

ДВУХУРОВНЕВАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ДИНАМИКА В СИЛЬНОМ ПЕРЕМЕННОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

В. А. Бурдов

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603600, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 24 февраля 1997 г.

Изучена квантовая динамика электрона в двухъямном потенциале под действием периодического по времени сильного негармонического внешнего поля. Проведен расчет квазиэнергетического спектра системы и получено выражение для распределения электронной плотности. Показано, что при выполнении определенных условий, накладываемых на форму возмущения, электронный волновой пакет оказывается как бы «запертым» в пределах одной потенциальной ямы и не может протуннелировать через потенциальный барьер.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы появилось большое количество теоретических и экспериментальных работ по исследованию различных (в том числе и нестационарных) процессов в квантовых ямах и гетероструктурах. В частности, в работах [1–7] был теоретически обнаружен довольно интересный эффект: при действии на электрон, находящийся в симметричной двойной квантовой яме, периодического внешнего поля определенной амплитуды имела место локализация электронной волновой функции в области одной из ям. При этом обсуждались как само явление локализации [1–3, 6, 7], так и возможность низкочастотного дипольного излучения в системе квантовых ям в условиях локализации [4, 5].

Непосредственный расчет волновой функции системы или ее дипольного момента во внешнем переменном поле произвольной амплитуды представляет существенные трудности, поэтому большинство результатов в [1–7] было получено численно, и лишь приближение сильного [2, 6] или быстрого [4, 5] поля позволяло значительно упростить задачу. Кроме того, во всех цитируемых работах, за исключением [7], решение было получено лишь для одного начального условия, отвечающего локализации электрона в яме, что не дает полной и ясной картины данного явления в целом, в частности, остается открытым вопрос об «устойчивости» такого решения.

Заметим также, что во всех упомянутых выше работах были использованы лишь два вида зависимости внешнего поля от времени — синусоидальная [1–6] и симметричная последовательности прямоугольных импульсов [6, 7] (некоторое исключение составляют работы [3], где рассматривалось гармоническое возмущение, промодулированное медленно растущей до момента времени $t = 0$ экспонентой, и [5], где кроме синусоидального воздействия было учтено еще и постоянное внешнее поле).

Предметом данной статьи является изучение квантовой динамики электрона в симметричной структуре двух квантовых ям под действием периодического по времени, но

не обязательно гармонического, сильного внешнего поля частоты ω . Особое внимание будет уделено эффекту локализации электрона в области одной из ям и, в частности, будет показано, что этот эффект не является характерным лишь для определенной — например, синусоидальной — зависимости внешнего поля от времени, а может быть реализован с помощью довольно широкого класса функций, описывающих возмущение гораздо более общего вида (во всяком случае при больших амплитудах). При этом конкретизировать вид потенциальной энергии невозмущенной системы, как это делалось в работах [1–3], также нет необходимости — достаточно ограничиться двухуровневым приближением, считая расстояние между двумя нижними уровнями $E_1 - E_0 = \hbar\Delta$ много меньшим расстояния от этой пары уровней до следующего уровня E_2 .

В процессе вычислений будем предполагать внешнее поле сильным настолько, чтобы величина матричного элемента оператора возмущения V_{01} существенно превышала характерный энергетический размер задачи $\hbar\Delta$. Вместе с тем, необходимо ограничить значения V_{01} сверху, что продиктовано желанием использовать двухуровневое приближение. Объединение этих условий дает

$$\hbar\Delta \ll V_{01} \ll E_2 - E_1.$$

Находясь в рамках, определенных данным неравенством, можно получать аналитические результаты, не прибегая к компьютерному счету.

Хорошо известно, что наиболее удобным способом описания квантовой эволюции системы в периодическом поле является формализм квазиэнергий и квазиэнергетических волновых функций [8–10]. Однако отыскание значений квазиэнергии представляет собой довольно сложную задачу, нерешаемую в общем виде, даже для двухуровневой системы. Приближение сильного поля делает возможным преодоление этих трудностей и позволяет найти квазиэнергии при любой, совершенно произвольной, зависимости возмущения от времени.

2. ГАМИЛЬТОНОВСКИЙ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Ввиду использования двухуровневого приближения можно было бы искать волновую функцию частицы, находящейся в двухямном потенциале и в потенциале однородного периодического по времени силового поля $-F(t)$, в виде разложения по базису двух стационарных состояний невозмущенной системы $\chi_{0,1}(x)$ с наименьшими энергиями $E_{0,1}$. Ясно, однако, что энергетическое представление вряд ли окажется наиболее удобным, поскольку само понятие энергетических стационарных состояний утрачивает всякий смысл в столь сильных переменных полях. Кроме того, далее нас будет в большей степени интересовать распределение электронной плотности в ямах и возможное туннелирование заряда через разделительный барьер, в то время как динамика заселенностей уровней здесь вообще не будет обсуждаться.

По этой причине, аналогично [4–6], введем новый ортонормированный базис $\Psi_{L,R}(x)$, образованный исходными векторами стационарных состояний, согласно соотношениям

$$\Psi_L(x) = \frac{\chi_0(x) - \chi_1(x)}{\sqrt{2}}, \quad \Psi_R(x) = \frac{\chi_0(x) + \chi_1(x)}{\sqrt{2}}$$

При этом будем предполагать, что симметричная функция $\chi_0(x)$ всегда положительна, а антисимметричная функция $\chi_1(x)$ положительна при $x > 0$. Таким образом введенные базисные функции $\Psi_L(x)$ и $\Psi_R(x)$ практически полностью локализуются в левой и правой ямах соответственно. Волновая функция системы может быть теперь представлена в виде суперпозиции векторов $\Psi_{L,R}(x)$ с некоторыми коэффициентами, зависящими от времени:

$$\Psi(x, \tau) = C_L(\tau) \exp\left(i \int \epsilon(\tau) d\tau\right) \Psi_L(x) + C_R(\tau) \exp\left(-i \int \epsilon(\tau) d\tau\right) \Psi_R(x). \quad (1)$$

Здесь введено безразмерное время $\tau = t\Delta$, а функция $\epsilon(\tau)$ является периодической с безразмерным периодом $T = 2\pi\Delta/\omega$ и определяется отношением матричного элемента возмущения к величине энергии перехода $\hbar\Delta$. Коэффициенты $C_L(\tau)$ и $C_R(\tau)$, в соответствии с условием нормировки волновой функции, будучи возведенными по модулю в квадрат, в сумме дают единицу, причем квадраты модулей этих коэффициентов представляют собой вероятности обнаружения электрона в левой и правой ямах.

Выбирая начало отсчета энергии посередине между уровнями E_0 и E_1 , получим систему уравнений, описывающих временную эволюцию коэффициентов $C_{L,R}(\tau)$:

$$\begin{cases} i \frac{dC_L}{d\tau} = -\frac{C_R}{2} \exp\left(-2i \int \epsilon(\tau) d\tau\right), \\ i \frac{dC_R}{d\tau} = -\frac{C_L}{2} \exp\left(2i \int \epsilon(\tau) d\tau\right). \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку поле предполагается сильным, характерные значения $\epsilon(\tau)$ должны быть много больше единицы.

Представим уравнения (2) в более удобной форме, приняв следующие обозначения:

$$p = 1 - 2|C_R(\tau)|^2, \quad q = \arg\{C_L(\tau)\} - \arg\{C_R(\tau)\},$$

где под символом «arg» понимается фаза комплексного числа. При этом получается замкнутая система уравнений для переменных p и q :

$$\begin{cases} \frac{dp}{d\tau} = \sqrt{1-p^2} \sin\left(q + 2 \int \epsilon(\tau) d\tau\right), \\ \frac{dq}{d\tau} = -\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \cos\left(q + 2 \int \epsilon(\tau) d\tau\right), \end{cases} \quad (3)$$

которая оказывается гамильтоновой, с гамильтонианом

$$H(p, q, \tau) = \sqrt{1-p^2} \cos\left(q + 2 \int \epsilon(\tau) d\tau\right).$$

Следует подчеркнуть, что система гамильтоновых уравнений движения (3) не является полноценным аналогом системы (2) — ее решения не определяют однозначно самих коэффициентов $C_{L,R}(\tau)$ и, следовательно, волновую функцию $\Psi(x, \tau)$. Однако физически наблюдаемые величины — как например, различные средние значения и вероятности — определяются с помощью этих решений исчерпывающим образом. Гамильтоновы уравнения движения — чисто действительные, в отличие от уравнений (2),

и количество неизвестных переменных в них в сравнении с системой (2) сокращается вдвое, но сами уравнения при этом становятся нелинейными. Это обстоятельство несколько усложняет задачу, но вместе с тем гамильтонова форма этих уравнений позволяет использовать для их решения хорошо известные и детально разработанные алгоритмы теории гамильтоновых систем.

Очевидно, правые части уравнений (3) являются быстроосциллирующими функциями времени, поскольку характерная амплитуда колебаний функции $\epsilon(\tau)$ существенно превышает единицу. Поэтому, проинтегрировав формально уравнения (3) по времени τ , нетрудно убедиться, что изменения переменных p и q за любой конечный промежуток времени порядка периода T будут невелики.

Перейдем теперь к решению уравнений движения (3). Будем при этом иметь в виду, что функция $\epsilon(\tau)$ состоит из двух частей — постоянной $\bar{\epsilon}$, которая представляет собой среднее по периоду значение $\epsilon(\tau)$, и переменной $\tilde{\epsilon}(\tau)$, среднее значение которой уже равно нулю. Интегрирование переменной части $\tilde{\epsilon}(\tau)$ дает периодическую функцию, благодаря чему можно разложить гамильтониан $H(p, q, \tau)$ в ряд Фурье:

$$H(p, q, \tau) = \sqrt{1-p^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n \cos(q + 2\bar{\epsilon}\tau - n\Omega\tau + \psi_n), \quad (4)$$

где $\Omega = 2\pi/T$, а μ_n и ψ_n — соответственно амплитуды и фазы фурье-разложения, которые определяются согласно соотношению

$$\mu_n \exp\{i\psi_n\} = \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \exp \left\{ i \left(n\Omega\tau + 2 \int d\tau \tilde{\epsilon}(\tau) \right) \right\}. \quad (5)$$

Позднее будут получены явные выражения для коэффициентов μ_n и проанализирована их зависимость от амплитуды возмущения.

Наибольший интерес представляет ситуация, когда гамильтониан (4) содержит медленную фазу, что возможно, если существует такое целое число l , при котором разность $\delta = 2\bar{\epsilon} - l\Omega$ становится много меньше Ω . В этом случае динамика системы оказывается резонансной и влияние внешнего поля является наиболее эффективным.

Введем резонансную фазу $\theta = q + \tau\delta + \psi_l$, после чего попытаемся подобрать такое каноническое преобразование, которое уничтожит все нерезонансные быстрые слагаемые (с частотой кратной Ω) в гамильтониане. Эта процедура, формально соответствующая усреднению гамильтониана по быстрым осцилляциям частоты Ω , хорошо известна как резонансная теория возмущений [11].

В результате усреднения функция Гамильтона системы приобретает вид

$$\mathcal{H} = p\delta + \mu_l \sqrt{1-p^2} \cos \theta,$$

а уравнения движения

$$\begin{cases} \frac{dp}{d\tau} = \mu_l \sqrt{1-p^2} \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{d\tau} = \delta - \mu_l \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \cos \theta \end{cases} \quad (6)$$

приводят к следующему решению:

$$p(\tau) = h \cos w + \sqrt{1 - h^2} \sin \left(\sqrt{\delta^2 + \mu_1^2} \tau - T_1 \right) \sin w. \quad (7)$$

Здесь введены обозначения

$$h = \frac{\mathcal{H}}{\sqrt{\delta^2 + \mu_1^2}}, \quad \cos w = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \mu_1^2}}, \quad \sin w = \frac{\mu_1}{\sqrt{\delta^2 + \mu_1^2}},$$

а T_1 — постоянная интегрирования.

Выражение (7) описывает медленные резонансные колебания импульса p в окрестности резонанса. Медленность изменения переменных p и θ обеспечивается малостью фурье-амплитуд μ_1 и условием $\delta \ll \Omega$, выполнение которого нами заранее предполагалось. Увеличение параметра δ ведет, с одной стороны, к более быстрым изменениям переменных p и θ , а с другой стороны, эти изменения оказываются малыми, и в пределе $\sin w \rightarrow 0$ импульс p становится интегралом движения.

3. КВАЗИЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ

Перейдем к задаче определения квазиэнергетического спектра системы. В соответствии с теорией Флоке, решением уравнения Шредингера в периодическом внешнем поле периода T являются функции, обладающие следующим свойством:

$$U_\nu(x, \tau + T) = U_\nu(x, \tau) \exp \{-i\nu T\},$$

где постоянное число ν называется квазиэнергией. Функции Флоке представляют собой ортонормированный базис, и волновая функция системы всегда может быть разложена по такому базису. При этом, как показано в [8], коэффициенты разложения не зависят от времени. В нашем случае (двухуровневой системы) число квазиэнергий и квазиэнергетических волновых функций сокращается до двух, причем нетрудно показать, что при выборе начала отсчета энергии посередине между уровнями квазиэнергии отличаются только знаком: $\nu_{1,2} = \pm\nu$. Действительно, если принять, что система (2) имеет в качестве решений пару функций блоховского типа, отвечающих квазиэнергии ν :

$$C_L(\tau) \exp \left(i \int \epsilon(\tau) d\tau \right) = G(\tau) \exp(-i\nu\tau), \quad C_R(\tau) \exp \left(-i \int \epsilon(\tau) d\tau \right) = F(\tau) \exp(-i\nu\tau),$$

где функции $F(\tau)$ и $G(\tau)$ — периодические с периодом T , то другой парой линейно-независимых решений этой системы, как следует из уравнений (2), будут функции

$$C_L(\tau) \exp \left(i \int \epsilon(\tau) d\tau \right) = F^*(\tau) \exp(i\nu\tau), \quad C_R(\tau) \exp \left(-i \int \epsilon(\tau) d\tau \right) = -G^*(\tau) \exp(i\nu\tau),$$

отвечающие квазиэнергии $-\nu$ (звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения).

Разлагая волновую функцию электрона $\Psi(x, \tau)$ по базису квазиэнергетических функций $U_\pm(x, \tau)$

$$\Psi(x, \tau) = AU_+(x, \tau) + BU_-(x, \tau), \quad (8)$$

и сопоставляя разложение (8) с разложением (1), найдем общее решение системы (2):

$$\begin{cases} C_R(\tau) \exp\left(-i \int \epsilon(\tau) d\tau\right) = AF(\tau) \exp(-i\nu\tau) - BG^*(\tau) \exp(i\nu\tau), \\ C_L(\tau) \exp\left(i \int \epsilon(\tau) d\tau\right) = AG(\tau) \exp(-i\nu\tau) + BF^*(\tau) \exp(i\nu\tau), \end{cases}$$

а также выражения для самих квазиэнергетических функций $U_{\pm}(x, \tau)$:

$$U_+(x, \tau) = \exp(-i\nu\tau) \left[f(\tau) \exp\{i\varphi_F(\tau)\} \Psi_R(x) + g(\tau) \exp\{i\varphi_G(\tau)\} \Psi_L(x) \right], \quad (9)$$

$$U_-(x, \tau) = \exp(i\nu\tau) \left[f(\tau) \exp\{-i\varphi_F(\tau)\} \Psi_L(x) - g(\tau) \exp\{-i\varphi_G(\tau)\} \Psi_R(x) \right].$$

Введенные в (9) функции $f(\tau)$ и $g(\tau)$ представляют собой модули, а $\varphi_{F,G}(\tau)$ — фазы комплексных функций $F(\tau)$ и $G(\tau)$ соответственно. Теперь, согласно определению $p(\tau)$, будем иметь

$$p(\tau) = 1 - 2a^2 f^2(\tau) - 2b^2 g^2(\tau) + 4abf(\tau)g(\tau) \cos(2\nu\tau - \varphi(\tau) - \gamma), \quad (10)$$

где символами γ , a , b обозначены разность фаз коэффициентов A и B и их модули, а периодическая функция $\varphi(\tau) = \varphi_F(\tau) + \varphi_G(\tau)$.

Сравним выражение (10) для импульса p с выражением (7), которое получается из решения динамических уравнений движения. Очевидно, чистые квазиэнергетические состояния соответствуют обращению в нуль коэффициента A или B (в зависимости от того, какое состояние нужно оставить) в выражении для волновой функции (8). В этом случае квадраты модулей коэффициентов $C_{L,R}(\tau)$ должны иметь строго периодическую зависимость от времени с периодом внешнего поля. Естественно, что введенная ранее динамическая переменная $p(\tau)$, учитывая ее определение через коэффициент $C_R(\tau)$, также должна стать периодической функцией с тем же периодом — что и дает выражение (10).

С другой стороны, полученное с помощью резонансной теории возмущений решение (7) переходит в строго периодическую функцию (в нашем случае постоянную), если $h = \pm 1$. На фазовой плоскости динамической системы (6) значениям $h = \pm 1$ соответствуют две стационарные точки, в то время как любому другому значению h будут соответствовать медленные периодические движения, совершаемые с частотой, одинаковой для всех фазовых траекторий и совпадающей, как следует из (10), с разностью квазиэнергий 2ν . Таким образом, приходим к выводу, что значениям гамильтониана $h = \pm 1$ отвечают чистые квазиэнергетические состояния квантовой системы. Поэтому, полагая в (10) коэффициент B равным нулю и в (7) $h = 1$ (а затем в (10) коэффициент $A = 0$ и в (7) $h = -1$), найдем вид функций $f(\tau)$ и $g(\tau)$, определяющих квазиэнергетические функции $U_{\pm}(x, \tau)$:

$$f(\tau) = \sin \frac{w}{2}, \quad g(\tau) = \cos \frac{w}{2}. \quad (11)$$

Если теперь не ограничиваться только чистыми квазиэнергетическими состояниями и считать A и B произвольными, то в результате сравнения формул (10) и (7) с учетом

найденных выражений для $f(\tau)$ и $g(\tau)$ можно получить:

$$a^2 = \frac{1+h}{2}, \quad b^2 = \frac{1-h}{2}. \quad (12)$$

Очевидно, квадраты модулей коэффициентов A и B , в соответствии с обычными правилами квантовой механики, можно интерпретировать как вероятности того или другого значения квазиэнергии. Таким образом, получаем, что вероятность определенного значения квазиэнергии задается безразмерным гамильтонианом h динамической системы (6) и, поскольку гамильтониан h является интегралом движения, фазовые траектории системы (6) на плоскости $\{p; \theta\}$ будут представлять собой линии, на которых квазиэнергетические вероятности сохраняют свое значение.

Перейдем теперь к определению значений квазиэнергии двухуровневой системы, для чего вновь обратимся к выражениям (7) и (10). Непосредственное сопоставление временных зависимостей этих двух выражений приводит к результату

$$\nu_{\pm} = \pm\nu = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + \mu_l^2}. \quad (13)$$

Как известно, квазиэнергии определены с точностью до частоты внешнего поля Ω . Полученные значения (13) представляют собой, таким образом, квазиэнергии, приведенные к «первой зоне Бриллюэна».

Обсудим зависимость квазиэнергий от параметров внешнего воздействия. Для этого нам потребуется знание коэффициентов μ_n , которые определены выражением (5). Прежде всего отметим, что на величину μ_n влияет лишь переменная составляющая возмущения, в то время как изменение среднего значения способно лишь удалять или приближать систему к резонансу, условие которого

$$\delta = 2\bar{\epsilon} - l\Omega = 0 \quad (14)$$

имеет достаточно простой физический смысл. Постоянная составляющая возмущения разводит уровни энергии стационарных состояний на величину приблизительно равную $2\bar{\epsilon}$ (в сильных полях). Поэтому, для того чтобы резонансным образом связать эти уровни, необходима точно такая же энергия кванта (или квантов) внешнего поля.

При вычислении интеграла (5) для определения фурье-амплитуд μ_n можно использовать традиционный метод стационарной фазы при условии, что уравнение

$$2\bar{\epsilon}(\tau) + n\Omega = 0 \quad (15)$$

имеет решения. Кроме того, точки стационарной фазы должны, как известно, находиться на достаточном удалении друг от друга (если их несколько), чтобы интегрирование вблизи каждой из них велось независимо — в этом случае их вклады будут аддитивны.

Будем для определенности полагать, что уравнение (15) при данном n имеет лишь два решения $\tau = \tau_{1,2}(n)$ и, следовательно, производные по времени $\dot{\epsilon}_{1,2}$ от функции $\epsilon(\tau)$, вычисленные в точках $\tau_{1,2}(n)$ соответственно, имеют разные знаки. После проведения необходимых вычислений будем иметь

$$\mu_n^2 = \frac{\Omega^2}{4\pi} \left(\frac{1}{\dot{\epsilon}_1} + \frac{1}{|\dot{\epsilon}_2|} + \frac{2}{\sqrt{|\dot{\epsilon}_1\dot{\epsilon}_2|}} \sin \left\{ \int_{\tau_{1(n)}}^{\tau_{2(n)}} d\tau (2\bar{\epsilon}(\tau) + n\Omega) \right\} \right). \quad (16)$$

Оценка величины коэффициентов μ_n в предположении, что $\dot{\epsilon}_1 \sim |\dot{\epsilon}_2|$, дает $\mu_n \sim \sqrt{\Omega/\epsilon_0}$, где ϵ_0 — некая характерная амплитуда изменения функции $\tilde{\epsilon}(\tau)$. При условии, что частота возмущения Ω — порядка единицы, а $\epsilon_0 \gg 1$, сами коэффициенты μ_n оказываются малыми убывающими функциями амплитуды ϵ_0 . Кроме того, заметим, что зависимость μ_n от ϵ_0 является осциллирующей благодаря наличию синуса в выражении (16).

Если же номер n еще недостаточно велик, для того чтобы равенство (15) перестало выполняться, но вместе с тем его значение уже таково, что точки стационарной фазы сближаются слишком сильно, метод стационарной фазы, используемый при вычислении коэффициентов μ_n , должен быть слегка модифицирован. Поскольку теперь две области, в которых фаза изменяется слабо, начинают сливаться в одну, функцию $\tilde{\epsilon}(\tau)$ в интеграле (5) можно аппроксимировать параболой, симметричной относительно точки τ_0 , в которой происходит слияние двух решений уравнения (15), и получить для коэффициента μ_n выражение

$$\mu_n = \frac{\Omega}{(\ddot{\epsilon}_0)^{1/3}} \text{Ai} \left(\frac{2\tilde{\epsilon}(\tau_0) + n\Omega}{(\ddot{\epsilon}_0)^{1/3}} \right).$$

Здесь $\ddot{\epsilon}_0$ означает вторую производную в точке $\tau = \tau_0$, а $\text{Ai}(x)$ — функция Эйри с аргументом x .

Подчеркнем, что полученное выражение применимо также и для тех номеров n , при которых уравнение (15) не имеет решений, но уже близко к выполнению. В этом случае аргумент функции Эйри мал, а ее значение порядка единицы. Увеличивая амплитуду внешнего воздействия ϵ_0 (т. е., фактически, значение $|\tilde{\epsilon}(\tau_0)|$) при любом наперед заданном значении номера n , можно добиться того, чтобы аргумент функции Эйри, став отрицательным, продолжал бы увеличиваться по абсолютной величине. В этом случае зависимость μ_n от ϵ_0 оказывается осциллирующей, с медленным убыванием самой величины осцилляций, и в дальнейшем эта зависимость плавно переходит в рассмотренную ранее (см. формулу (16)).

Если же, напротив, уменьшать амплитуду изменения функции $\tilde{\epsilon}(\tau)$, то аргумент функции Эйри будет расти в положительном направлении, что приведет к резкому экспоненциальному затуханию коэффициентов μ_n как функций ϵ_0 . Такая ситуация соответствует полному отсутствию решений уравнения (15) и точек стационарной фазы в интеграле (5). Отметим, однако, что при любых значениях аргумента коэффициенты μ_n оказываются малыми из-за присутствия малого множителя перед функцией Эйри, равного по порядку величины $\epsilon_0^{-1/3}$.

Возвращаясь к выражению для квазиэнергий (13), можно утверждать, что зависимость квазиэнергии от амплитуды внешнего поля ϵ_0 качественно повторяет поведение коэффициентов μ_l и является осциллирующей функцией, если в интеграле (5) присутствуют точки стационарной фазы. В частности, когда среднее значение возмущения тождественно равно нулю или в точности выполняется условие (14), квазиэнергии полностью определяются значением коэффициента μ_l . В этом случае возможен квазиэнергетический резонанс — когда между двумя уровнями квазиэнергии укладывается целое число квантов внешнего поля — что соответствует пересечению двух ветвей квазиэнергии в первой зоне Бриллюэна. Так, например, если возмущение имеет чисто гармонический вид, формулы (5) и (13) дают для разности квазиэнергий значение равное $J_0(2\epsilon_0/\Omega)$, где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка с аргументом x . При этом квазиэнергетический резонанс будет иметь место при значениях амплитуды ϵ_0 , соответствующих нулям функции Бесселя. Аналогичные результаты были получены в

работах [12, 13], где был проведен расчет квазиэнергий в низкочастотном гармоническом поле в приближении ВКБ.

В случае, когда точки стационарной фазы в интеграле (5) отсутствуют, квазиэнергия практически не зависит от ϵ_0 , и лишь в экспоненциально узкой области значений $\bar{\epsilon}$, вблизи точки $\bar{\epsilon} = \Omega/2$, квазиэнергия становится также малой экспоненциально убывающей функцией ϵ_0 — как и сами коэффициенты μ_l — никогда, однако, не обращаясь при этом в нуль.

4. ЭЛЕКТРОННАЯ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Проведенный во втором разделе анализ динамических уравнений движения позволяет исследовать временную эволюцию электронной плотности в системе двух квантовых ям. Для этой цели найдем плотность распределения вероятности в координатном пространстве в произвольный момент времени. Вычисляя квадрат модуля волновой функции (1) и переходя от коэффициентов разложения $C_{L,R}(\tau)$ к динамическим переменным p, q , получим следующее выражение:

$$\rho(x, \tau) = \frac{1 + p(\tau)}{2} \Psi_L^2(x) + \frac{1 - p(\tau)}{2} \Psi_R^2(x), \quad (17)$$

откуда следует, что любые изменения формы электронного волнового пакета полностью определяются зависимостью импульса p от времени τ . При выводе (17) были опущены слагаемые, содержащие произведение $\Psi_L(x)\Psi_R(x)$, поскольку, как уже отмечалось выше, каждая из функций $\Psi_L(x)$ и $\Psi_R(x)$ почти полностью сосредоточена в своей яме и их перекрытием можно пренебречь. Полученная в работе [14] оценка для произведения $\Psi_L(x)\Psi_R(x)$ дает значения равные по порядку величины $\sqrt{\hbar\Delta/E_2} \ll 1$, что подтверждает правильность сделанного в выражении (17) приближения.

В общем случае при произвольных значениях гамильтониана \hbar и угла w , который изменяется в пределах от 0 до π , формула (17) описывает плавные гармонические пространственные осцилляции электронной плотности, которые, в соответствии с (7), происходят между двумя ямами с частотой равной разности значений квазиэнергии 2ν .

Отметим при этом существующую аналогию в поведении двухуровневой системы в сильном переменном внешнем поле и в отсутствие такового, когда также имеет место перетекание заряда из ямы в яму по гармоническому закону с единичной частотой, что соответствует частоте перехода между уровнями энергии стационарных состояний. Такая аналогия неслучайна и вызвана в первую очередь тем обстоятельством, что периодическое внешнее поле навязывает квантовой системе свою иерархию состояний, что ведет к эффективной замене стационарных состояний на квазиэнергетические, а уровней энергии на уровни квазиэнергии. В результате спектр системы по-прежнему будет состоять только из двух уровней и частота колебаний пространственного диполя будет совпадать с единственным характерным частотным масштабом задачи — частотой перехода между уровнями квазиэнергии.

Рассмотрим далее некоторые предельные случаи эволюции электронного волнового пакета, представляющие наибольший интерес. В частности, обсудим возможность существования статического распределения электронной плотности в двойной квантовой яме и полной локализации волновой функции частицы в области одной из ям.

Будем вначале предполагать, что параметры μ_l и δ не обращаются в нуль одновременно, т. е. квазиэнергетический спектр (13) не вырожден и двум значениям квазиэнергии ν_{\pm} соответствует пара квазиэнергетических функций (9). В этом случае для описания зависимости $p(\tau)$ можно пользоваться выражением (7), которое переходит в постоянную либо при $\sin w \rightarrow 0$, либо при $h \rightarrow \pm 1$. Проследим подробно, что происходит при этом с волновой функцией системы (8) и квазиэнергетическими функциями (9).

Параметры h и w полностью независимы, и если значение гамильтониана h , однозначно определяемое по начальному условию, задает, согласно (12), вес того или другого квазиэнергетического состояния в волновой функции $\Psi(x, \tau)$, то величина угла w влияет только на внутреннее строение самих квазиэнергетических функций, не затрагивая общей структуры разложения (8).

Предположим, что в начальный момент времени волновая функция системы совпадает с одной из квазиэнергетических функций, т. е. значение гамильтониана h равно 1 или -1 и один из коэффициентов разложения в (8) обращается в нуль. Поскольку коэффициенты разложения волновой функции по базису квазиэнергетических функций не зависят от времени, во все последующие моменты времени система также будет находиться в заданном начальным условием квазиэнергетическом состоянии, описываемом функцией $U_+(x, \tau)$ или $U_-(x, \tau)$.

Квадрат модуля волновой функции $\Psi(x, \tau)$, которым определяется плотность распределения вероятности, совпадает, таким образом, с квадратом модуля одной из функций $U_{\pm}(x, \tau)$ из (9). В соответствии с формулами (11), для плотности распределения в чистом квазиэнергетическом состоянии будем иметь

$$\rho(x, \tau) = \Psi_{R,L}^2(x) \sin^2 \frac{w}{2} + \Psi_{L,R}^2(x) \cos^2 \frac{w}{2}, \quad (18)$$

причем индексы, указанные первыми, отвечают функции $U_+(x, \tau)$, а указанные вторыми — $U_-(x, \tau)$.

Как следует из выражения (18), распределение электронной плотности для чистого квазиэнергетического состояния остается постоянным, в то время как сами функции $U_{\pm}(x, \tau)$ зависят от времени. Вообще говоря, при вычислении квадрата модуля волновой функции (8) в выражении для $\rho(x, \tau)$ может появиться зависимость от времени, но только лишь в перекрестных слагаемых, которые содержат произведение $\Psi_L(x)\Psi_R(x)$. Как уже отмечалось, величина этих слагаемых ничтожно мала, поэтому в выражении (18) они опущены.

Заметим, что степень заполнения левой и правой ям в квантовом состоянии с определенным значением квазиэнергии зависит от $\sin^2(w/2)$ и $\cos^2(w/2)$, т. е. от величины расстройки резонанса δ и от значения коэффициента μ_l . Учитывая, что квазиэнергии (13) задаются этими же параметрами, можно сказать, что степень заполнения ям определяется одним из этих параметров (например δ) и квазиэнергией ν и, следовательно, будет существенно различной для различных значений квазиэнергии в пределах одной квазиэнергетической зоны.

Теперь обсудим другую возможность образования статического распределения заряда в двухъямной структуре, а именно, допустим, что фурье-амплитуда μ_l обращается в нуль, а следовательно, вместе с ней и значение $\sin w$. Если при этом величина отклонения от резонанса положительна, т. е. $\delta > 0$, само значение угла w также равно нулю. Если же $\delta < 0$, то $w = \pi$. Вообще говоря, обращение коэффициента μ_l в нуль возможно лишь при определенных условиях, накладываемых на форму зависимости $\epsilon(\tau)$, и позд-

нее мы вернемся к этому вопросу. Сейчас же, в целях сохранения последовательности изложения, сосредоточимся на определении квазиэнергетических функций.

Пусть значение угла w равно нулю. Тогда, согласно выражениям (11), $f(\tau) = 0$, а $g(\tau) = 1$, и квазиэнергетические функции $U_{\pm}(x, \tau)$ принимают вид

$$U_{\pm}(x, \tau) = \Psi_{L,R}(x) \exp \left\{ \pm i \left(\varphi_G(\tau) - \frac{\delta}{2} \tau \right) \right\}, \quad (19)$$

причем для $U_+(x, \tau)$ нужно брать индекс «L», а для $U_-(x, \tau)$ — индекс «R». Очевидно, что каждая из функций оказывается полностью локализованной в одной из ям, в данном случае $U_+(x, \tau)$ — в левой, а $U_-(x, \tau)$ — в правой. Если же $w = \pi$, функция $f(\tau)$ обращается в единицу, а $g(\tau)$ — в нуль. В этом случае квазиэнергетические функции, равные

$$U_{\pm}(x, \tau) = \Psi_{R,L}(x) \exp \left\{ \pm i \left(\varphi_F(\tau) + \frac{\delta}{2} \tau \right) \right\}, \quad (20)$$

также полностью локализованы, но теперь уже функция $U_+(x, \tau)$ — в правой яме, а функция $U_-(x, \tau)$ — в левой.

Несмотря на то, что функции $U_{\pm}(x, \tau)$ в обоих случаях являются еще и функциями времени, временная зависимость их никак не сказывается на плотности распределения $\rho(x, \tau)$. Возводя в квадрат модуль волновой функции (8), получим только сумму квадратов модулей каждого из слагаемых в отдельности, поскольку теперь, когда $w = 0$ или π , перемножение квазиэнергетических функций, относящихся к разным квазиэнергиям, снова будет определяться произведением $\Psi_L(x)\Psi_R(x)$, которое в условиях применимости двухуровневого приближения пренебрежимо мало. В результате опять получаем статическое распределение заряда

$$\rho(x, \tau) = a^2 \Psi_{L,R}^2(x) + b^2 \Psi_{R,L}^2(x), \quad (21)$$

где индексам, указанным первыми, соответствует значение $w = 0$, а индексам, указанным вторыми — значение $w = \pi$. Коэффициенты a^2 и b^2 задают степень заполнения каждой из ям и, в свою очередь, однозначно определяются гамильтонианом динамической системы h (см. (12)).

Любой из рассмотренных нами двух случаев образования статического распределения заряда в симметричной структуре двух квантовых ям может теперь послужить отправной точкой для выяснения вопроса о возможности существования квантовых состояний, полностью локализованных в области одной ямы. Для этого, как нетрудно убедиться, необходимо потребовать совместного выполнения обоих условий, реализация которых обеспечивает постоянство функции $\rho(x, \tau)$, т. е. $h = \pm 1$, $\sin w = 0$, причем в произвольной последовательности.

Действительно, положим значение гамильтониана h равным 1 или -1 . Волновая функция при этом переходит в одну из квазиэнергетических функций $U_{\pm}(x, \tau)$. Если теперь потребовать обращения в нуль коэффициента μ_i , а следовательно, и $\sin w$, получим, в соответствии с (19) и (20), что квазиэнергетические функции полностью локализуются в одной из ям. Таким образом, волновая функция $\Psi(x, \tau)$ с точностью до фазового множителя будет совпадать с одной из базисных функций $\Psi_{L,R}(x)$, а плотность распределения перейдет в постоянную функцию, полностью локализованную в области левой или правой ямы

$$\rho(x, \tau) = \Psi_{L,R}^2(x).$$

Выбор индекса в этом выражении должен быть проведен следующим образом: индекс «L» выбирается при $h = 1$, $w = 0$ или при $h = -1$, $w = \pi$. В остальных случаях следует выбирать индекс «R».

Поскольку, как уже было отмечено, каждое значение гамильтониана h соответствует определенному начальному условию и коэффициенты A и B в разложении (8) не меняют своего значения, окончательно приходим к выводу, что статическое распределение заряда, полностью локализованное в одной из ям, можно получить, если удастся создать в начальный момент времени волновой пакет, соответствующий чистому квазиэнергетическому состоянию. При этом коэффициент μ_l должен быть равен нулю, что отвечает (как будет показано ниже) определенной форме зависимости внешнего поля от времени и, более того, определенному значению амплитуды возмущения.

Теперь обратимся к случаю вырождения квазиэнергетического спектра (13), т. е. будем считать, что два значения квазиэнергии сливаются в одно. Такая ситуация возможна лишь при одновременном обращении в нуль параметров δ и μ_l , что автоматически ведет к обращению в нуль значений квазиэнергии. Известно [15], что пересечение ветвей квазиэнергии может иметь место лишь при условии существования какой-либо пространственно-временной симметрии в задаче, например, так называемой обобщенной четности, когда оператор Шредингера инвариантен относительно преобразований $x \rightarrow -x$, $\tau \rightarrow \tau + T/2$. При этом пересекаются ветви квазиэнергий, соответствующие различной четности, если система не обладает симметрией более высокого порядка. Обсуждая сейчас квантовую динамику в условиях квазиэнергетического резонанса, будем подразумевать наличие определенной симметрии гамильтониана, допускающей квазиэнергетическое вырождение.

В этом случае квазиэнергетические функции системы имеют строго периодическую зависимость с периодом внешнего поля T . Следовательно, и введенная ранее через коэффициент $C_R(\tau)$ динамическая переменная $p(\tau)$ также должна стать чисто периодической функцией с тем же периодом. Поскольку величины h , $\cos w$, $\sin w$ теперь утрачивают смысл, решение $p(\tau)$ нужно искать непосредственно из системы уравнений (6), положив в них $\mu_l = \delta = 0$. Найденное решение, которое оказывается постоянным, $p(\tau) = p(0)$, подставим далее в формулу (17) и получим, что в случае вырождения квазиэнергетических уровней плотность распределения также остается неизменной с течением времени:

$$\rho(x, \tau) = \frac{1 + p(0)}{2} \Psi_L^2(x) + \frac{1 - p(0)}{2} \Psi_R^2(x), \quad (22)$$

и полностью определяется начальным условием.

Выясним, как «устроена» волновая функция системы в случае квазиэнергетического резонанса. Хорошо известно [8], что в случае пересечения ветвей квазиэнергии выбор квазиэнергетических функций становится неоднозначным. Конкретной иллюстрацией этому утверждению может служить следующее обстоятельство. Попытаемся получить квазиэнергетические функции с помощью предельного перехода $\delta \rightarrow 0$, $\mu_l \rightarrow 0$ из (9). Оказывается при этом, что конечный вид этих функций зависит от последовательности, в которой проводится предельный переход, а именно, какой из параметров (δ или μ_l) зануляется в первую очередь.

Если потребовать, чтобы частота внешнего поля попадала точно в резонанс (14), получим, что $w = \pi/2$ и, в соответствии с (11), $f(\tau) = g(\tau) = 1/\sqrt{2}$. Подставим эти данные в выражения для квазиэнергетических функций (9), после чего положим коэф-

коэффициент μ_l равным нулю. В результате будем иметь

$$U_+(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Psi_R(x) \exp \{i\varphi_F(\tau)\} + \Psi_L(x) \exp \{i\varphi_G(\tau)\} \right],$$

$$U_-(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Psi_L(x) \exp \{-i\varphi_F(\tau)\} - \Psi_R(x) \exp \{-i\varphi_G(\tau)\} \right].$$

Каждая из найденных функций $U_{\pm}(x, \tau)$ дает симметричное распределение по координатам с равным заполнением обеих ям.

Поменяем последовательность действий. Пусть теперь коэффициент $\mu_l = 0$ и, следовательно, $\sin w = 0$. Сам угол w может быть при этом равен 0 или π . Положив вначале $w = 0$ (следовательно, $\cos(w/2) = 1$, $\sin(w/2) = 0$), приходим к формулам (19) для функций $U_{\pm}(x, \tau)$, в которых теперь нужно приравнять нулю параметр δ . Положив $w = \pi$ (т.е. $\cos(w/2) = 0$, $\sin(w/2) = 1$), получим функции (20), в которых также следует величину расстройки резонанса обратить в нуль. В данном случае, функции $U_{\pm}(x, \tau)$ оказываются полностью локализованными в пределах лишь одной потенциальной ямы.

Заметим, что в результате проведенных предельных переходов разных типов были получены три различных пары квазиэнергетических функций. Этими тремя базисными наборами функций не исчерпывается все множество таких наборов, существует бесконечное количество способов, для того чтобы в условиях вырождения получить очередную пару квазиэнергетических функций, отличную от всех предыдущих. Таким образом, выбор той или иной пары базисных функций в разложении (8) представляется теперь делом вкуса. Отметим лишь, что можно легко переходить от одного базиса к другому в (8) с помощью переопределения коэффициентов разложения и, поскольку теперь любые вектора базиса являются квазиэнергетическими функциями, коэффициенты разложения будут оставаться всегда постоянными.

Выбирая в качестве квазиэнергетического базиса, например, функции (19) с $\delta = 0$, которые были получены в результате предельного перехода $\mu_l = 0$, $w \rightarrow 0$, можно легко объяснить явление локализации электронной волновой функции в одной из ям, если в качестве начального условия заранее взять функцию, полностью локализованную в яме и практически совпадающую, таким образом, с одной из квазиэнергетических функций. Именно такое начальное условие фигурировало в работах [1-3], в которых и было впервые указано на возможность явления локализации в условиях квазиэнергетического резонанса. Для определенности будем считать, что начальное условие имеет вид $\Psi(x, 0) = \Psi_L(x)$. Очевидно, что коэффициенты разложения в (8) будут равны $A = \exp \{-i\varphi_G(0)\}$, $B = 0$, что дает решение вида

$$\Psi(x, \tau) = \Psi_L(x) \exp \{i(\varphi_G(\tau) - \varphi_G(0))\},$$

поскольку коэффициенты A и B постоянны. Естественно, такая волновая функция всегда будет локализована в левой яме, сохраняя неизменной плотность распределения $\rho(x)$, равную $\Psi_L^2(x)$.

Полной противоположностью всем рассмотренным режимам, которые характеризуются постоянной функцией $\rho(x, \tau)$, является ситуация, соответствующая точному резонансу (14) с равными заселенностями квазиэнергетических уровней, т.е. $\delta = \hbar = 0$. При этом коэффициент μ_l будем считать отличным от нуля, что автоматически дает

значение $\sin w$ равно единице. Коэффициенты A и B в разложении (8) для простоты выберем чисто действительными и положительными, что совершенно не скажется в дальнейшем на общности результата.

В этом случае каждая из квазиэнергетических функций (9) дает симметричное распределение по координатам с нулевым дипольным моментом, чего нельзя сказать о волновой функции системы $\Psi(x, \tau)$. Подставляя $w = \pi/2$, $A = B = 1/\sqrt{2}$ в (11), (9) и (8) и группируя слагаемые при базисных функциях $\Psi_{L,R}(x)$, получим

$$\Psi(x, \tau) = \Psi_L(x) \exp \left[\frac{i}{2} \{ \varphi_G(\tau) - \varphi_F(\tau) \} \right] \cos \left(\frac{\mu_1 \tau - \varphi(\tau)}{2} \right) - i \Psi_R(x) \exp \left[\frac{i}{2} \{ \varphi_F(\tau) - \varphi_G(\tau) \} \right] \sin \left(\frac{\mu_1 \tau - \varphi(\tau)}{2} \right). \quad (23)$$

Учет комплексного вида коэффициентов A и B привел бы к появлению общего фазового множителя и к постоянному сдвигу фазы, который легко устраняется изменением начала отсчета времени.

Очевидно, волновая функция (23) описывает периодически совершаемые с частотой $\mu_1/2$ осцилляции электронной плотности с максимально возможной амплитудой. Такой режим можно назвать максимально нестационарным: с интервалом в полпериода волновой пакет полностью переходит поочередно из одной потенциальной ямы в другую, образуя в эти моменты распределение с максимальным дипольным моментом.

5. ВЛИЯНИЕ ВРЕМЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ ВОЗМУЩЕНИЯ НА ЭВОЛЮЦИЮ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛОТНОСТИ

В данном разделе, как это и планировалось ранее, укажем и обсудим те условия, при которых обращение в нуль фурье-амплитуды μ_1 становится возможным. Оказывается, что ситуация здесь будет существенно различной в зависимости от соотношения между средним значением возмущения $\bar{\epsilon}$ и максимальным значением его переменной части $\bar{\epsilon}(\tau)$, обозначенном нами ранее как ϵ_0 . Разберем сначала случай, когда возмущение $\epsilon(\tau)$ является существенно положительной функцией и при любых τ выполнено неравенство $\bar{\epsilon} > \bar{\epsilon}(\tau)$.

Постоянная составляющая возмущения $\bar{\epsilon}$, как уже отмечалось, разводит уровни энергии стационарных состояний на большую величину, приблизительно равную $2\bar{\epsilon}$. Переменная же составляющая $\bar{\epsilon}(\tau)$ качественно может рассматриваться как малое возмущение, поскольку ее величина становится меньше расстояния между уровнями. Хорошо известно, однако, что даже малое воздействие может оказаться достаточно эффективным, если его частота (или частота одной из его гармоник) будет близка к частоте перехода между уровнями (см., например, задачу о резонансном возбуждении двухуровневой системы в [16, с. 180]). В нашем случае это соответствует значениям параметра δ равным нулю или, по крайней мере, сравнимым по величине с μ_1 , что дает для $\sin w$ значения равные или близкие к единице. Закон изменения волновой функции со временем приводит к периодическому изменению заселенностей уровней и заполнения потенциальных ям, причем максимальное изменение достигается при $\hbar = 0$ (см. выражение (23)).

Следует иметь в виду, что величина фурье-коэффициента μ_1 в случае, когда функция $\epsilon(\tau)$ положительна при любых значениях своего аргумента, является, как было по-

казано в предыдущем разделе, экспоненциально малой. По этой причине размер резонансной области параметра δ , по порядку величины совпадающий с μ_l , также оказывается экспоненциально малым. Увеличение δ по сравнению с μ_l ведет к выходу из резонансной области, что уменьшает величину $\sin w$ и в пределе $\sin w \ll 1$ приводит к установлению почти постоянного во времени распределения заряда, поскольку l -ая гармоника возмущения уже не может резонансным образом связать два уровня в спектре. Заметим, что несмотря на очень малое значение, коэффициент μ_l никогда не обращается в нуль, поэтому точное равенство $\sin w = 0$ в этом случае недостижимо и, следовательно, формулы (19)–(21) для квазиэнергетических функций и плотности распределения следует рассматривать как некие предельные асимптотические выражения.

Теперь обратимся к противоположному случаю, когда амплитуда переменной составляющей внешнего поля превышает его среднее значение: $\epsilon_0 > \bar{\epsilon}$. При этом, естественно, нельзя переменную часть возмущения даже качественно считать малой и действие внешнего поля сводить к резонансному возбуждению двухуровневой системы одной l -ой гармоникой, как это имело место ранее. В условиях, когда амплитуда переменной составляющей достаточно велика, необходимо принимать во внимание не только одноквантовые, но и все многоквантовые резонансные процессы, что автоматически учитывается фурье-амплитудой μ_l .

Согласно неравенству $\epsilon_0 > \bar{\epsilon}$, в моменты времени $\tau_{1,2}(l)$ выполняется условие (15) с $n = l$ и в интеграле (5) присутствуют точки стационарной фазы. Значение коэффициента μ_l теперь будет даваться выражением (16), из которого, в частности, следует, что обращение μ_l в нуль возможно при выполнении двух условий. Во-первых, производные $\dot{\epsilon}_1$ и $\dot{\epsilon}_2$ должны отличаться только знаком, оставаясь одинаковыми по величине, а во-вторых, должно быть выполнено равенство

$$\int_{\tau_1(l)}^{\tau_2(l)} d\tau (2\bar{\epsilon}(\tau) + l\Omega) = 2\pi \left(N - \frac{1}{4} \right), \quad (24)$$

где N — произвольное целое число. В этом случае различные резонансные процессы — как одноквантовые так и многоквантовые — интерферируя, взаимно гасят друг друга. Значение $\sin w$ при этом равно нулю, и двухуровневая система не возбуждается, что приводит к постоянному распределению заряда в ямах (21).

Очевидно, первое из этих условий определяет тот класс функций, описывающих зависимость внешнего поля от времени, в котором локализация электрона в области одной из ям может иметь место. Предполагая, что равенство производных $\dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_2$ выполняется при любых значениях амплитуды и частоты возмущения, приходим к выводу, что функция $\epsilon(\tau)$ в этом случае симметрична относительно точки $\tau = \tau_0$, в которой два решения уравнения (15) сливаются в одно, а уравнение Шредингера инвариантно относительно преобразований $x \rightarrow -x$, $\tau \rightarrow \tau + T/2$ (обобщенная четность).

Условие симметричности функции $\epsilon(\tau)$ относительно точки τ_0 является необходимым, но не достаточным для обращения в нуль коэффициента μ_l . Для того чтобы в системе установилось статическое распределение заряда, возмущение должно еще иметь некоторое вполне конкретное значение амплитуды ϵ_0 , определяемое равенством (24). Фактически это второе условие задает связь между амплитудой внешнего воздействия ϵ_0 и его частотой Ω , необходимую для обращения μ_l в нуль. Например, в случае чисто синусоидального воздействия, как показано в [2] (и как следует также из (24)), зависимость ϵ_0 от Ω находится из уравнения $J_0(2\epsilon_0/\Omega) = 0$, что приводит к линейному закону

изменения $\epsilon_0(\Omega)$ вида $\epsilon_0 = x_i \Omega / 2$, где x_i — корни функции Бесселя нулевого порядка $J_0(x)$.

Ясно, однако, что при определенных условиях строгое и неукоснительное соблюдение этих требований становится необязательным, поскольку любое малое отклонение от них ведет к столь же малым изменениям пространственно-временной зависимости волновой функции и плотности распределения, не сказывающихся существенным образом на поведении системы. Так, в случае, когда система далека от квазиэнергетического резонанса, т. е. значение δ не равно нулю, незначительные отклонения возмущения от заданных формы и амплитуды ведут к возникновению отличного от нуля, но малого по сравнению с δ , коэффициента μ_i , что практически не меняет вида квазиэнергетических функций (19), (20) и волновой функции (8), так как значение $\sin w$ много меньше единицы. В этом смысле, очевидно, можно говорить об «устойчивости» полученных решений уравнения Шредингера и соответствующих им конфигураций электронной плотности.

Если же отклонения от указанных условий оказываются значительными, величина $\sin w$ может стать близкой к единице. В этом случае внешнее поле будет резонансно воздействовать на двухуровневую систему при значениях δ близких к нулю. Такое воздействие приведет к туннельным осцилляциям заряда из одной ямы в другую с максимальной амплитудой, достигаемой при равных заселенностях уровней квазиэнергии в соответствии с выражением (23). Именно так обстоит дело в случае квазиэнергетического резонанса, когда возникновение любого сколь угодно малого значения μ_i автоматически дает величину $\sin w$ равную единице, а квазиэнергетические функции равномерно заполняют обе ямы. Очевидно, что решение уравнения Шредингера, соответствующее квазиэнергетическому резонансу, будет теперь «неустойчиво» в том смысле, что малейшее изменение параметров системы кардинально меняет характер решения.

Таким образом, «устойчивость» состояний, локализованных в области одной из ям, зависит от степени перекоса двухъямного потенциала постоянной составляющей внешнего поля. Если величина расстройки резонанса δ велика по сравнению с μ_i , локализованные состояния (которые получаются в этом случае из чистых квазиэнергетических состояний при значениях амплитуды внешнего поля ϵ_0 , соответствующих (24)) оказываются «устойчивыми» по отношению к малым изменениям амплитуды возмущения или начального условия. Уменьшение δ ведет к сужению области устойчивости, и в пределе $\delta = 0$, что соответствует квазиэнергетическому резонансу, локализованные состояния полностью разрушаются при малейших изменениях амплитуды ϵ_0 .

В заключение еще раз подчеркнем, что локализация электронного волнового пакета в одной из ям возможна, если временная зависимость периодического внешнего поля описывается функцией, симметричной относительно любого из своих максимумов или минимумов, а само внешнее поле является достаточно сильным. Какие-либо иные ограничения на форму зависимости возмущения от времени отсутствуют, что позволяет говорить о достаточно общем характере данного явления.

Литература

1. F. Grossmann, T. Dittrich, P. Jung, and P. Hanggi, Phys. Rev. Lett. **67**, 516 (1991); Z. Phys. B **84**, 315 (1991); F. Grossmann, T. Dittrich, and P. Hanggi, Physica B **175**, 293 (1991).
2. F. Grossmann and P. Hanggi, Europhys. Lett. **18**, 571 (1992).

3. R. Bavli and H. Metiu, Phys. Rev. Lett. **69**, 1986 (1992); Phys. Rev. A. **47**, 3299 (1993).
4. Y. Dakhnovskii and H. Metiu, Phys. Rev. A **48**, 2342 (1993); Y. Dakhnovskii and R. Bavli, Phys. Rev. B **48**, 11020 (1993).
5. Y. Dakhnovskii and R. Bavli, Phys. Rev. B **48**, 11010 (1993).
6. L. Wang and J. Shao, Phys. Rev. A **49**, R637 (1994).
7. А. А. Горбачевич, В. В. Капаев, Ю. В. Копаев, ЖЭТФ **107**, 1321 (1995).
8. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ **51**, 1492 (1966).
9. В. И. Ритус, ЖЭТФ **51**, 1544 (1966).
10. J. H. Shirley, Phys. Rev. B **138**, 979 (1965).
11. А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, Мир, Москва (1985).
12. В. П. Крайнов, В. П. Яковлев, ЖЭТФ **78**, 2204 (1980).
13. И. Ш. Авербух, Н. Ф. Перельман, ЖЭТФ **88**, 1131 (1985).
14. В. А. Бурдов, ТМФ **108**, 69 (1996).
15. П. А. Браун, Г. П. Мирошниченко, Опт. и спектр. **49**, 1024 (1980).
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).