

ВОЗДЕЙСТВИЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПИРАГАСА НА ДИНАМИКУ ЛАЗЕРА С МОДУЛЯЦИЕЙ ПОТЕРЬ

Н. А. Лойко, А. В. Науменко, С. И. Туровец

*Институт физики академии наук Беларуси
22072, Минск, Беларусь*

Поступила в редакцию 29 декабря 1996 г.

Выполнен линейный анализ устойчивости предельного цикла в лазере с модуляцией потерь и непрерывной запаздывающей обратной связью, контролирующей появление неустойчивости. На основе обобщения Стокса теории Флоке для функциональных уравнений выведено общее уравнение для определения бифуркаций Андронова–Хопфа, а также бифуркаций седло–узел и субгармонической. Найдены условия стабилизации T -периодического режима. Выявлены возможные дестабилизирующие эффекты, вносимые обратной связью.

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамический хаос, внутренне присущий большинству нелинейных систем, является обычно нежелательным явлением на практике. Поэтому возможность стабилизации различных периодических орбит, погруженных внутрь хаотического аттрактора, с помощью подходящей методики динамического контроля привлекает в последнее время пристальное внимание исследователей. Несколько лет назад Отт, Гребоджи и Йорке [1] предложили общий способ такой стабилизации, основанный на применении малых импульсных возмущений, контролируемых обратной связью, к доступным параметрам системы. С тех пор несколько модификаций этого метода были успешно применены в ряде экспериментальных систем [2]. Однако все они, как было показано, являются чувствительными к шуму в основном из-за дискретности во времени. Импульсный характер воздействия обуславливает также довольно жесткие требования к спектральной полосе пропускания петли обратной связи. Как следствие, ни одна из этих импульсных методик не была реализована до сих пор для быстрых систем со сравнительно высокими частотами осцилляций.

Пирагасом [3] была предложена новая техника контроля, основанная на непрерывной запаздывающей обратной связи, обобщенная затем посредством использования информации о многих предыдущих состояниях системы [4]. Контролирующий сигнал в простейшем случае непрерывной запаздывающей обратной связи пропорционален разности между выходными сигналами, взятыми в данный и некоторый предшествующий моменты времени. Основные преимущества такой методики — это возможность контроля быстрых систем в реальном времени, устойчивость к действию шума и относительная простота экспериментальной реализации. Эффективность непрерывной запаздывающей обратной связи была исследована численно и продемонстрирована экспериментально в разнообразных электронных устройствах [5–7], в динамике химических реакций [8, 9], в явлении ферромагнитного резонанса [10] и лазерах [11]. Вместе с тем

эта методика недостаточно исследована аналитически, не до конца выяснены физические механизмы, приводящие к стабилизации неустойчивых орбит. В ряде случаев полученные результаты трактуются скорее на основе интуитивных полуфеноменологических соображений, чем математического анализа устойчивости. Восполнение этого пробела является целью настоящей работы.

Для рассмотрения была выбрана модель лазера класса В с модулированными потерями [12]. Хорошо известно, что лазер с модуляцией потерь демонстрирует большое разнообразие нелинейных явлений, включая каскад бифуркаций удвоения периода, ведущий к хаосу [12–16]. Трудность получения аналитических результатов для контроля хаоса в такой модели вызвана в основном относительной математической сложностью задачи, которая требует обобщения теории Флоке для функциональных уравнений. Тем не менее первые результаты, полученные нами ранее [17, 18], оказались в хорошем согласии с экспериментальными данными по стабилизации T -периодического цикла (T — период модуляции потерь) в модулируемом CO_2 -лазере с непрерывной запаздывающей обратной связью [11]. Параллельно была опубликована работа [19], содержащая теоретическое исследование, выполненное для первой бифуркации удвоения периода в рамках многомасштабного метода возмущений. Этот метод позволил получить уравнения для медленно меняющихся амплитуды и фазы приближенного решения в окрестности параметрического резонанса (отношение частоты модуляции к релаксационной частоте $\simeq 2$). На основе областей существования $2T$ -периодического решения был сделан вывод о сдвиге бифуркационной диаграммы.

В данной работе с целью выяснения возможных бифуркаций и эффектов, вносимых непрерывной запаздывающей обратной связью, мы проводим дальнейшее развитие подхода, использованного нами ранее [17, 18], т. е. прямого анализа устойчивости T -периодического режима в системе с запаздыванием в рамках теории Флоке. Само T -периодическое решение может быть найдено с помощью одного из известных асимптотических методов для нелинейных лазерных уравнений [14, 15]. Основное внимание уделяется получению аналитических оценок для границ бифуркаций седло–узел, Андронова–Хопфа и удвоения периода и выяснению физических механизмов, стоящих за каждой из бифуркаций. Рассматривается влияние технической задержки в цепи обратной связи, неизбежной в реальных экспериментальных устройствах, на процесс стабилизации. Показано, что при определенных параметрах могут возникать дополнительные неустойчивости, индуцированные обратной связью.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Математическая модель рассматриваемого лазера имеет вид [14, 15]

$$\begin{aligned} \dot{u} &= vu [y - 1 - \lambda \cos(\omega t + f) - K(t)], \\ \dot{y} &= y_0 - (1 + u)y, \end{aligned} \quad (1)$$

где u и y — безразмерные интенсивность генерируемого поля и инверсия населенностей; v — отношение скорости затухания излучения в резонаторе к скорости релаксации инверсии населенностей; y_0 — параметр накачки; λ и ω — амплитуда и частота периодической модуляции потерь. Член K описывает действие непрерывной запаздывающей обратной связи на процесс генерации:

$$K(t) = \alpha(u_\tau - u_{\tau+T}). \tag{2}$$

Здесь глубина обратной связи $\alpha \ll 1$, величины u_τ и $u_{\tau+T}$ представляют собой интенсивности в запаздывающие моменты времени $t - \tau$ и $t - (\tau + T)$. В отличие от [3, 11] мы вводим здесь дополнительную задержку τ , которая может быть сравнима с T и связана с конечностью времени прохождения сигнала по цепи обратной связи. Как известно, такой тип обратной связи не оказывает влияния на неустойчивые орбиты периода T и не требует их предварительного знания. Мы предполагаем, как и в [3], сигнал $K(t)$ ограниченным, для того чтобы обратная связь влияла только на устойчивость T -периодической орбиты в некоторой ее малой окрестности и не вносила существенных изменений в динамику системы вдали от нее.

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

Ниже будем использовать логарифмическую замену переменных, при которой решения системы (1), соответствующие пиковому поведению лазера, выглядят сглаженными для любых значений параметра v . Это облегчает нахождение как аналитического, так и численного решений задачи [14]. Лазерные уравнения, переписанные в этих переменных, как известно, являются уравнениями нелинейного осциллятора с потенциалом Тоуи, управляемого внешней периодической силой и параметрически, и могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{x}(\epsilon_1 + \epsilon_2 e^x) + \dot{R} + [1 + \lambda \cos(mt')] e^x + R(\epsilon_1 + \epsilon_2 e^x) = \\ = 1 + \lambda \epsilon_2^{-1} m \sin(mt') - \lambda \epsilon_1 \epsilon_2^{-1} \cos(mt'), \end{aligned} \tag{3}$$

где $R = \alpha \epsilon_1^{-1} [\exp(x_{\tau'}) - \exp(x_{\tau'+T'})]$ описывает влияние обратной связи и

$$\begin{aligned} x = \ln \frac{u}{y_0 - 1}, \quad m = w \epsilon_1, \quad t' = \frac{t}{\epsilon_1}, \quad \epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{v(y_0 - 1)}}, \\ \epsilon_2 = \sqrt{\frac{y_0 - 1}{v}}, \quad T' = \frac{T}{\epsilon_1}, \quad \tau' = \frac{\tau}{\epsilon_1}. \end{aligned}$$

Здесь нормированная частота модуляции m выражена в единицах частоты релаксационных осцилляций ϵ_1^{-1} . В последующих уравнениях для упрощения записи все штрихи будут опущены.

В отличие от уравнений (1) метод гармонического баланса, примененный к (3), дает достаточно хорошее приближение к точному T -периодическому решению при использовании гармоник нулевого и первого порядков. Например, преобразование Фурье показывает, что даже вблизи основного резонанса при условии $m > 1$ разница между пробной функцией для T -периодического решения, взятой в форме $x_0 = c + a \cos(mt) + d \sin(mt)$, и точным решением, найденным численно, составляет около нескольких процентов [14]. Значения c и $y = a/r$ ($r^2 = a^2 + d^2$) могут быть определены из следующих уравнений:

$$e^c [I_0(r) + \lambda y I_1(r)] = 1,$$

$$\frac{(c_0 + c_1 y)^2 (1 - y^2)}{(c_2 + c_3 y + c_4 y^2)^2} + \frac{d_1 + d_2 y}{d_3 + d_4 y} - d_5 \left[\frac{(c_0 + c_1 y) (1 - y^2)}{c_2 + c_3 y + c_4 y^2} - d_6 y \right] = 0, \quad d_1 = \frac{2I_1(r)}{r}, \quad (4)$$

$$d_2 = \frac{2\lambda}{r} \left[I_0(r) - \frac{I_1(r)}{r} \right], \quad d_3 = I_0(r), \quad d_4 = \lambda I_1(r), \quad d_5 = \frac{\lambda}{\epsilon_2}, \quad d_6 = \epsilon_1,$$

$$c_0 = \frac{d_3 \lambda}{r \epsilon_2} - \frac{\lambda d_1}{r \epsilon_1}, \quad c_1 = \frac{d_4 \lambda}{r \epsilon_2}, \quad c_2 = d_3 + \frac{d_1 \epsilon_2}{\epsilon_1}, \quad c_3 = d_4 + \frac{d_3 \lambda}{r \epsilon_1 \epsilon_2}, \quad c_4 = \frac{d_4 \lambda}{r \epsilon_1 \epsilon_2},$$

где $I_n(r)$ — модифицированная функция Бесселя, возникающая при разложении

$$\exp(r \cos t) = I_0(r) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(r) \cos(kt).$$

Для анализа устойчивости этого решения запишем линеаризованное уравнение для отклонения $\xi(t) = x(t) - x_0(t)$:

$$\ddot{\xi} + f(t) \dot{\xi} + g(t) \xi + \alpha \left[h(t) (\dot{\xi}_\tau - \dot{\xi}_{\tau+T}) + q(t) (\xi_\tau - \xi_{\tau+T}) \right] = 0, \quad (5)$$

где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $q(t)$ — T -периодические функции времени, которые могут быть выражены через найденное решение $x_0(t)$ следующим образом:

$$f(t) = \epsilon_1 + \epsilon_2 e^{x_0}, \quad g(t) = [\epsilon_2 x_0 + 1 + \lambda \cos(mt)] e^{x_0}, \quad h(t) = \epsilon_1^{-1} e^{x_0^0},$$

$$q(t) = \epsilon_1^{-1} e^{x_0^0} (\dot{x}_\tau^0 + \epsilon_2 e^{x_0} + \epsilon_1).$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения: $x_\tau^0 = x_0(t - \tau)$, $\xi_\tau = \xi(\tau)$, $\xi_{\tau+T} = \xi(\tau + T)$.

Вначале рассмотрим линейный анализ устойчивости системы (1), когда глубина модуляции равна нулю ($\lambda = 0$). В этом предельном случае уравнение (5) сводится к следующему выражению:

$$\ddot{\xi} + \delta \dot{\xi} + \xi + b \left[(\dot{\xi}_\tau - \dot{\xi}_{\tau+T}) + \delta (\xi_\tau - \xi_{\tau+T}) \right] = 0, \quad (6)$$

где $b = \alpha/\epsilon_1$, $\delta = \epsilon_1 + \epsilon_2$ — константа затухания малых колебаний невозмущенного осциллятора Тоды (3) ($\lambda = 0$, $b = 0$). Если решение выбрать в виде $\xi(t) = e^{\mu t}$, то можно получить характеристический квазиполином для нахождения показателя μ :

$$\mu^2 + \delta \mu + 1 + b(\mu + \delta) (e^{-\mu \tau} - e^{-\mu(\tau+T)}) = 0.$$

Бифуркационная граница (или область неустойчивости) находится из условия $\text{Re } \mu = 0$ и имеет вид, аналогичный случаю обычной отрицательной обратной связи, сигнал которой пропорционален лишь одному значению интенсивности в запаздывающий момент времени [20]:

$$\begin{aligned} -\chi^2 + 1 + b(\delta C + \chi S) &= 0, \\ \delta \chi + b(-\delta S + \chi C) &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

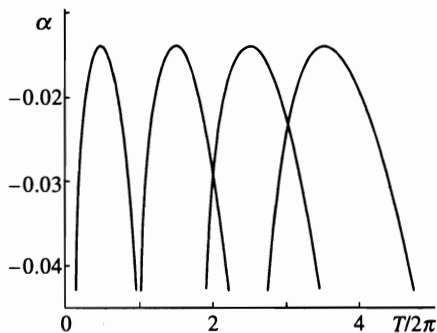


Рис. 1. Границы областей неустойчивости на плоскости (α, T) в случае отсутствия модуляции ($\lambda = 0$). Параметры: $v = 70, y_0 = 2$

где $\chi = \text{Im } \mu$ — частота пульсаций на бифуркационной границе,

$$C = \cos(\chi\tau) - \cos[\chi(\tau + T)], \quad S = \sin(\chi\tau) - \sin[\chi(\tau + T)].$$

Эти уравнения могут быть легко решены при $\tau = 0$. Разрешая линейную систему (7) относительно $\sin(\chi T)$ и $\cos(\chi T)$, возводя в квадрат и суммируя полученные выражения, приходим к следующему соотношению:

$$b = -\frac{1}{2\delta} [1 - \chi^2 (2 - \delta^2) + \chi^4],$$

откуда следует

$$\chi_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (2 - \delta^2 \pm \sqrt{D}). \tag{8}$$

Для существования неустойчивости значение дискриминанта D должно быть положительным:

$$D = -\delta^2 (4 - \delta^2) + 8b\delta > 0.$$

Тогда

$$b < b^* = -\frac{\delta}{2} \left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right),$$

где b^* — пороговое значение b для существования бифуркации Андронова–Хопфа. Соответствующее значение $\chi^* = 1 - \delta^2/2$. Поскольку при типичных параметрах лазера класса В величина $\delta \ll 1$, частота χ неустойчивого решения вблизи порога близка к резонансной релаксационной частоте, равной единице в данной нормировке.

Бифуркационное значение T определяется выражением

$$T = \frac{1}{\chi} \left\{ \arctg \frac{-2\delta\chi [1 - (\delta^2 + \chi^2)]}{\chi^2 [1 - (\delta^2 + \chi^2)] - \delta^2} + 2\pi n \right\}. \tag{9}$$

Значение арктангенса выбирается в соответствии со знаком функции $\sin(\chi T)$, которая пропорциональна $\delta^2 + \chi^2 - 1$ при $\chi > 0$. Бифуркационные кривые, определяемые из (8), (9), показаны на рис. 1. При малых δ пороги неустойчивостей (максимумы кривых при $b = b^*$) возникают при следующих значениях задержки T :

$$T^* \approx -\delta + 2\pi \left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (10)$$

Соответствующие частоты обратной связи $2\pi/T^*$, вызывающие неустойчивость на релаксационной частоте, близки к $2/(2n + 1)$. Следовательно, при данном соотношении частот обратной связи и релаксационной частоты происходит возбуждение автоколебаний, если глубина обратной связи — отрицательная величина, бóльшая по модулю бифуркационного значения $|b^*|$. Интересно отметить, что при таких же значениях частоты внешней модуляции наблюдаются области удвоения периода, соответствующие нечетным зонам Матье [14, 15]. В дальнейшем будет показано, что действительно при таком соотношении частот система может дестабилизироваться (или стабилизироваться — в зависимости от знака глубины обратной связи) и в общем случае $\lambda \neq 0$. Здесь уместно заметить, что физический механизм действия обратной связи Пирагаса, как это следует из приведенного выше анализа и рис. 1, заключается во внесении в систему эффективной частотно-селективной диссипации. Причем, чтобы оптимально возбудить (или подавить) релаксационные колебания с периодом 2π вблизи стационарного решения, запаздывание в цепи обратной связи должно выбираться согласно условию (10), в частности, например, порядка π .

Вернемся к случаю с ненулевой глубиной модуляции λ .

Как известно из теории линейных запаздывающих дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, решение уравнения (5) может быть представлено в виде [21]

$$\xi = \sum_k^\infty \exp(\mu_k mt) \sum_{j=0}^{n_k-1} C_{kj} t^j \varphi_{kj}(t),$$

где величины μ_k — характеристические показатели, n_k — кратность показателя μ_k , $\varphi_{kj}(t)$ — T -периодические функции и C_{kj} — константы. Предполагая невырожденный случай ($n_k = 1$) и подставляя частное решение $\xi_k = \exp(\mu_k mt)\varphi_{k0}$ в (5), получаем уравнение для каждого φ_{k0} (ниже мы опускаем индексы):

$$\ddot{\varphi} + (2\mu t + f)\dot{\varphi} + [(\mu t)^2 + \mu t f + g]\varphi + \beta[h\dot{\varphi}_\tau + (\mu t h + q)\varphi_\tau] = 0, \quad (11)$$

где $\beta = \alpha \{\exp(-\mu t \tau) - \exp(-\mu t (\tau + T))\}$. Можно сказать, что уравнение (11) является уравнением для нахождения неизвестных функций $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $q(t)$ и, следовательно, параметров системы (1), если характеристический показатель μ уравнения (5) фиксирован при условии T -периодичности функции φ ; при этом верно и обратное: из (11) можно определить μ при фиксированных параметрах системы и, следовательно, фиксированных перечисленных выше функциях при том же условии для функции φ .

Используя разложение в ряд Фурье функции φ ($\varphi = \sum_k^\infty \varphi_k e^{imkt}$), как и в обычной теории Флоке, можно получить следующее характеристическое уравнение для показателя μ :

$$\det A_{nl} = 0, \quad (12)$$

где

$$A_{nl} = -\delta_{nl} (ml - i\mu t)^2 + W(l, n - l), \quad \delta_{nl} = \begin{cases} 1, & n = l, \\ 0, & n \neq l, \end{cases}$$

$W(l, n)$ — фурье-компоненты функции

$$W(t | l) = \mu m f(t) + g(t) + iml f(t) + \beta [\mu m h(t) + q(t) + imlh(t)] e^{-iml\tau},$$

$$W(t | l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(l, k) e^{imkt}.$$

Коэффициенты $W(l, k)$ обладают следующим свойством: $W(l, k)^* = W(-l, -k)|_{\mu=\mu^*}$.

Уравнение (12) аналогично бесконечному детерминанту Хилла в случае отсутствия обратной связи. С другой стороны, оно является аналогией квазиполинома, который обладает бесконечным числом корней в комплексной плоскости, в рассмотренном выше частном случае лазера без модуляции потерь. Уравнение (12) может быть сведено к детерминанту Хилла и в общем случае, если техническое запаздывание $\tau = 0$. Как известно [22], в уравнении Хилла только часть детерминанта, соответствующая максимальным гармоникам, содержит основную информацию о бифуркационной границе. Из общих соображений непрерывности мы полагаем, что это остается справедливым и при $\tau \neq 0$. Ниже справедливость сделанного предположения будет подтверждена с помощью численного моделирования.

Рассмотрим следующие случаи потери устойчивости T -циклом: бифуркации седло-узел, удвоения периода и Андронова-Хопфа.

В случае бифуркации седло-узел один чисто действительный мультипликатор $M = e^{2\pi\mu}$ пересекает единичную окружность в точке $M = 1$. Полагая для реализации этого значения мультипликатора показатель $\mu = 0$, получим, что $\beta = 0$ и уравнения (11), (12) для определения бифуркационной границы совпадают с уравнениями в случае отсутствия обратной связи. Следовательно, бифуркация седло-узел не изменяется под влиянием обратной связи Пирагаса. (Детальное рассмотрение этой бифуркации на основе квазиконсервативного подхода Ляпунова проводилось в [14].) По этой же причине непрерывная запаздывающая обратная связь не может привести к появлению новой границы бифуркации седло-узел (или любой другой бифуркации, которая связана с прохождением действительного мультипликатора через единицу, например, бифуркации нарушения симметрии цикла). Таким образом, стабилизация неустойчивого T -цикла с мультипликатором, большим единицы, не может быть реализована в принципе в рамках техники непрерывной запаздывающей обратной связи.

Для определения бифуркации удвоения периода показатель μ может быть представлен в форме: $\mu = \zeta + i/2$, где ζ — действительная величина. На бифуркационной границе $\zeta = 0$, и для ее определения можно использовать уравнение (12), подставляя в него $\mu = i/2$. Однако можно предположить, что μ — действительно и равно ζ , но в качестве φ взять $2T$ -периодическую функцию вместо T -периодической: $\varphi(t + 2T) = \varphi(t)$ и $\varphi(t + T) = -\varphi(t)$. Тогда в уравнении (11)

$$\beta = \alpha [e^{-\zeta m\tau} + e^{-\zeta m(\tau+T)}],$$

и для показателя μ можно получить уравнение, аналогичное (12), используя разложения вида

$$\varphi = \sum_k^{\infty} \varphi_{2k+1} \exp \left[im \left(k + \frac{1}{2} \right) t \right].$$

Поскольку вблизи бифуркационной границы в этой сумме максимальна первая гармоника [22], новое уравнение типа (12) может быть сведено к укороченному уравнению для показателя Флоке ζ :

$$\left| - (m/2 - i\zeta m)^2 + W_0 \right|^2 = |W_1|^2, \quad (13)$$

где $W_{0,1}$ — первые фурье-компоненты функции

$$W(t) = W\left(t \mid l = \frac{1}{2}\right) = \zeta m f(t) + g(t) + \frac{im}{2} f(t) + \beta \left[\zeta m h(t) + q(t) + \frac{im}{2} h(t) \right] e^{-im\tau/2}.$$

Бифуркационная граница определяется из (13), когда $\zeta = 0$.

Если $\tau = 0$, то эта граница может быть также определена стандартным методом [22] из следующего обыкновенного дифференциального уравнения, полученного из уравнения (11) с запаздыванием при переопределенной выше величине β :

$$\ddot{\varphi} + (f + 2\alpha h)\dot{\varphi} + (g + 2\alpha q)\varphi = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14), как и (11), есть уравнение для нахождения параметров системы, в том числе бифуркационных, при условии, что функция φ является $2T$ -периодичной. Уравнение (14) имеет два линейно независимых решения: φ_1 и $e^{-\delta t}\varphi_2$, где $\varphi_{1,2}$ — $2T$ -периодические функции, δ — постоянный член в фурье-разложении функции $F(t) = f(t) + 2\alpha h(t)$ и определяет константу затухания, равную сумме двух ляпуновских показателей ($\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = -\delta$) с обратным знаком. Эти показатели при достаточно малых α являются максимальными в исходной системе (1), которая, как и любая система с запаздыванием, обладает бесконечным числом характеристических показателей.

С помощью замены переменных: $\varphi = \exp\left\{-(1/2) \int F(\tau') d\tau'\right\} \eta$ приводим (14) к уравнению Хилла:

$$\ddot{\eta} + G(t)\eta = 0,$$

где

$$G(t) = [g(t) + 2\alpha q(t)] - \frac{1}{2} [f(t) + 2\alpha h(t)]_t' - \frac{1}{4} [f(t) + 2\alpha h(t)]^2.$$

Если ввести новое нормированное время $\tau' = mt$, уравнение принимает канонический вид:

$$\ddot{\eta} + \frac{1}{m^2} \left[\theta_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \cos(k\tau' - \epsilon_k) \right] \eta = 0,$$

где θ_k — фурье-компоненты функции $G(t)$; величина $\omega = \sqrt{\theta_0}/m \approx 1/m$ — частота осцилляций невозмущенной системы. Следуя методу Уиттекера для n -й зоны неустойчивости, в первом приближении решение может быть взято в виде:

$$\eta = e^{\nu\tau'} \sin\left(\frac{n}{2}\tau' + \sigma\right).$$

Здесь ν — показатель Флоке для уравнения Хилла, принимающий вещественные или чисто мнимые значения, σ — константа. Будем рассматривать лишь нечетные зоны,

так как необходимое требование $2T$ -периодичности выполняется только на границе этих зон. Отметим, что нечетные зоны ($n = 2l + 1$) определяются значениями частоты модуляции $m = 2/n$, близкими к частотам $2\pi/T^*$ положительной ($\alpha < 0$) обратной связи в системе без модуляции ($\lambda = 0$), при которых возможна бифуркация Андронова-Хопфа. Будем интересоваться главным образом основной (первой) зоной неустойчивости. Показатели Флоке могут быть найдены из уравнения

$$\nu^2 = - \left[\frac{\theta_0}{m^2} + \left(\frac{n}{2} \right)^2 \right] + \sqrt{n^2 \frac{\theta_0}{m^2} + \frac{\theta_n^2}{m^4}}.$$

Условие устойчивости определяются следующим неравенством:

$$\operatorname{Re} \kappa = \operatorname{Re} (-\delta/2 \pm \nu) < 0, \quad (15)$$

которое приводится к виду

$$\delta > 0, \quad \left[\theta_0 - \left(\frac{mn}{2} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{\delta}{2} \right)^2 \left[\theta_0 + \left(\frac{mn}{2} \right)^2 \right] + \left(\frac{\delta}{2} \right)^4 > \theta_n^2. \quad (16)$$

Выражения (15), (16) определяют бифуркационную границу, которая практически совпадает с найденной из более общего уравнения (13). Однако неравенства (15), (16) более удобны для анализа и позволяют сделать ряд простых выводов.

Рассмотрим первую зону ($n = 1$). Поведение системы вблизи неустойчивой орбиты в бифуркационной точке в основном определяется двумя максимальными показателями Ляпунова, которые дают следующую константу затухания:

$$\delta = \epsilon_1 + (\epsilon_2 + 2\alpha/\epsilon_1) e^c I_0(r).$$

Рассматривая глубину обратной связи α как переменную второго порядка малости по отношению к параметру $\epsilon_{1,2} \sim \epsilon$, мы можем заключить, что вблизи порога неустойчивости при $m - 2 = \Delta \ll 1$ амплитуда r цикла мала. Тогда обратная связь влияет в основном лишь на константу затухания ($\delta_\Delta = \delta(\alpha) - \delta(\alpha = 0) \sim \alpha/\epsilon \sim \epsilon \sim \delta$, $G_\Delta \sim \alpha \sim \epsilon^2 \ll G$). Изменение коэффициентов θ_0, θ_1 , как и фурье-компонент функции G (и следовательно, показателей ν), сопровождающее изменение α , также мало. При таких ограничениях на параметры системы может быть получено следующее соотношение для амплитуды цикла [14]:

$$r \approx \frac{\lambda m}{\epsilon_2 (1 - m^2)}.$$

При этом

$$\delta = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{2\alpha}{\epsilon_1}, \quad \theta_0 \approx 1 - \left(\frac{\delta}{2} \right)^2, \quad \theta_1^2 \approx \frac{r^2}{4}.$$

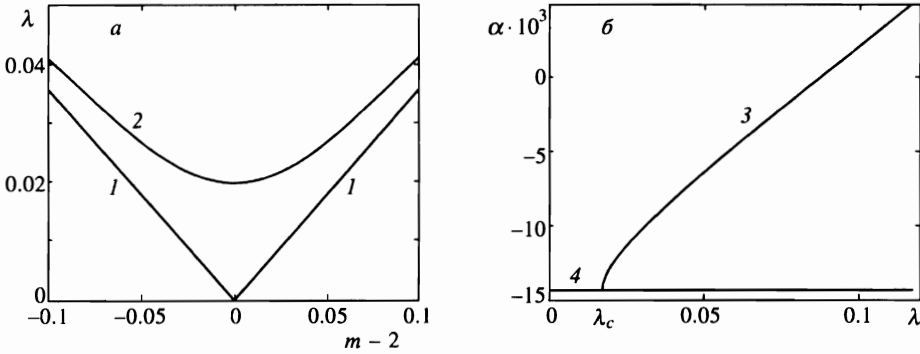


Рис. 2. Бифуркационные границы на плоскостях (λ, m) и (α, λ) в случае малых отстроек $\Delta = m - 2$ и дополнительной задержки $\tau = 0$. *а)* Кривая 1 — граница виртуальной бифуркации Андронова-Хопфа, кривая 2 — граница бифуркации удвоения периода при $\alpha = -0.011$. Область между этими кривыми является областью классического сжатия. *б)* Кривые 3 и 4 — соответственно границы бифуркаций удвоения периода при $\Delta = 0.05$ и Андронова-Хопфа, λ_c — точка вырожденной бифуркации Андронова-Хопфа

Тогда бифуркационная граница удвоения периода $\nu = \delta/2$, определенная неравенством (15), описывается уравнением

$$\left(\frac{\lambda}{3\epsilon_2}\right)^2 = \Delta^2 + \delta^2, \tag{17}$$

которое совпадает с полученным в [19]. Эта кривая показана на рис. 2*а, б*.

При $\tau \neq 0$ бифуркационная граница может быть получена только непосредственно из (13) в виде, аналогичном (17), при тех же предположениях:

$$\left(\frac{\lambda}{3\epsilon_2}\right)^2 = \left(\Delta - \frac{2\alpha}{\epsilon_1} \sin \frac{m\tau}{2}\right)^2 + \left(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{2\alpha}{\epsilon_1} \cos \frac{m\tau}{2}\right)^2. \tag{18}$$

Из сравнения (18) и (17) можно сделать вывод, что при наличии дополнительной задержки τ роль затухания в системе играет величина $\epsilon_1 + \epsilon_2 + (2\alpha/\epsilon_1) \cos(m\tau/2)$, зависящая периодически от τ .

Отрицательная обратная связь ($\alpha > 0$) увеличивает δ , что приводит к подавлению бифуркации удвоения периода и стабилизации T -цикла, поскольку, как видно из (17) при малом Δ , порог неустойчивости пропорционален диссипации в системе:

$$\lambda_{th} = 3\epsilon_2\delta \left(1 + \frac{\Delta^2}{2\delta^2}\right).$$

Результаты расчетов с использованием общего уравнения (13), представленные на рис. 3*а*, показывают, что этот вывод, сделанный вблизи резонанса ($m \approx 2$), справедлив в более широкой области. Исключением являются значения $m \gg 2$. Так, при $m > 2.4$ порог неустойчивости по λ , наоборот, несколько понижается, т. е. отрицательная обратная связь может приводить к дестабилизации через бифуркацию удвоения периода.

Рисунок 3*а* показывает также бифуркационные границы, полученные численным интегрированием системы (1). Можно видеть, что кривые, вычисленные аналитически

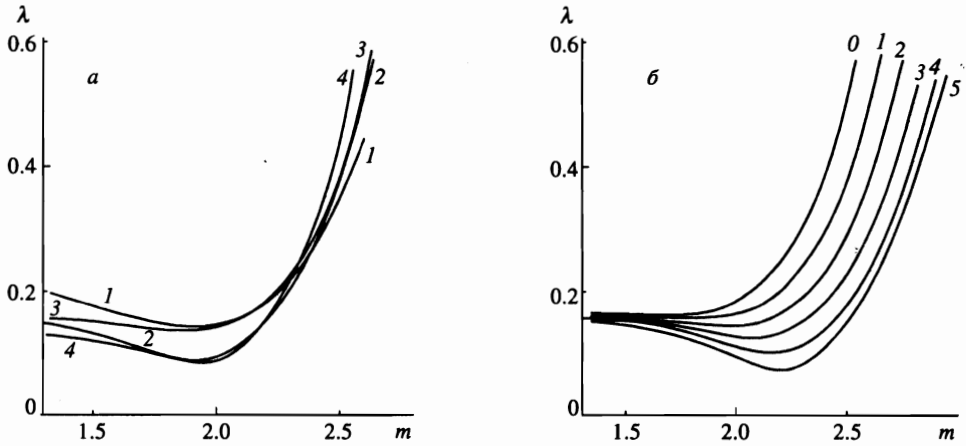


Рис. 3. Границы бифуркации удвоения периода на плоскости (λ, m) : а — $\alpha = 0$ (кривые 2, 4); $\alpha = 0.01, \tau/T = 0.1$ (кривые 1, 3); кривые 1, 2 — численные результаты, полученные при интегрировании системы (1), кривые 3, 4 получены на основе аналитических вычислений по формуле (13); б — $\alpha = 1/70, \tau/T = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ соответственно для кривых 0, 1, 2, 3, 4, 5

и численно, хорошо совпадают при $1.6 \leq m \leq 2.4$ и описывают правильную тенденцию сдвига границы при $m < 1.6$ и $m > 2.4$. Таким образом, аналитические результаты остаются верными в достаточно широком интервале изменения m .

Смещение бифуркационной границы зависит также от задержки τ (рис. 3б), которая определяет фазовый сдвиг пульсаций сигнала обратной связи относительно пульсаций лазера и, следовательно, влияет на эффективную глубину обратной связи $\alpha' = \alpha \cos(m\tau/2)$, изменяя полную диссипацию в системе. Так, изменение τ на величину T эквивалентно изменению знака у α' . Как следует из уравнений (11)–(13) и (18), значения бифуркационных параметров $2T$ -периодичны по τ . Вблизи $m \approx 2$ повышение порога неустойчивости оптимально при $\tau \approx 0$.

Положительная обратная связь ($\alpha < 0$), наоборот, уменьшает трение в системе и, следовательно, ведет к понижению порога удвоения периода по λ даже вблизи резонанса. В частности, из (17) следует, что при $m = 2$ ($\Delta = 0$) порог бифуркации удвоения периода подходит к нулю при $\alpha_0 = -[(\epsilon_1 + \epsilon_2)\epsilon_2]/2$ ($\delta = 0$). При конечных отстройках от точного резонансного условия ($m = 2$) минимальный порог также определяется требованием $\delta = 0$ и равен $\lambda_c = 3\epsilon_2 |\Delta|$ (кривая 1 на рис. 2а, пересечение кривых 3 и 4 на рис. 2б). На этой границе $\nu = 0$.

Отметим, что кривая 1 определяется равенством $\nu = 0$ при любой величине δ и зазор между ней и границей бифуркации удвоения периода $\nu = \delta/2$ является областью классического сжатия (или анизотропии фазового пространства) [23, 24]. Условие $\nu = 0$ определяет кривую, которая может быть названа границей виртуальной бифуркации Андронова–Хопфа [25], поскольку выше нее мультипликаторы действительны, а ниже — становятся комплексно сопряженными. При уменьшении глубины модуляции до нуля они виртуально двигаются вблизи границы единичной окружности, не пересекая ее.

В области, где величина ν' становится чисто мнимой, виртуальная бифуркация

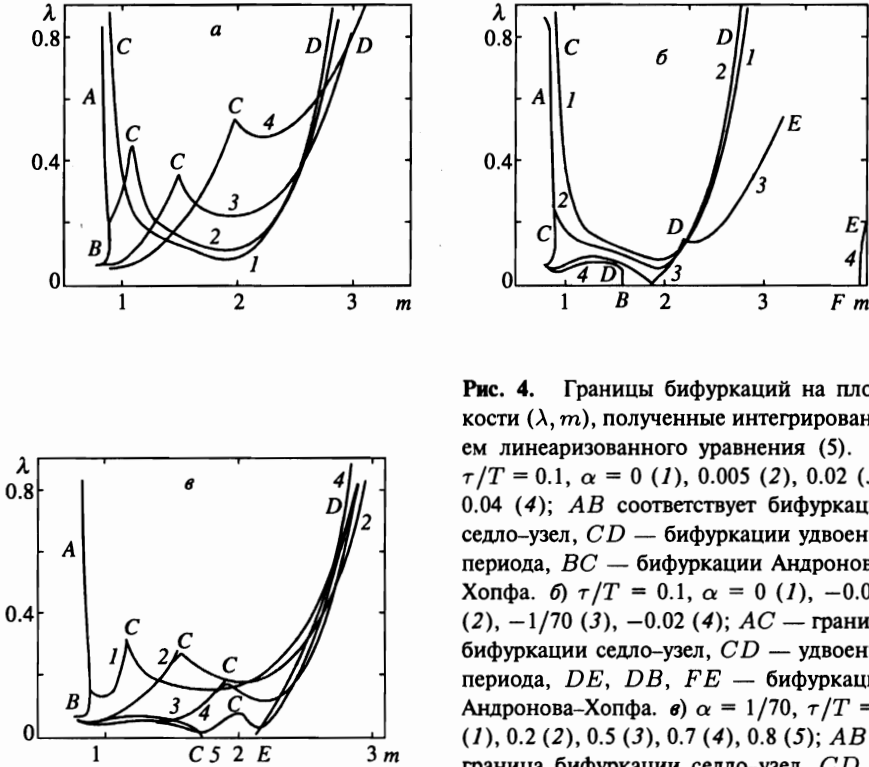


Рис. 4. Границы бифуркаций на плоскости (λ, m) , полученные интегрированием линеаризованного уравнения (5). а) $\tau/T = 0.1, \alpha = 0$ (1), 0.005 (2), 0.02 (3), 0.04 (4); AB соответствует бифуркации седло-узел, CD — бифуркации удвоения периода, BC — бифуркации Андронова-Хопфа. б) $\tau/T = 0.1, \alpha = 0$ (1), -0.005 (2), $-1/70$ (3), -0.02 (4); AC — граница бифуркации седло-узел, CD — удвоения периода, DE, DB, FE — бифуркации Андронова-Хопфа. в) $\alpha = 1/70, \tau/T = 0$ (1), 0.2 (2), 0.5 (3), 0.7 (4), 0.8 (5); AB — граница бифуркации седло-узел, CD — удвоения периода, BC, ED — бифуркации Андронова-Хопфа

Андронова-Хопфа превращается в реальную, когда положительная обратная связь компенсирует «трение» в системе. Поэтому при $\delta \leq 0$ для $\lambda < \lambda_c$ система неустойчива только из-за бифуркации Андронова-Хопфа, порог которой по α в первом приближении не зависит от λ и Δ в этой области и равен $\alpha_{Hopf} \approx \alpha_0$. Это значение равно минимальному порогу по α бифуркации Андронова-Хопфа в лазере без модуляции (уравнения (8), (9), $\alpha^* = \epsilon_1 b^*$). Напомним, что частота возбуждающихся пульсаций также совпадает с частотой Андронова-Хопфа при $\lambda = 0$. По-видимому, природа неустойчивости в этих случаях одинакова и связана с раскачкой релаксационных колебаний при определенном соотношении их частот и частот обратной связи и модуляции потерь. Если $\delta = 0$, то при $\lambda = \lambda_c$ мы имеем случай вырожденной бифуркации Андронова-Хопфа, когда она совпадает с бифуркацией удвоения периода. Выше этой границы T -периодическое решение неустойчиво к возмущениям с периодом $2T$, ниже — к возмущениям с частотой Андронова-Хопфа. При $\delta \geq 0$ T -цикл устойчив в окрестности $\lambda \leq \lambda_c$. Естественно предположить, что бифуркационная граница с нулевым затуханием существует и вдали от $m \approx 2$. В этом случае величина α_{Hopf} , определенная из условия $\delta = 0$, зависит также от m и λ и может, в принципе, принимать и положительные значения. Более того, в силу сложной зависимости $\delta(\lambda, m)$ вдали от резонанса условие $\delta = 0$ может быть неоднозначно по λ и m .

Полученные выше закономерности подтверждаются численным интегрированием

ем системы, линеаризованной вблизи T -периодического решения x_0 , и приведены на рис. 4. Кривые AB (рис. 4а, в) и AC (рис. 4б) являются границами бифуркации седло-узел, которая не зависит от α . Вследствие того что начальное приближение первой гармоникой точного T -периодического решения x_0 в области резонанса при $m \leq 1$ является несколько грубым, эта граница слегка сдвинута по отношению к реальной границе, найденной с помощью прямого интегрирования системы (1). Кривая CD представляет собой границу бифуркации удвоения периода. Ее зависимость от α (рис. 4а $\alpha > 0$, рис. 4б $\alpha < 0$) и τ (рис. 4в) демонстрирует согласие с нашими аналитическими результатами. Когда эта часть кривой касается оси $\lambda = 0$, она становится границей виртуальной бифуркации Андронова-Хопфа вблизи $m \approx 2$ (часть CD кривой 3 на рис. 4б). Оба мультипликатора на этой кривой вблизи минимума близки к -1 . Сдвиг точки касания относительно точного резонанса ($m = 2$) связан с ненулевым значением τ и определяется из (18) величиной $\Delta = (2\alpha/\epsilon_1) \sin(m\tau/2)$. Ниже нее мультипликаторы системы комплексны и устойчивость T -цикла зависит от величины δ . При $|\alpha| > |\alpha_0|$ и $\delta \leq 0$ вблизи $m \approx 2$ (кривая 4 на рис. 4б) T -периодическое решение неустойчиво к бифуркации Андронова-Хопфа в широкой области значений m , ограниченной бифуркационными кривыми DB , FE , где δ меняет знак. При $|\alpha| < |\alpha_0|$, т.е. когда $\delta \geq 0$ вблизи $m \approx 2$ (кривая 3 на рис. 4б и кривые 2-4 на рис. 4в), неустойчивость Андронова-Хопфа появляется только вдали от резонанса в областях, ограниченных кривыми BC (рис. 4а) и DE (рис. 4б). Например, при $\alpha > 0$ она имеет место слева от бифуркационной кривой удвоения периода (рис. 4а). При движении вдоль кривой BC к точке C (точка бифуркации удвоения периода) мультипликаторы стремятся к -1 . При приближении к точке B (бифуркация седло-узел) мультипликаторы стремятся к 1. При $\alpha < 0$ неустойчивость Андронова-Хопфа существует справа от бифуркации удвоения периода (рис. 4б).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели возможность контроля хаоса с помощью непрерывной запаздывающей обратной связи для лазеров класса В с модуляцией потерь. С этой целью была развита теория, вытекающая из анализа устойчивости в общей форме. Сделаны аналитические оценки границ бифуркаций седло-узел, удвоения периода и Андронова-Хопфа, что дает информацию о тенденциях неустойчивостей в системе при изменении параметров.

В результате было выяснено, что схема с обратной связью Пирагаса не изменяет устойчивости циклов с действительными мультипликаторами, большими единицы, что означает, например, независимость от такой обратной связи границ бифуркаций седло-узел и нарушения симметрии.

Физический механизм подавления бифуркации удвоения периода связан с увеличением полной диссипации в системе за счет эффекта обратной связи. При определенных параметрах обратной связи диссипация в системе может, наоборот, уменьшаться, что приводит к возбуждению неустойчивости.

В данной работе аналитически рассмотрено влияние неизбежной технической задержки в схеме непрерывной обратной связи. Это влияние становится особенно важным для быстрых систем, где задержка может быть сравнима или даже больше основного периода осцилляций, которые необходимо стабилизировать, как, например, в полупро-

водникового лазере ($\tau \simeq 10$ нс, $T \simeq 1$ нс). В этих случаях аналитические результаты наиболее полезны, поскольку прямой численный счет занимает много компьютерного времени и памяти. Техническая задержка приводит к изменению порога бифуркации удвоения периода с периодом $2T$, что было подтверждено недавно в независимых численных исследованиях [26, 27].

Бифуркация Андронова–Хопфа появляется в системе, когда диссипация компенсируется обратной связью. Вблизи резонанса ($m = 2$) эта неустойчивость имеет место при тех же глубинах обратной связи, что и без модуляции потерь, и связана в основном с действием обратной связи, возбуждающей релаксационные осцилляции при определенном соотношении их частоты и частот обратной связи.

Заметим, что наш анализ выполнен с использованием метода гармонического баланса для определения T -периодического решения в его простейшей форме, когда только одна гармоника для логарифма интенсивности принимается в рассмотрение. Этот метод дает хорошие результаты для низших бифуркаций (первые неустойчивости) в области частоты модуляции $m \geq 1.5$, где осцилляции еще достаточно малы. Вблизи резонанса ($m \leq 1$) этот метод менее точен, но все еще дает очень полезное понимание общих тенденций поведения неустойчивостей. Аналитические оценки в этой области могут быть улучшены с использованием либо большего числа гармоник в методе гармонического баланса или с привлечением асимптотического квазиконсервативного подхода Ляпунова для нахождения T -периодического решения [14, 15].

Справедливость приближений, сделанных на стадии решения линеаризованной системы уравнений, для определения бифуркационных границ подтверждается численным интегрированием уравнений (5) и (1).

Исследование, выполненное в данной работе, стало возможным благодаря поддержке Международного научного фонда (грант № MX5000) и Фонда фундаментальных исследований Беларуси (грант № Ф15006).

Литература

1. E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1196 (1990).
2. B. T. Shinbort, *Adv. Phys.* **44**, 73 (1995).
3. K. Pyragas, *Phys. Lett. A* **170**, 421 (1992).
4. J. E. S. Socolar, D. W. Sukov, and D. J. Gauthier, *Phys. Rev. E* **50**, 3245 (1994).
5. K. Pyragas and A. Tamasevicius, *Phys. Lett. A* **180**, 99 (1993).
6. D. J. Gauthier, D. W. Sukov, H. M. Concannon, and J. E. S. Socolar, *Phys. Rev. E* **50**, 2343 (1994).
7. Yu. Yh, K. Kwak, and T. K. Lim, *Phys. Lett. A* **191**, 233 (1994).
8. F. W. Schneider, R. Blittersdorf, A. Forster, T. Hauck, D. Lebender, and J. Muller, *J. Phys. Chem.* **97**, 12244 (1993).
9. A. Lekebusch, A. Forster, and F. W. Schneider, *J. Phys. Chem.* **99**, 681 (1995).
10. P. E. Wigen and D. W. Peterman, *J. Magn. Magn. Mat.* **140**, 2074 (1995).
11. S. Bielawski, D. Derozier, and P. Glorieux, *Phys. Rev. E* **49**, R971 (1994).
12. F. T. Arecchi, R. Meucci, G. P. Piccioni, and J. R. Treducce, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1217 (1982).
13. T. Midsvaine, D. Dangoise, and P. Glorieux, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1989 (1985).
14. А. М. Самсон, С. И. Туровец, Препринт института физики академии наук БССР № 438 (1986); ДАН БССР **31**, 888 (1987).

15. А. М. Самсон, Л. А. Котомцева, Н. А. Лойко, *Автоколебания в лазерах*, Наука и техника, Минск (1990).
16. А. М. Самсон, С. И. Туровец, В. Н. Чижевский, В. В. Чураков, ЖЭТФ **101**, 1177 (1992); V. N. Chizhevsky and S. I. Turovets, Phys. Rev. A **50**, 1840 (1994).
17. N. A. Loiko, A. V. Naumenko, and S. I. Turovets, Conference Digest, NDOS' 95, Rochester (1995), TE 7.
18. N. A. Loiko, A. V. Naumenko, and S. I. Turovets, in *Nonlinear Dynamics in Lasers*, ed. by N. B. Abraham and Ya. I. Khanin, SPIE **2792**, 102 (1996).
19. S. Bielawski, D. Derozier, P. Glorieux, and T. Erneux, J. Europ. Opt. Soc. B **7**, 957 (1995).
20. E. V. Grigoryeva, S. A. Kashchenko, N. A. Loiko, and A. M. Samson, Physica D **59**, 297 (1992).
21. Л. Е. Эльсгольц, С. Б. Норкин, *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, Москва (1971).
22. Т. Хаяси, *Нелинейные колебания в физических системах*, Мир, Москва (1996).
23. V. N. Chizhevsky and S. I. Turovets, Opt. Comm. **102**, 175 (1993).
24. N. P. Pettiaux, P. Mandel, and C. Fabre, in *OSA Proceedings on Nonlinear Dynamics in Optical Systems*, ed. by N. B. Abraham, E. Garmire, and P. Mandel (1990), Vol. 7, p. 576.
25. K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A **32**, 1744 (1985).
26. S. I. Turovets, J. Dellunde, and K. A. Shore, J. Opt. Soc. Amer. B **14**, 200 (1997).
27. J. Dellunde and M. C. Torrent, Appl. Phys. Lett. **68**, 1601 (1996).