P. Kadanoff and H. Ceva, *Phys. Rev. B* **3**, 3918 (1971).
3. А. И. Бугрий, В. Н. Шадура, *ЖЭТФ* **109**, 1024 (1996).
4. А. И. Бугрий, В. Н. Шадура, *Письма в ЖЭТФ* **63**, 369 (1996).
5. В. Л. Березинский, *Дисс....канд. физ.-мат. наук, ИТФ АН СССР* (1971).
6. J. Villain, *J. Phys. C* **36**, 581, (1975).
7. Ал. Б. Замолодчиков, *ЖЭТФ* **75**, 341, (1978).
8. В. С. Доценко, *ЖЭТФ* **75**, 1083, (1978).
9. R. Savit, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 453 (1980).
10. Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, Москва (1985).
11. E. Fradkin, V. A. Huberman, and S. H. Shenker, *Phys. Rev. B* **18**, 4789 (1978).
12. L. P. Kadanoff, *Ann. Phys. (N. Y.)* **120**, 39 (1979).
13. M. Yu. Lashkevich, *Mod. Phys. Lett. B* **10**, 101 (1996).