ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 4(10), стр. 1176–1196

О «БЕЗЫНВЕРСИОННОМ» СТИМУЛИРОВАННОМ ИЗЛУЧЕНИИ НЕРАВНОВЕСНЫХ КОЛЛЕКТИВОВ КЛАССИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

А. В. Гапонов-Грехов, М. Д. Токман

Институт прикладной физики Российской академии наук
603600, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 18 февраля 1997 г.

Найдены классические аналоги квантовых систем, способных к стимулированному излучению в отсутствие инверсии. Показано, что циклотронная параметрическая неустойчивость при низкочастотной модуляции функции распределения резонансных частиц может приводить к усилению бихроматического высокочастотного поля даже в том случае, когда усиление каждой из спектральных компонент по отдельности невозможно. Аналогичные режимы указаны для черенковского резонанса и иллюстративной (модельной) системы с сосредоточенными параметрами. Предложено использование данного эффекта для конверсии микроволнового излучения с повышением частоты.

1. ВВЕДЕНИЕ

Современная физика радиационных процессов в плазме и приборах СВЧ-электроники существенно опирается на глубокую аналогию между механизмами излучения ансамблей квантовых и классических осцилляторов. «Мазерные» механизмы излучения коллективов заряженных частиц занимают важнейшее место в теории неустойчивостей лабораторной [1] и космической [2] плазмы, в физике мазеров и лазеров на свободных электронах[1)] [3, 4]. При этом критерии неустойчивости «классических» функций распределения заряженных частиц по отношению к когерентному излучению электромагнитных волн различных типов являются естественным обобщением условия инверсии населенностей в элементарной квантовой двухуровневой системе, а релаксация неустойчивых распределений к «плато» в пространстве импульсов (при несущественности процессов спонтанного излучения и безызлучательной релаксации) — это прямой аналог выравнивания населенностей на резонансном переходе в результате взаимодействия квантовой системы с мощным излучением (см., например, [2]).

Вопрос о том, насколько требование инверсии универсально, является, очевидно, одним из принципиальных моментов теории взаимодействия излучения с веществом. Казалось бы, кроме неустойчивости квазимонохроматических электромагнитных мод в инвертированной системе и «чисто шумового» излучения равновесного ансамбля могут, в принципе, существовать «промежуточные» варианты. Другими словами, не может ли неравновесная, хотя и не инвертированная, система релаксировать к равновесию[2)]

[1)] Классическая СВЧ-электроника успешно заимствует не только «идеологию», но и конструктивные элементы квантовых приборов [4; 5].

[2)] Особый вопрос — каково это равновесие? Насколько универсальной является тенденция релаксации энергетического спектра к «плато»?

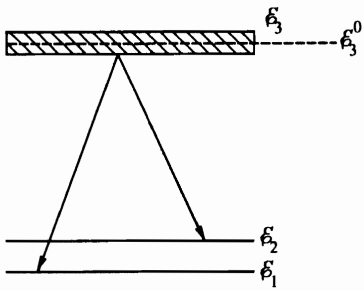

Рис. 1. Трехуровневая λ-схема

в результате неустойчивости немонохроматического электромагнитного поля[3)]? В последние годы подобные режимы излучения были найдены для квантовых систем (здесь и далее в этой связи мы ссылаемся на обзор [6]). Оказалось, в частности, что при расщеплении одного из уровней элементарной двухуровневой системы (см. рис. 1) при определенных условиях возможна параметрическая неустойчивость, приводящая к генерации двухчастотного излучения в отсутствие традиционной инверсии. При этом, тем не менее, энергетическим резервуаром являются электроны на верхнем энергетическом уровне — как и при традиционной «мазерной» неустойчивости.

Данная работа посвящена поиску классического аналога неустойчивой квантовой «безынверсной» системы. Фундаментальный аспект этой задачи состоит, очевидно, в расширении наших представлений о классах коллективов заряженных частиц, в которых возможна генерация стимулированного излучения. Прикладной интерес здесь связан с общей, по существу, проблемой квантовой и классической электроники: по мере повышения частоты генерации создание необходимой инверсии оказывается все более затруднительным[4)].

План статьи следующий. В разд. 2 с необходимой для построения классического аналога подробностью обсуждаются особенности «безынверсного» излучения квантовой трехуровневой системы и приводится ее простейший классический аналог — система из трех связанных осцилляторов с нелинейным трением (см. рис. 2). На основе анализа этой модельной системы сделан вывод о том, что аналогом «безынверсного» стимулированного излучения квантовой системы для классического ансамбля электронов является параметрическая неустойчивость на резонансных частицах, общих для двух ВЧ-мод и их биений. В разд. 3 построена линейная теория циклотронной неустойчивости подобного типа, в разд. 4 при помощи квазилинейной теории анализируются соответствующие энергетические соотношения и особенности релаксации функции распределения при развитии «безынверсной» неустойчивости. В Заключении (разд. 5) обсуждаются полученные результаты, возможные приложения и направления исследований в этой области.

[3)] Очевидно, что эта возможность существует лишь в нелинейных режимах, так как в линейной системе немонохроматичность возмущения в силу принципа суперпозиции не может привести к качественно новым эффектам.

[4)] В электронных мазерах и лазерах, в частности, эта тенденция проявляется в ужесточении требований к качеству электронных пучков [7].

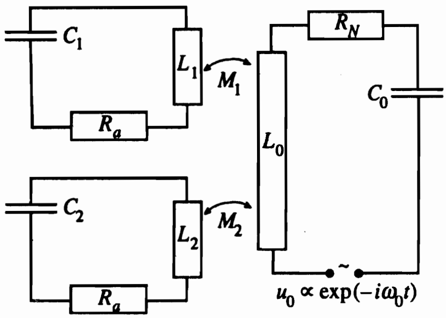

Рис. 2. Модельная система с сосредоточенными параметрами

2. ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ «БЕЗЫНВЕРСНОГО» СТИМУЛИРОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

«Безынверсное» стимулированное излучение различных квантовых систем обсуждалось в большом числе работ по квантовой электронике (см., например, обзор [6] и цитируемую там литературу). Мы изложим этот вопрос в той форме и с той мерой подробности, которые, на наш взгляд, необходимы для последовательного и наглядного перехода к классической модели. В частности, более подробно, чем в указанных работах, мы остановимся на условиях пространственного синхронизма при «безынверсной» генерации в распределенной системе.

Наиболее наглядным примером квантовой системы, в которой возможно стимулированное излучение без традиционной инверсии, является так называемая λ-схема [6]. Это трехуровневая система (рис. 1) с уровнями энергии $\mathscr{E}_j$ ($j = 1, 2, 3$), которым соответствуют два ВЧ-перехода ($3 \leftrightarrow 1$, $3 \leftrightarrow 2$) и один НЧ-переход ($2 \leftrightarrow 1$). Рассмотрим взаимодействие этой системы с бихроматическим полем

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}\ \mathrm{Re}\left[E_1 \exp(-i\omega_1 t) + E_2 \exp(-i\omega_2 t)\right], \tag{1}$$

где $\mathbf{e}$ — единичный вектор поляризации, частоты $\omega_{1,2}$ соответствуют частотам ВЧ-переходов $\hbar^{-1}(\mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_{2,1})$ и, следовательно, должны также удовлетворять условию комбинационного синхронизма

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_0 = \frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1}{\hbar}. \tag{2}$$

Вероятность перехода в единицу времени с уровня 3 на уровни 1 и 2 определяется суммой стандартных вероятностей переходов $3 \leftrightarrow 1$ и $3 \leftrightarrow 2$ под действием резонансных гармоник [8, 9]. В то же время для переходов «вверх» стандартные вероятности переходов в системе, находящейся в «чистом» состоянии, справедливы лишь в том случае, если начальное условие соответствует определенной энергии $\mathscr{E}_1$ или $\mathscr{E}_2$. Другая ситуация имеет место при «суперпозиционном» начальном условии для волновой функции:

$$\psi_0 = a_1\psi_1(q) \exp\left(-\frac{i\mathscr{E}_1 t}{\hbar}\right) + a_2\psi_2(q) \exp\left(-\frac{i\mathscr{E}_2 t}{\hbar}\right)$$

(здесь $\psi_{1,2}$ — соответствующие собственные функции оператора энергии, q — совокупность обобщенных координат квантовой системы, коэффициенты $a_{1,2}$ удовлетворяют нормировке $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$). В этом случае рассчитанная традиционным методом возмущений вероятность перехода имеет «интерференционную» структуру, так как суммируются не парциальные вероятности переходов, а возмущения комплексной волновой функции [10]. Предполагая для определенности уровень 3 «размытым» (например, в силу конечности времени жизни на верхнем уровне) в малой окрестности энергии $\mathscr{E}_3^0 = \mathscr{E}_2 + \hbar\omega_2 = \mathscr{E}_1 + \hbar\omega_1$, получаем

$$W(\uparrow) = \frac{\pi}{\hbar^2} \int d\Delta \left\{ \tau(\Delta)\,\delta(\Delta) \left[\sum_{p=1}^{2} |a_p\, d_{3p}\, E_p|^2 + 2\,\mathrm{Re}(a_1 a_2^* \, d_{31} d_{32}^* \, E_1 E_2^*) \right] \right\},$$

где d_{ij} — матричный элемент оператора проекции электродипольного момента на направление $\mathbf{e}$,

$$\Delta = \frac{\mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_1}{\hbar} - \omega_1 = \frac{\mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_2}{\hbar} - \omega_2 = \frac{\mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_3^0}{\hbar},$$

$\tau(\Delta)$ — описывающая размытие верхнего уровня плотность состояний (имеющая в нормировке $\int \tau(\Delta)\, d\Delta = 1$ размерность обратной частоты), $\delta(\Delta)$ — дельта-функция. Очевидно, что при условиях

$$a_{1,2} \neq 0, \qquad \arg(a_1 a_2^*) = \pi - \arg(d_{31} d_{32}^* \, E_1 E_2^*) \tag{3}$$

вероятность перехода $W(\uparrow)$ заведомо меньше суммы обычных вероятностей переходов $3 \leftrightarrow 1$ и $3 \leftrightarrow 2$ с весами $|a_{1,2}|^2$ (см. также [10]). Это обстоятельство иллюстрирует принципиальную возможность стимулированного излучения квантового осциллятора в отсутствие инверсии. Если до включения ВЧ-поля трехуровневый атом находился в смешанном состоянии, характеризуемом матрицей плотности ρ_{ij}, то при помощи изложенной, например в [9], техники можно получить эквивалентные (3) необходимые условия «безынверсного» стимулированного излучения:

$$\rho_{21} \neq 0, \qquad \arg(\rho_{21}) = \pi - \omega_0 t + \arg\left(d_{31} d_{32}^* \, E_1 E_2^*\right). \tag{4}$$

Теперь рассмотрим распределенный в пространстве ансамбль не взаимодействующих друг с другом (для наглядности) трехуровневых атомов описанного выше типа. Такую систему можно охарактеризовать набором матриц плотности ρ_{ij}^k, где индекс k соответствует атому, центр которого расположен в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}_k$. Для волновых полей ($E_{1,2} \to E_{1,2} \exp(i\mathbf{k}_{1,2}\mathbf{r})$) в рамках дипольного приближения условия (4) могут быть выполнены для всех атомов на трассе распространения волн лишь при условии

$$\arg \rho_{21}^k = \varphi_0 - \omega_0 t + (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\,\mathbf{r}_k, \tag{5}$$

где $\varphi_0 = \mathrm{const}$. Последнее соотношение показывает, что для «безынверсного» усиления в распределенном ансамбле, помимо условия временного синхронизма (2), необходимо выполнение соответствующего условия пространственного синхронизма. Это условие удобно сформулировать для зависящей от координат $\mathbf{r}, t$ статистической матрицы $\rho_{ij}(\mathbf{r}, t)$, которая определяет, в частности, неоднородный дипольный момент единичного объема $\mathbf{d}(\mathbf{r}, t)$ (см., также [9]):

$$\mathbf{d}(\mathbf{r},t)\,d^3r = N(\mathbf{r})\,\mathbf{d}_{ji}\,\rho_{ij}(\mathbf{r},t)\,d^3r, \tag{6}$$

где

$$\rho_{ij}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{N(\mathbf{r})}\sum_k \rho_{ij}^k\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k),$$

$$N(\mathbf{r}) = \sum_k \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k)$$

— плотность атомов.

Если расстояние между атомами много меньше длин волн $2\pi/k_{1,2}$, то из определений (6) и условия (5) следует, что матрица $\rho_{ij}(\mathbf{r},t)$ имеет отличный от нуля недиагональный матричный элемент

$$\rho_{21}(\mathbf{r},t) = \sigma_{21}\exp(-i\omega_0 t + i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}),$$

синхронизованный с бихроматическим полем условиями параметрического (комбинационного) резонанса (2),

$$\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = \boldsymbol{\kappa}. \tag{7}$$

Такое состояние электронов на НЧ-переходе называют когерентным[5)] [6, 11]. При этом у высокочастотного дипольного момента единицы объема среды появляются «комбинационные» компоненты, связывающие между собой волновые гармоники $(\omega_1, \mathbf{k}_1)$ и $(\omega_2, \mathbf{k}_2)$:

$$(\mathbf{d}\,\mathbf{e})_{comb} = NE_2\exp[-i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1\mathbf{r})]\,\frac{1}{\hbar}\int d\Delta\left\{\tau(\Delta)\,\xi(\Delta)\,d_{32}d_{31}^*\,\sigma_{21}\right\} +$$
$$+ NE_1\exp[-i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2\mathbf{r})]\,\frac{1}{\hbar}\int d\Delta\left\{\tau(\Delta)\,\xi(\Delta)\,d_{32}^*d_{31}\,\sigma_{21}^*\right\},$$

где $\xi = \mathcal{P}/\Delta - i\pi\delta(\Delta)$, $\mathcal{P}$ — интеграл в смысле главного значения, плотность атомов предполагается однородной. В отсутствие резонансов (т. е. для $\tau(0) = 0$) одновременное усиление ВЧ-волн запрещено соотношениями Мэнли–Роу[6)]:

$$\sum_{1,2}\left(\frac{d}{dt} + 2\gamma_{1,2}\right) Z_{1,2}\,\frac{|E_{1,2}|^2}{\omega_{1,2}} = 0.$$

Здесь

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_{gr\,1,2}\nabla),$$

$\mathbf{v}_{gr\,1,2}$ и $\gamma_{1,2}$ — групповые скорости и стандартные линейные декременты мод,

$$Z_{1,2} = \left[\frac{1}{\omega}\,\frac{\partial}{\partial\omega}\,(\omega^2\varepsilon)\right]_{\omega=\omega_{1,2}},$$

---

5) В этом случае, естественно, в системе существует волна НЧ-поляризации.

6) Фактически, в этом случае имеет место стандартное комбинационное рассеяние.

ε — действительная диэлектрическая проницаемость среды.

Ограничение, накладываемое соотношениями Мэнли–Роу, исчезает, оказывается, при учете излучательных процессов, связанных с «парциальными» резонансами для ВЧ-мод. В качестве иллюстрации рассмотрим простой случай, когда частоты $\omega_{1,2}$ принадлежат центрам соответствующих резонансных линий (т. е. интегралы в смысле главного значения в выражении для «комбинационного» дипольного момента равны нулю). В этом случае укороченные уравнения для двух связанных волновых гармоник имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_1 + \gamma_1 E_1 &= -G_1\,\sigma_{21}\,E_2, \\ \frac{d}{dt}E_2 + \gamma_2 E_2 &= -G_2^*\,\sigma_{21}^*\,E_1, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$G_{1,2} = 4\pi^2\omega_{1,2}\tau(0)\,d_{32}d_{31}^*\,(\hbar Z_{1,2})^{-1}N.$$

Система (8) неустойчива, как нетрудно убедиться, при условии

$$\gamma_1\gamma_2 < G_1G_2^*\,|\sigma_{21}|^2.$$

Если линейная диссипация волн связана исключительно с резонансным поглощением на переходах $3 \leftrightarrow 1$, $3 \leftrightarrow 2$, то линейные декременты можно выразить через соответствующие разности населенностей на уровнях[7] 1, 2, 3 (см., например, [6, 9]):

$$\gamma_{1,2} = 4\pi^2\omega_{1,2}\,\tau(0)\,|d_{31,2}|^2(\hbar Z_{1,2})^{-1}N(n_{1,2}-n_3),$$

где $n_{1,2,3}$ — населенности уровней в нормировке $n_1+n_2+n_3=1$, причем для рассмотренной нами системы с «размытым» верхним уровнем такое выражение для декрементов соответствует простейшему вероятностному распределению населенности на верхнем уровне $n_{e3}(\Delta) = n_3\,\tau(\Delta)$. В этом случае условие неустойчивости сводится к неравенству [6, 11]

$$(n_1-n_3)(n_2-n_3) < |\sigma_{21}|^2. \tag{9}$$

Выражение (9), собственно, и демонстрирует возможность организации стимулированного излучения в среде без традиционной инверсии[8], т. е. при $n_1, n_2 > n_3$.

Рассмотренная выше среда является, конечно, неравновесной уже в силу отличия от нуля недиагональных элементов матрицы плотности [8, 9]. Важно, однако, отметить, что источником энергии при «безынверсной» генерации служит отнюдь не соответствующая этому возмущению матрицы плотности волна НЧ-поляризации, а электроны на

[7] В рамках подхода, основанного на феноменологических уравнениях для матрицы плотности, в выражения для коэффициентов $\gamma_{1,2}$ и $G_{1,2}$ вместо нормированной плотности состояний $\pi\tau(0)$ входит некоторая константа затухания [6, 11].

[8] В [6] неравенство (9) получено в рамках модели, использующей феноменологические уравнения для матрицы плотности.

верхнем энергетическом уровне[9] [6]. В этом смысле мы имеем дело именно с мазерным механизмом генерации.

Простейшим классическим аналогом квантовой λ-схемы является следующая колебательная система с сосредоточенными параметрами (рис. 2). Пусть имеются два радиотехнических ВЧ-контура с собственными частотами $\omega_{1,2} = 1/\sqrt{L_{1,2}C_{1,2}}$ и отрицательным сопротивлением $R_a < 0$. Сами по себе эти контуры, естественно, неустойчивы, однако через индуктивные связи они нагружены на низкочастотный (НЧ) контур с частотой $\omega_0 = = 1/\sqrt{L_0C_0}$ и нелинейным сопротивлением $R_N = R_0(1+\beta I_0)$ (здесь I_0 — ток в НЧ-контуре). Пусть в линейном приближении (при $\beta = 0$) система устойчива. При упрощающих предположениях слабой связи и слабой диссипации

$$\frac{M_{1,2}}{L_{1,2}},\ \frac{M_{1,2}}{L_0},\ -\frac{R_a}{2L_{1,2}\,\omega_{1,2}},\ \frac{R_0}{2L_0\,\omega_0} \ll 1$$

(здесь $M_{1,2}$ — соответствующие коэффициенты взаимоиндукции) условия «линейной» устойчивости следующие:

$$\delta_{1,2} = \frac{M_{1,2}^2 R_0}{2L_{1,2}L_0^2} + \frac{R_a}{2L_{1,2}} > 0.$$

Если, однако, НЧ-колебания тока в «диссипативном» контуре ($I_0 \approx \mathrm{Re}[I_L \exp(-i\omega_0 t)]$) модулируют сопротивление

$$R_N \approx R_0\left\{1 + \beta\ \mathrm{Re}\left[I_L\ \exp(-i\omega_0 t)\right]\right\},$$

то при условии комбинационного резонанса

$$\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 = \omega_0$$

(здесь

$$\tilde{\omega}_{1,2} = \omega_{1,2}\left(1 - \frac{M_{1,2}^2}{2L_{1,2}L_0}\right)$$

— слегка смещенные из-за индуктивных связей частоты колебаний в ВЧ-контурах) возможна неустойчивость. При этом укороченные уравнения для комплексных амплитуд токов в ВЧ-контурах $I_{1,2}$ точно соответствуют системе (8) при смене обозначений

$$E_{1,2} \to I_{1,2}, \quad \gamma_{1,2} \to \delta_{1,2}, \quad G_{1,2} \to \frac{1}{L_{1,2}}, \quad \sigma_{21} \to \frac{M_2 M_1 R_0}{4L_0^2}\beta I_L,$$

а условие неустойчивости имеет вид[10]

$$\left(\frac{M_1^2 R_0}{2L_1 L_0^2} + \frac{R_a}{2L_1}\right)\left(\frac{M_2^2 R_0}{2L_2 L_0^2} + \frac{R_a}{2L_2}\right) < \frac{M_1^2 M_2^2 R_0^2 \beta^2 I_L^2}{16 L_0^4 L_1 L_2}.$$

---

[9] При $n_3 = 0$ условие (9) невыполнимо, так как в силу свойства матрицы плотности [8] $|\sigma_{21}|^2 \leq \leq n_1 n_2$. С другой стороны, условие неустойчивости (9) вообще не зависит от матричного элемента дипольного момента НЧ-перехода.

[10] Без постоянного отрицательного сопротивления ($R_a = 0$) условие неустойчивости может быть выполнено лишь для весьма сильной модуляции ($\beta I_L > 2$), когда сопротивление в схеме является существенно знакопеременной величиной. Это следствие известного (см., например, [12]) свойства колебательных систем: модуляция всегда положительного сопротивления (или, в механической системе, коэффициента трения) не приводит к неустойчивости, так как при такой модуляции в систему не вводится энергия.

Легко понять, что в этой наглядной модели ВЧ-контуры моделируют переходы $3 \leftrightarrow 1$ и $3 \leftrightarrow 2$, отрицательное сопротивление R_a — отличную от нуля населенность на верхнем рабочем уровне, НЧ-контур — переход $2 \leftrightarrow 1$. Сопротивление в НЧ-контуре соответствует населенности на нижних рабочих уровнях квантовой системы. Наконец, модуляция сопротивления в НЧ-контуре под действием возбужденных в нем колебаний моделирует влияние возбуждения когерентного состояния перехода $2 \leftrightarrow 1$ на поглощательную способность трехуровневой λ-системы. Физический механизм неустойчивости в предложенной системе со сосредоточенными параметрами оказывается весьма интересным. Можно убедиться, что неустойчивому решению соответствует «оптимальное» соотношение между фазой биений ВЧ-токов, наведенных в НЧ-контуре и модуляцией нелинейного сопротивления[11]: узлы биений соответствуют максимальному значению сопротивления, пучности — минимальному. Ясно, что при НЧ-колебаниях в противофазе с биениями тока поглощение ВЧ-колебаний в среднем уменьшается, поэтому отрицательное сопротивление может вызвать раскачку ВЧ-колебаний, даже если система была устойчива при постоянном положительном сопротивлении в НЧ-контуре.

Указанный выше физический механизм позволяет предложить аналог «безынверсной» схемы генерации для ансамбля классических электронов-осцилляторов. С макроскопической точки зрения система (8) соответствует параметрическому взаимодействию мод в среде с модулированной проводимостью, неустойчивость в которой обусловлена описанной выше синхронизацией биений ВЧ-поля с НЧ-колебаниями проводимости. Такая модуляция проводимости в ансамбле классических электронов может быть обусловлена низкочастотной модуляцией функции распределения резонансных частиц в условиях циклотронного или черенковского синхронизмов. При этом интересен случай, когда функция распределения «безынверсна» при усреднении по обобщенным координатам в фазовом пространстве или (и) по времени. Точно так же, как и соответствующий ансамбль квантовых осцилляторов, рассматриваемая классическая система не способна усиливать монохроматическое излучение, однако при определенных условиях может отдавать энергию паре волн с «оптимальной» фазой биений относительно фазы НЧ-модуляции.

Основное идеологическое различие «безынверсной» генерации в квантовой и классической системах заключается, по-видимому, в следующем. Движению «классической» частицы соответствует большое число переходов между элементарными квантовыми состояниями. В силу принципиальной «многоуровневости» классической системы в ней будет моделироваться не «чистая» λ-схема, а комбинация этой схемы со всеми ее мыслимыми вариантами и модификациями (см. [6]). В частности, поскольку НЧ-модуляция неизбежно повлияет не только на поглощающую фракцию электронов, но и на излучающие частицы, здесь необходимо отметить так называемую обратную λ-схему, в которой расщеплен не нижний (как в обычной λ-схеме), а верхний рабочий уровень.

Существующий у системы (8) интеграл

$$\dot{W} + Q = 0,$$

[11] В случае модуляции только реактивных элементов в НЧ-контуре развитие неустойчивости при выполнении условий комбинационного резонанса запрещено соотношениями Мэнли–Роу: $\sum\limits_{1,2} \left(d/dt + 2\delta_{1,2}\right) L_{1,2}\omega_{1,2}^{-1} I_{1,2}^2 = 0$.

где

$$W = \frac{|E_1|^2}{2G_1} - \frac{|E_2|^2}{2G_2}, \qquad Q = \gamma_1 \frac{|E_1|^2}{2G_1} - \gamma_2 \frac{|E_2|^2}{2G_2},$$

позволяет формально трактовать параметрическую неустойчивость системы (8) как взаимодействие двух ВЧ-мод с разными знаками энергии [11]. Эта интерпретация, на наш взгляд, не совсем удачна. Дело в том, что в отсутствие параметрической связи рассматриваемые здесь электромагнитные волны не способны усиливаться при введении дополнительного линейного поглощения — т. е. ни одна из них не обладает основным признаком моды с отрицательной энергией[12] [1, 13]. В этой связи сошлемся на работу [14], где было обращено внимание на возможность взрывной параметрической неустойчивости волн именно с положительной энергией в среде с нелинейной проводимостью. В приближении заданной НЧ-накачки рассмотренная в [14] система соответствует уравнениям (8) при $\gamma_{1,2} = 0$.

Итак, в качестве классического аналога «безынверсного» излучения ансамбля квантовых осцилляторов мы собираемся рассмотреть параметрическую неустойчивость электромагнитных волн при периодической модуляции функции распределения «общих» резонансных частиц. Отметим, что в работах [15, 16] в качестве аналога «безынверсного» квантового прибора предлагается модифицированный вариант оптического клистрона [17]. Имеется в виду двухсекционный лазер на свободных электронах (или черенковский прибор). В клистронном промежутке предполагается пространственное разделение траекторий электронов таким образом, что время пролета промежутка различно для «излучающей» и «поглощающей» фракций функции распределения электронов по скоростям. При этом для «поглощающих» электронов фаза взаимодействия с ВЧ-полем за время пролета промежутка меняется на величину $\pi(2n+1)$, а для «излучающих» — на $2\pi n$. Таким образом, «поглощающая» фракция функции распределения не должна вносить вклада в резонансное взаимодействие электронного потока с ВЧ-полем. Не обсуждая практическую реализуемость данной схемы, заметим, что снижение требований к скоростному разбросу здесь достигается за счет повышения требований к пространственной локализации пучка (иначе трудно разделить в пространстве траектории электронов с небольшой разницей скоростей). В любом случае описанная выше система не предполагает характерного для квантовой системы излучения разночастотных мод с параметрической связью между ними.

3. ЦИКЛОТРОННАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НА РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТИЦАХ (ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ)

В качестве классического аналога «безынверсной» генерации в ансамбле квантовых осцилляторов удобно рассмотреть циклотронное излучение, поскольку в квантовом

---

[12] Для волны с отрицательной энергией (в традиционном понимании этого термина) любая диссипация является механизмом «обратной связи», позволяющим реализовать избыток энергии неравновесной среды. В этом смысле параметрическая связь с волной положительной энергии лишь играет роль некоторой эффективной диссипации. Что касается рассматриваемой здесь неустойчивости волн с положительной энергией, то для ее реализации принципиально важна именно немонохроматичность ВЧ-поля.

пределе движению частиц в магнитном поле соответствует система дискретных уровней Ландау [2, 8]. Очевидно, что аналогом переходов $3 \leftrightarrow 1$ и $3 \leftrightarrow 2$ в этом случае может являться резонанс на гармониках циклотронной частоты N и $N-L$, а «когерентному» состоянию низкочастотного перехода $2 \leftrightarrow 1$ соответствуют колебания функции распределения на гармонике циклотронной частоты с номером L.

Рассмотрим две линейно поляризованные волны, распространяющиеся поперек постоянного магнитного поля $\mathbf{H}_0 = \mathbf{z} H_0$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} E_j \exp(ik_j x - i\omega_j t), \tag{10}$$

где $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega - \Omega$, $k_1 = k$, $k_2 = k - \kappa$, $\mathbf{z}_0$ и $\mathbf{y}_0$ — соответствующие орты координатной системы (z, y, x). Пусть частоты волн совпадают с гармониками релятивистской циклотронной частоты частиц с энергией $\mathscr{E}_0 = mc^2\gamma_0$ (γ — гамма-фактор):

$$\omega_R = \frac{eH_0}{mc\gamma_0} = \frac{\omega}{N} = \frac{\omega - \Omega}{N - L} = \frac{\Omega}{L}. \tag{11}$$

В случае слабого возмущения энергии резонансных частиц, когда $|\gamma - \gamma_0| \ll \gamma_0$, их движение в окрестности циклотронных резонансов можно описывать уравнениями нелинейного маятника (см. [7, 18, 19]). Движению под действием резонансных гармоник в таком приближении соответствует следующая система укороченных уравнений [18, 20]:

$$\begin{aligned} &\dot{w} = F(\theta, t), \quad \dot{\theta} = \omega_H(w), \\ &\rho_{\parallel} = \text{const}, \quad X = \text{const}, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} &\omega_H = \omega_R \left(1 - w/\gamma_0\right), \\ &F = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2} g_j \alpha_j \exp(ik_j X + iN_j\theta - i\omega_j t). \end{aligned} \tag{13}$$

В уравнениях (12), (13) θ — фаза циклотронного вращения, $w = \gamma - \gamma_0$ — возмущение релятивистского гамма-фактора вследствие возмущения поперечного импульса $p_\perp$ (продольный импульс $p_\parallel = \rho_\parallel mc$ не меняется), $N_1 = N$, $N_2 = N - L$, $g_j = (p_{\perp 0}/mc\gamma_0)\, J'_{N_j}(\chi_j)$, $p_{\perp 0} = mc\sqrt{\gamma_0^2 - 1 - \rho_\parallel^2}$, J'_{N_j} — производная функции Бесселя по аргументу $\chi_j = k_j r_H$, $r_H = p_{\perp 0}/m\gamma_0\omega_R$ — гирорадиус резонансных частиц. Наконец, $\alpha_j = eE_j/mc$ — нормированные амплитуды волн, X — координата центра «ларморовского кружка».

Далее для простоты мы будем полагать, что все электроны имеют идентичный продольный импульс $\rho_\parallel$ (соответствующее обобщение тривиально). Рассмотрим функцию распределения $f(\theta, w, X, t)$, определяемую уравнением Лиувилля в пространстве укороченных переменных (см. [21]):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega_H \frac{\partial f}{\partial \theta} + F \frac{\partial f}{\partial w} = 0. \tag{14}$$

Для амплитуд волн α_j также воспользуемся укороченными уравнениями. В случае «квазивакуумного» дисперсионного соотношения получаем

$$\dot{\alpha}_j = -\frac{2\pi e}{mc} I_j, \tag{15}$$

где амплитуды резонансных гармоник тока I_j выражаются через функцию распределения (см., например, [20]):

$$I_j = ec\left\langle \int dw\, d\theta \left[f(\theta, w, X, t)\, g_j \exp(-iN_j\theta - ik_jX + i\omega_j t)\right]\right\rangle. \tag{16}$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по времени на периоде $T = 2\pi/\Omega$ и по координате X на длине $l = 2\pi/\kappa$.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ функция распределения промодулирована по углу циклотронного вращения (гироуглу) θ и координате X:

$$f_i(t=0) = f_0(w) + f_L(w)\cos(\varphi + L\theta + \kappa X). \tag{17}$$

В отсутствие воздействия ВЧ-поля функция распределения f_i в последующие моменты времени определяется из (17) заменой $\theta \to \theta - \omega_H t$. При этом усредненная по циклотронной фазе θ функция распределения

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_i\, d\theta$$

является «безынверсной» в любой момент времени и в каждой точке X, если в рассматриваемой области энергий $\partial f_0/\partial w < 0$. Так как в квантовом пределе фаза θ не определена для заданной энергии $mc^2(\gamma_0 + w)$, то в этом случае мы действительно имеем классический аналог «безынверсионного» состояния квантовой системы. Модуляция функции распределения по гироуглу с периодом $2\pi/L$ является аналогом когерентного состояния квантового НЧ-перехода.

Далее мы рассмотрим времена t, меньшие времени «баллистической» релаксации модулированной компоненты функции распределения[13]:

$$\omega_R t \ll \frac{\gamma_0}{\langle \Delta w\rangle L}, \tag{18}$$

где

$$\langle \Delta w\rangle \sim \left|\frac{f_L}{\partial f_L/\partial w}\right| \tag{19}$$

— характерный разброс модулированной составляющей начального распределения по энергиям. Будем решать линеаризованное кинетическое уравнение

---

[13] В соответствующей квантовой системе есть, очевидно, симметричное требование: рассматриваемые времена должны быть малы по сравнению с временем релаксации «когерентного» состояния НЧ-перехода.

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \omega_H(w)\right] \tilde{f} = -F(\theta, t) \left[\frac{\partial f_0}{\partial w} + \frac{\partial f_L}{\partial w} \cos(\varphi + L\theta + \kappa X - L\omega_H t)\right] \tag{20}$$

(условие (18) позволяет не дифференцировать по w фазу $\varphi + L\theta + \kappa X - -L\omega_H(w)\,t$). В приближении не слишком больших инкрементов можно воспользоваться решением (20) при фиксированных амплитудах волн $\alpha_{1,2}$ (см., например, [21, 22]). Для начального условия $\tilde{f}(t = 0) = 0$ при учете условий синхронизма (11) получаем следующие выражения для резонансных гармоник функции распределения:

$$\begin{aligned}
\tilde{f} = &- \sum_{j=1}^{2} g_j \alpha_j \exp\left[i(N_j\theta + k_j X - \omega_j t)\right] \hat{\xi}(\Delta_j) \frac{\partial f_0}{\partial w} - \\
&- \frac{1}{2} g_2 \alpha_2 \exp\left[i(N\theta + kX - \omega t)\right] \sigma\, \hat{\xi}(\Delta_2) \frac{\partial f_L}{\partial w} \exp(i\varphi) - \\
&- \frac{1}{2} g_1 \alpha_1 \exp\left\{i\Big[(N - L)\theta + (k - \kappa)X - (\omega - \Omega)t\Big]\right\} \sigma^* \hat{\xi}(\Delta_1) \frac{\partial f_L}{\partial \omega} \exp(-i\varphi).
\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\hat{\xi}(x) = \frac{i}{x}\,[1 - \cos(xt)] + \frac{\sin(xt)}{x}, \\
&\Delta_1 = \omega - N\omega_H(w), \qquad \Delta_2 = \omega - \Omega - (N - L)\,\omega_H(w), \\
&\sigma = \exp\left[i(L\omega_H - \Omega)t\right] = \exp\left\{i\,\frac{L\omega_R}{\gamma_0}\, wt\right\}.
\end{aligned}$$

В силу неравенства (18) в (21) можно положить

$$\sigma = \sigma^* = 1. \tag{22}$$

При условиях

$$\frac{\omega_{1,2}}{\gamma_0}\,\langle \Delta w \rangle t \gg 1, \qquad \frac{\omega_{1,2}}{\gamma_0}\,\langle \Delta w_0 \rangle t \gg 1 \tag{23}$$

(здесь $\langle \Delta w_0 \rangle$ — масштаб изменения стационарного распределения $f_0(w)$) оператор $\hat{\xi}$ стремится к стандартному виду (см., например, [9, 22]):

$$\hat{\xi} \to \frac{i\mathscr{P}}{x} + \pi\delta(x). \tag{24}$$

Таким образом, мы предполагаем, что асимптотическое решение, отвечающее «правилу обхода» Ландау, успевает сформироваться на временах, много меньших времени «баллистической» релаксации НЧ-модуляции функции распределения. При этом одновременное выполнение соответствующих неравенств (18) и (23) возможно лишь при существовании дополнительного малого параметра

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{L}{N} = \eta \ll 1. \tag{25}$$

Подставив в уравнения возбуждения волн (15) соотношения (16), (21), (22), (24), а также учитывая связи (11), получаем

$$\begin{gathered}\dot{\alpha}_1 + (\gamma_l + i\delta_l)\alpha_1 = -ae^{i\varphi}(\gamma_n + i\delta_n)\,\alpha_2,\\ \dot{\alpha}_2 + b(\gamma_l + i\delta_l)\alpha_2 = -e^{-i\varphi}(\gamma_n + i\delta_n)\,\alpha_1,\end{gathered} \tag{26}$$

где

$$\begin{gathered}\gamma_l = -\frac{2\pi^2 e^2}{m}\, g_1^2 \int \frac{\partial f_0}{\partial w}\, \delta\Big(\omega - N\omega_H(w)\Big) dw,\\ \gamma_n = -\frac{\pi^2 e^2}{m}\, g_1 g_2 \int \frac{\partial f_L}{\partial w}\, \delta\Big(\omega - N\omega_H(w)\Big) dw,\\ \delta_l = -\frac{2\pi e^2}{m}\, g_1^2 \int \frac{\mathscr{P}\,\partial f_0/\partial w}{\omega - N\omega_H(w)}\, dw,\\ \delta_n = -\frac{\pi e^2}{m}\, g_1 g_2 \int \frac{\mathscr{P}\,\partial f_L/\partial w}{\omega - N\omega_H(w)}\, dw,\end{gathered} \tag{27}$$

$$a = \frac{1}{1-\eta}, \qquad b = \frac{g_2^2}{g_1^2}\, a. \tag{28}$$

Экспоненциальные ($\alpha_{1,2} \sim e^{\mu t}$) решения системы (26) определяются характеристическим уравнением

$$(\mu + \gamma_l + i\delta_l)\Big[\mu + b(\gamma_l + i\delta_l)\Big] = a(\gamma_n + i\delta_n)^2 \tag{29}$$

и следующей из (26) связью

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = K = \frac{-ae^{i\varphi}(\gamma_n + i\delta_n)}{\mu + \gamma_l + i\delta_l}. \tag{30}$$

В простейшем случае, когда $\delta_l = \delta_n = 0$[14], система (26) соответствует уравнениям (8), описывающим «безынверсное» усиление волн в квантовой системе. В случае $\gamma_l < 0$ неустойчивое решение существует при условии

$$a\gamma_n^2 > b\,\gamma_l^2,$$

которое сводится к физически прозрачному аналогу «квантового» условия (9):

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\partial f_L}{\partial w}\right|_{\omega_H = \omega/N} > -\left(\frac{\partial f_0}{\partial w}\right)_{\omega_H = \omega/N} \tag{31}$$

Неравенство (31) обеспечивает возникновение достаточно сильной периодической по переменным θ, X и t «инверсии» в фазовом пространстве.

Решение характеристического уравнения (29) в общем случае выглядит довольно громоздко; тем не менее существование неустойчивых решений с $\operatorname{Re}\mu > 0$ в случае достаточно больших значений $\partial f_L/\partial w$ не вызывает сомнений. Например, при условии

$$|\gamma_n + i\delta_n| \gg \Big|(1-b)(\gamma_l + i\delta_l)\Big|$$

[14] Частотные сдвиги δ_l и $b\delta_l$ можно «убрать», например, модификацией внешней электродинамической системы, величина δ_n равна нулю для нечетного по w возмущения $f_L(w)$.

неустойчивое решение существует при выполнении еще одного неравенства, которое отличается от (31) лишь численным коэффициентом в левой части:

$$\frac{1}{2} \to \frac{1+b}{4\sqrt{a}}.$$

Точно так же, как и в рассмотренной в разд. 2 системе с сосредоточенными параметрами, неустойчивому решению системы (26) соответствует определенная «оптимальная» синхронизация между биениями ВЧ-колебаний и НЧ-модуляцией системы. Действительно, воспользуемся интегралом (модифицированным соотношением Мэнли–Роу) системы (26):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\gamma_l\right) \frac{|\alpha_1|^2}{2a} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2b\gamma_l\right) \frac{|\alpha_2|^2}{2} = -\operatorname{Re}(\gamma_n \alpha_2 \alpha_1^* e^{i\varphi}),$$

откуда для неустойчивого решения следует

$$-\operatorname{Re}\gamma_n K^* e^{i\varphi} = \frac{\operatorname{Re}\mu + \gamma_l}{a} |K|^2 + \operatorname{Re}\mu + b\gamma_l > 0. \tag{32}$$

Учитывая выражения (27), из (32) получаем

$$g_1 g_2 \operatorname{Re}\left[e^{i\varphi} K^* \left(\frac{\partial f_L}{\partial w}\right)_{\omega_H(w)=\omega/N}\right] > 0. \tag{33}$$

При условии (33) узлы и пучности биений «эффективной силы»

$$F = \operatorname{Re}\left[\{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \exp[-i(L\theta + \kappa X - \Omega t)]\} \exp[i(N\theta + kX - \omega t)]\right]$$

приходятся соответственно на точки с отрицательной и положительной производной по энергии от осциллирующей компоненты функции распределения

$$\tilde{f}_L \approx f_L(w)\cos(\varphi + L\theta + \kappa X - \Omega t).$$

До сих пор мы не обсуждали возможные способы формирования модулированного начального распределения (17), удовлетворяющего условию (31). Не вдаваясь в детальный анализ этого вопроса, мы здесь ограничимся лишь демонстрацией принципиальной возможности создания необходимого начального распределения.

Пусть в момент времени $t = -T$ имеется распределение по поперечным энергиям типа «размытого» ринга:

$$f_0(w) = \frac{n_b}{\sqrt{\pi}\langle\Delta w\rangle} \exp\left(\frac{(w - w_b)^2}{\langle\Delta w\rangle^2}\right). \tag{34}$$

Значению $w \equiv \gamma - \gamma_0 = 0$ соответствует резонансная энергия $mc^2\gamma_0$, удовлетворяющая условию синхронизма (11). Максимуму функции распределения (т.е. $w = w_b$) соответствует энергия частиц $\mathscr{E}_b = mc^2(\gamma_0 + w_b)$. Рассмотрим случай $w_b < 0$, когда резонансные частицы находятся на устойчивом «безынверсном» склоне невозмущенной функции распределения.

Пусть в течение времени от $t = -T$ до $t = 0$ действует электромагнитное волновое поле с «низкой» частотой $\Omega = L\omega_R$ и волновым вектором κ:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{y}_0 \, \mathrm{Re}\,[E_0 \exp(i\kappa x - i\Omega t)] \,.$$

Соответствующее линейное возмущение функции распределения в момент времени $t = 0$ равно

$$\tilde{f}_L = f_L \exp(iL\theta + i\kappa X), \tag{35}$$

где

$$f_L = -g_0\alpha_0 \frac{\partial f_0}{\partial w} \int\limits_{-T}^{0} \exp\left\{ i\Big[L\omega_H(w) - \Omega \Big] t \right\} dt,$$

$$\alpha_0 = \frac{eE_0}{mc}, \quad g_0 = \frac{p_{\perp 0}}{\gamma_0 mc} J_L'(\chi_0), \quad \chi_0 = \kappa r_H \,.$$

Наиболее простым является случай достаточно «короткодействующей» накачки, когда

$$T\omega_R \ll \frac{\gamma_0}{\langle \Delta w \rangle \, L} \,. \tag{36}$$

В этом приближении получаем простое соотношение

$$f_L = -g_0\alpha_0 \, T \, \frac{\partial f_0}{\partial w} \,.$$

Критерий неустойчивости (31) выполнен, таким образом, при условии

$$\frac{T}{2} \left| g_0\alpha_0 \frac{\partial^2 f_0}{\partial w^2} \right|_{w=0} > -\left(\frac{\partial f_0}{\partial w} \right)_{w=0} \,. \tag{37}$$

Из (37) следует, что выполнение неравенства

$$\langle \Delta w \rangle \gg \frac{T}{2} \left| \alpha_0 g_0 \right| > |w_b|$$

гарантирует реализацию «безынверсной» неустойчивости даже в рамках линейного приближения по амплитуде накачки. Случай $w_b = 0$ соответствует «беспороговой» неустойчивости, так как при этом резонансные частицы находятся в максимуме функции распределения (34) и линейные декременты ВЧ-волн равны нулю.

Выше мы рассмотрели неустойчивость в случае весьма сильной неравновесности исходного распределения по энергиям; тем не менее в области резонансных частиц эта система действительно «безынверсна» с точки зрения стандартной линейной теории. При этом резонанс на «безынверсном» склоне функции распределения соответствует генерации волн с большей частотой, чем при резонансе с частицами из области инверсии. Важно отметить, что для монотонно убывающих по энергиям исходных распределений «безынверсная» неустойчивость возможна, по-видимому, только если время предварительного воздействия НЧ-поля соизмеримо с периодом «захвата» частиц[15] в поле волны конечной амплитуды[16]

$$T_b = 2\pi(L\omega_R\, g_0\alpha_0)^{-1/2}.$$

В заключение этого раздела отметим, что аналогичная параметрическая неустойчивость на резонансных частицах может быть реализована, в принципе, и для черенковского резонанса. Последнее утверждение следует из формальной эквивалентности уравнений (12) и уравнений движения заряженных частиц в поле продольных волн. Однако необходимые резонансные условия могут быть выполнены в таком случае лишь для замедленных продольных волн без дисперсии, когда

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\partial\omega}{\partial k} < c.$$

В этом смысле рассмотренная выше «циклотронная» система представляется более перспективной, так как для ее реализации достаточно «вакуумных» электромагнитных мод.

4. КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ЦИКЛОТРОННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НА РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТИЦАХ

Анализ энергетических соотношений в рассматриваемой системе требует, естественно, выхода за рамки линейной теории. Для соответствующего обобщения мы воспользуемся методикой квазилинейной теории волн в плазме. В духе этого подхода (см., например, [1, 24]) предположим, что в малых окрестностях циклотронных частот $N\omega_R$ и $(N-L)\omega_R$ возбуждены спектры с наборами частот $\omega_{1p} = \omega_p$ и $\omega_{2p} = \omega_p(N-L)/N$, где $p = 1, 2, \ldots, \infty$. Как и в стандартном подходе квазилинейной теории, мы рассмотрим набор гармоник со случайными фазами. Однако комплексные амплитуды E_{1p} и E_{2p} пары гармоник с частотами ω_p и $\omega_p(N-L)/N$ связаны между собой соотношением (30), так как каждая такая пара образует линейное решение системы второго порядка (26). Кроме того, построение квазилинейной теории в данном случае осложнено еще и необходимостью получения отдельного соотношения для НЧ-осцилляций функции распределения с частотой $\Omega \approx L\omega_R$.

Чтобы не усложнять дальнейшее изложение чересчур громоздкими формулами, введем упрощающие (но в сущности непринципиальные) предположения. Во-первых, предположим, что «коэффициенты связи» в уравнениях движения (12), (13) близки друг к другу:

$$g \simeq g_{1,2} \gg |g_1 - g_2|. \tag{38}$$

Учитывая также неравенство (25), в этом случае в системе (26) можно положить

$$a \simeq 1, \qquad b \simeq 1 \tag{39}$$

---

15) Применительно к случаю циклотронного резонанса эффект захвата описан, например, в [19, 21].

16) В квантовой системе аналогичный метод предварительного создания необходимой «НЧ-когерентности» соответствует воздействию «$\pi/2$-импульса» НЧ-излучения [23].

и использовать упрощенные соотношения для инкремента неустойчивости и связи между комплексными амплитудами усиливаемой «бихроматы»:

$$\operatorname{Re}\mu = \frac{2\pi^2 e^2}{m} g^2 \int \left[\frac{\partial f_0}{\partial w} + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial f_L}{\partial w}\right|\right] \delta\Big(\omega - N\omega_H(w)\Big) dw, \tag{40}$$

$$K = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = e^{i\varphi} \operatorname{sign}\frac{\partial f_L}{\partial w}. \tag{41}$$

Кроме того, учитывая условие $|N\omega_R - \omega_p| \ll \omega_R$, а также неравенства (25) и (18), можно упростить связь между частотами и волновыми векторами наборов резонансных гармоник:

$$\omega_{1p} - \omega_{2p} \simeq \Omega, \qquad k_{1p} - k_{2p} \simeq \kappa. \tag{42}$$

В результате указанных упрощений кинетическое уравнение (14) сводится к следующему виду:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega_H(w)\frac{\partial f}{\partial \theta} = -g\sum_p \operatorname{Re}\Big\{ \alpha_{1p}\exp(iN\theta + ik_pX - i\omega_p t) \times \\ \times \Big[1 + K\exp(i\Omega t - i\kappa X - iL\theta)\Big]\Big\} \frac{\partial f}{\partial w}. \tag{43}$$

Усредненное по ансамблю случайных фаз $\varphi_p = \arg \alpha_{1p}$ решение будем искать в виде

$$\langle f\rangle_{\varphi_p} = f_0(w,t) + f_L(w,t)\cos(\varphi + L\theta + \kappa X - \Omega t). \tag{44}$$

Важно отметить, что модулированная компонента функции $\langle f\rangle_{\varphi_p}$ может иметь такой вид лишь при условии (18), когда в кинетическом уравнении (43) можно пренебречь «баллистическим» членом[17] $i\Big[L\omega_H(w) - \Omega\Big] f_L$. Далее, в кинетическом уравнении (43), как обычно, методом возмущений найдем билинейные поправки $\sim\alpha^2$, а затем проведем усреднение по ансамблю случайных фаз φ_p. Учитывая соотношения (18), (39), (41) и переходя от суммирования по дискретному спектру к интегрированию по непрерывной спектральной интенсивности (см., например, [1, 24]),

$$\sum_p |\alpha_{1p}|^2(\ldots) \to \int_\omega |\alpha_1|^2_\omega(\ldots)\, d\omega,$$

получаем следующие уравнения для функции распределения:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{w}\left[D(w)\left(\frac{\partial f_0}{\partial w} + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial f_L}{\partial w}\right|\right)\right], \tag{45}$$

$$\frac{\partial f_L}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial w}\left[D(w)\left(\operatorname{sign}\frac{\partial f_L}{\partial w}\right)\frac{\partial f_0}{\partial w}\right], \tag{46}$$

---

[17] Это можно сделать еще и потому, что при условии $N \gg L$ время корреляции ВЧ-поля много меньше времени баллистического «размытия» модулированной компоненты функции распределения f_L.

где

$$D(w) = g^2\pi \int\limits_{\omega} |\alpha_1|^2_\omega \, \delta\Big(\omega - N\omega_H(w)\Big) d\omega. \tag{47}$$

Уравнения для спектральных интенсивностей $|\alpha_1|^2_\omega$ и $|\alpha_2|^2_\omega$ следуют из линейной теории. Используя выражение (40), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}|\alpha_1|^2_\omega = \frac{4\pi^2 e^2 g^2}{m}|\alpha_1|^2_\omega \int \left(\frac{\partial f_0}{\partial w} + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial f_L}{\partial w}\right|\right)\delta\Big(\omega - N\omega_H(w)\Big) dw, \tag{48}$$

а из (41) следует

$$|\alpha_1|^2_\omega \simeq |\alpha_2|^2_{\omega-\Omega} \tag{49}$$

(в силу последнего соотношения коэффициент диффузии $D(w)$ удается выразить через спектральную интенсивность $|\alpha_1|^2_\omega$).

Система (45)–(48) удовлетворяет законам сохранения

$$\int\limits_{w} f_0(w)\, dw = \text{const}, \qquad mc^2 \int\limits_{w} (\gamma_0 + w)\, f_0(w)\, dw + I_e = \text{const}, \tag{50}$$

где

$$I_e = \frac{m^2c^2}{e^2}\int\limits_{\omega}\left(\frac{|\alpha_1|^2_\omega}{8\pi} + \frac{|\alpha_2|^2_\omega}{8\pi}\right) d\omega = \frac{m^2c^2}{e^2}\int\limits_{\omega}\frac{|\alpha_1|^2_\omega}{4\pi}\, d\omega \tag{51}$$

—энергия электромагнитного поля. Кроме того, из (46) можно получить весьма наглядное соотношение для эволюции амплитуды модулированной компоненты «медленной» функции распределения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f_L^2(w)\, dw = -\frac{1}{2}\int \left|\frac{\partial f_L}{\partial w}\right| D(w)\, \frac{\partial f_0}{\partial w}\, dw. \tag{52}$$

На основании вышеприведенных соотношений квазилинейной теории можно провести ряд аналогий с соответствующей квантовой системой.

1) Из уравнений (45), (48) следует, что в приближении фиксированной НЧ-модуляции «медленная» функция распределения $f_0(w)$ релаксирует не к «стандартному» плато, а к состоянию с отрицательной производной по w. Это состояние соответствует порогу рассматриваемой параметрической неустойчивости:

$$\frac{\partial f_0}{\partial w} \to -\frac{1}{2}\left|\frac{\partial f_L}{\partial w}\right| \tag{53}$$

в области $D(w) \neq 0$. Таким образом, в процессе «безынверсной» генерации уменьшение энергии электронного ансамбля сопровождается образованием функции распределения с более резким спадом по энергиям в области резонансных частиц. Этот эффект соответствует обеднению верхнего рабочего уровня в квантовой «безынверсной» системе (см. [6]).

2) Из уравнения (52) следует, что в «безынверсной» системе (т. е. при $\partial f_0/\partial w < 0$) биения ВЧ-поля усиливают НЧ-модуляцию функции распределения. Этот эффект также имеет аналог в квантовой системе — возбуждение и поддержание когерентного состояния НЧ-перехода внешним бихроматическим полем [6, 11].

Отметим, что в рамках только системы уравнений (45)–(49) возможность выхода на какой-то однозначный стационарный режим весьма проблематична. Дело в том, что определяемое условием (53) стационарное состояние для усредненной компоненты функции распределения f_0 и спектральной интенсивности $|\alpha_{1,2}|^2_\omega$ является таковым лишь в приближении постоянной амплитуды НЧ-модуляции f_L. Сама же величина $f_L(w)$, как это ясно из соотношений (46) и (52), продолжает возрастать и при условии[18] (53). По-видимому, эта тенденция в какой-то мере отражает «взрывной» характер параметрической неустойчивости в средах с нелинейной проводимостью, когда усиление пары ВЧ-мод сопровождается также и усилением НЧ-колебаний (см. [14]). Механизмы установления стационарного состояния, скорее всего, следует искать за рамками рассмотренной упрощенной модели («баллистическая» релаксация НЧ-модуляции, нелинейный сдвиг частоты волн, «захват» частиц и т. д.).

Из законов сохранения (50) очевидно, что при «безынверсной» генерации ВЧ-поле получает энергию от «медленной» функции распределения $f_0(w)$, как и при обычной мазерной неустойчивости. При этом сами по себе уравнения квазилинейной теории и условие неустойчивости (31), в общем, не ограничивают класс исходных функций распределения $f_0(w)$. Такие ограничения, однако, должны возникнуть при рассмотрении того или иного конкретного способа модуляции функции распределения резонансных частиц.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предыдущих разделах мы показали, что циклотронная параметрическая неустойчивость на резонансных частицах является прямым классическим аналогом эффекта «безынверсной» генерации в квантовой трехуровневой системе. Очевидна возможность обобщения рассмотренного режима на случай генерации ВЧ-сигнала, образованного произвольным числом различных гармоник. Для классической системы, однако, возникает следующий вопрос. Может ли энергия, излученная в ВЧ-моды в безынверсном режиме, превышать энергию, вносимую в систему при возбуждении НЧ-модуляции? Такая возможность очевидна в случае, когда для реализации рассматриваемой неустойчивости достаточно линейного режима НЧ-модуляции исходной функции распределения частиц (такой пример приведен в разд. 3). В общем же случае ответ на этот вопрос неоднозначен и зависит от вида исходной функции распределения, конкретной схемы накачки и механизма насыщения неустойчивости. Основные направления исследований в этой области, должны быть, по-видимому, следующими:

---

[18] Верно и обратное: следующее из (46), (52) условие стационарности для амплитуды модуляции ($\partial f_0/\partial w = 0$) не является таковым для функций $f_0(w)$ и $|\alpha_{1,2}|^2_\omega$, если $\partial f_L/\partial w \neq 0$. Что касается очевидного стационарного режима, в котором $\partial f_0/\partial w = \partial f_L/\partial w = 0$ при $D(w) \neq 0$, то из законов сохранения (50) следует, что для неустойчивого «безынверсного» начального состояния релаксация к подобному стационарному режиму запрещена условием $I_e > 0$.

1) Анализ эффективности различных схем предварительной НЧ-накачки для различных исходных функций распределения электронов.

2) Исследование схемы с постоянно действующим источником НЧ-модуляции.

3) Построение самосогласованной теории «безынверсной» неустойчивости, учитывающей эволюцию НЧ-модуляции функции распределения резонансных частиц в результате «баллистической» релаксации и влияния двухчастотного ВЧ-поля.

4) Анализ влияния таких нелинейных эффектов, как «захват» резонансных частиц в мощном поле, нелинейный сдвиг частот и (или) волновых векторов ВЧ-мод.

Прогресс в решении обозначенных выше задач позволит выяснить возможности практического применения обсуждаемого эффекта. На основании полученных в данной работе результатов можно, во всяком случае, предполагать, что циклотронная параметрическая неустойчивость на резонансных частицах может быть использована как метод конверсии микроволнового излучения с повышением частоты. Речь идет об излучении циклотронных гармоник с большими номерами, возбуждаемом накачкой на низших гармониках. В частности, для реализации квазистационарной «безынверсной» генерации можно пропустить электронный поток через модулирующую секцию (где возбуждены электромагнитные колебания на низкой гармонике циклотронной частоты), а затем — через рабочий резонатор.

По сравнению со стандартным умножением циклотронной частоты [20] этот режим, казалось бы, может иметь определенное преимущество. Дело в том, что для прямого умножения частоты НЧ-накачки в M раз требуется нелинейность соответствующего порядка (или не степенная нелинейность). В то же время для описанной выше параметрической неустойчивости, даже на сколь угодно высоких гармониках циклотронной частоты вполне достаточно квадратичной нелинейности, а нелинейность низшего порядка соответствует, естественно, меньшему уровню мощности НЧ-накачки. Кроме того, «безынверсная» природа рассматриваемой неустойчивости позволяет надеяться, что такой метод конверсии будет не очень критичен к качеству электронного потока.

В любом случае дальнейшие исследования в области «безынверсного» стимулированного излучения коллективов классических осцилляторов-электронов представляются интересным направлением в физике взаимодействия излучения с веществом.

Авторы благодарны А. А. Белянину, В. В., Вл. В. и О. А. Кочаровским, А. Г. Литваку, М. И. Рабиновичу, В. Е. Семенову, И. Д. Токману, А. М. Фейгину и Г. М. Фрайману за обсуждение различных аспектов рассмотренных в данной работе проблем.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 96-15-96934).

Литература

1. Б. Б. Кадомцев, *Коллективные эффекты в плазме*, Наука, Москва (1988).
2. В. В. Железняков, *Электромагнитные волны в космической плазме*, Наука, Москва (1977).
3. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. вузов, сер. Радиофизика **10**, 1414 (1967).
4. Ф. Хопф, Т. Купер, Д. Мур, М. Скалли, в сб. *Генераторы когерентного излучения на свободных электронах*, под ред. А. А. Рухадзе, Мир, Москва (1983).
5. А. В. Гапонов-Грехов, М. И. Петелин, в сб. *Наука и человечество*, Знание, Москва (1980), с. 283.

6. O. Kocharovskaya, Phys. Rep. **219**, 175 (1992).
7. В. Л. Братман, Н. С. Гинзбург, Г. С. Нусинович и др., в сб. *Релятивистская высокочастотная электроника*, под ред. А. В. Гапонова-Грехова, ИПФ АН СССР, Горький (1979), с. 157.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989), с. 188.
9. В. М. Файн, *Фотоны и нелинейные среды*, Советское радио, Москва (1972).
10. E. Arimondo and G. Orriolis, Nuovo Gimento Lett. **17**, 333 (1976).
11. O. Kocharovskaya and P. Mandel, Phys. Rev. A **42**, 523 (1990).
12. Л. И. Мандельштам, *Материалы к монографии о параметрической генерации переменных токов*, Полное собрание трудов под ред. С. М. Рытова, Изд.-во АН СССР, Ленинград (1947), т. II, с. 342.
13. А. Б. Михайловский, *Теория плазменных неустойчивостей*, Атомиздат, Москва (1975), с. 32.
14. С. В. Кияшко, М. И. Рабинович, В. П. Реутов, Письма в ЖЭТФ **16**, 384 (1972).
15. B. Sherman, G. Kurizki, D. E. Nikonov, M. O. Scully, Phys. Rev. Lett. **75**, 4602 (1995).
16. D. E. Nikonov, B. Sherman, G. Kurizki, and M. O. Scully, Opt. Commun. **123**, 363 (1996).
17. Н. А. Винокуров, А. П. Скринский, в сб. *Релятивистская высокочастотная электроника*, под ред. Гапонова-Грехова, ИПФ АН СССР, Горький (1981), с. 204.
18. А. Б. Киценко, И. М. Панкратов, К. Н. Степанов, ЖТФ **45**, 912 (1975).
19. A. G. Litvak, A. M. Sergeev, E. V. Suvorov, M. D. Tokman, and I. V. Khazanov, Phys. Fluids B **5**, 4347 (1993).
20. Н. С. Гинзбург, ЖТФ **56**, 1433 (1986).
21. E. V. Suvorov and M. D. Tokman, Plasma Phys. **25**, 723 (1983).
22. T. O'Neil, Phys. Fluids **8**, 2255 (1965).
23. О. А. Кочаровская, Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук, ИПФ РАН, Нижний Новгород (1996).
24. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин и др., *Электродинамика плазмы*, Наука, Москва (1974), с. 443.