

## КИНЕТИКА ВИХРЕВОЙ РЕШЕТКИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ЖЕСТКИХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

С. Е. Савельев<sup>а</sup>, Л. М. Фишер<sup>а</sup>, В. А. Ямпольский<sup>б</sup>

<sup>а</sup> *Всероссийский электротехнический институт  
111250, Москва, Россия*

<sup>б</sup> *Институт радиофизики и электроники Национальной академии наук Украины  
310085, Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 27 декабря 1996 г.

Предложено кинетическое описание динамики вихревой решетки в жестком сверхпроводнике, помещенном в изменяющееся по направлению магнитное поле. Интеграл столкновений в кинетическом уравнении для вихревой плотности учитывает процессы пересечения и последующей регенерации вихревых нитей. Второе уравнение теории выражает силовой баланс — равенство магнитной силы силе пиннинга. Показано, что магнитная сила содержит коллективный член, зависящий от функции распределения вихрей. На основе развитой модели сформулированы электродинамические уравнения критического состояния для случая скрещенных магнитных полей. Исследован переход от предлагаемой теории к развитой ранее двухскоростной квазигидродинамической модели.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Статические и квазистатические электромагнитные свойства жестких сверхпроводников рассматриваются обычно на основе модели критического состояния [1]. Эта модель позволяет рассчитать статическую намагниченность сверхпроводника, петли гистерезиса и потери на перемагничивание для случаев, когда внешнее магнитное поле меняется по величине, но его направление остается неизменным. Уравнение модели, описывающее распределение магнитной индукции, получило обоснование в рамках рассмотрения баланса сил, действующих на абрикосовские вихри. Считается, что магнитная сила, действующая на вихрь, компенсируется силами пиннинга, связанными со взаимодействиями вихрей с различными неоднородностями кристаллической решетки. Благодаря пиннингу критическая плотность тока  $J_c$  оказывается отличной от нуля, и проникновение магнитного поля экранируется сверхпроводящими токами.

Задача о распределении магнитной индукции заметно усложняется, если внешнее магнитное поле содержит несколько компонент и его ориентация меняется со временем. Именно в таких условиях наблюдается ряд интересных электромагнитных явлений [2–5]. Основной вывод, вытекающий из этих экспериментов, состоит в том, что во всей пространственной области, куда проникает переменное электромагнитное поле (даже слабое), происходит вытеснение постоянного тока. В частности, в работе [4] показано, что статический магнитный момент образца полностью исчезает, если в весь объем сверхпроводника проникает поперечное переменное магнитное поле. Для расчета электромагнитных свойств сверхпроводников в меняющем свое направление внешнем магнитном поле требуется дополнительная информация, касающаяся направления вектора критической плотности тока  $J_c$ . До недавних пор подобные задачи рассмат-

ривались в рамках двух различных подходов. Первый из них был развит в работах Клема–Гонзалеса [6–8]. Самым существенным в этом подходе явился учет эффекта пересечения вихревых нитей (flux-line cutting), играющего принципиальную роль в рассматриваемых условиях. Это явление и связанные с ним эффекты подробно изучались в работах [9–12]. К сожалению, в уравнениях Клема–Гонзалеса не было учтено влияние эффекта пересечения вихрей на условия силового баланса вихревой системы. Кроме того, они находятся в разительном противоречии с результатами упомянутых экспериментов [2–5]. Другой подход, предложенный авторами работ [2–4] для интерпретации экспериментов, использует обобщенное уравнение критического состояния

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} J_c \frac{\mathbf{E}}{E}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{E}$  — электрическое поле,  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция,  $c$  — скорость света. Иными словами, предлагается, как и в случае закона Ома, считать плотность тока направленной вдоль электрического поля. С помощью этого уравнения был объяснен ряд эффектов нелинейного взаимодействия электромагнитных волн [13, 14]. К сожалению, как и модель Клема–Гонзалеса, уравнение (1) не имеет достаточного физического обоснования.

Последовательный учет явлений пиннинга и пересечений вихревых нитей был выполнен в работе [15], где динамика вихревой системы описывается в рамках двухскоростной гидродинамической модели. Одна из скоростей описывает движение вихревой решетки как целого, а другая связана с относительным движением двух пересекающихся подрешеток. Уравнения электродинамики выводятся из принципа минимума энергии Гиббса. Выведенные уравнения включают как частные случаи модельные уравнения электродинамики, предложенные в [6–8] и [2–4].

В рамках двухскоростной гидродинамической модели получает естественное объяснение вся совокупность экспериментальных данных цитированных работ. Однако эта модель может претендовать только на качественное описание, поскольку в ней истинное распределение вихрей по углу их наклона  $\vartheta$  к некоторой выбранной оси заменено введением в рассмотрение всего двух вихревых подрешеток. На самом деле вихри в каждом физически малом объеме сверхпроводника имеют различные углы наклона, так что последовательное описание вихревой системы должно проводиться на языке угловой функции распределения с использованием кинетического уравнения. При этом содержащийся в кинетическом уравнении интеграл столкновений должен адекватно описывать явление пересечения вихрей. Кроме того, предложенный в [15] принцип минимизации энергии Гиббса, на основе которого были получены электродинамические уравнения, нуждается в более последовательном обосновании с помощью анализа условия силового баланса. В этом анализе необходимо корректно учесть влияние эффекта пересечений вихрей на силовой баланс.

Цель настоящей работы состоит в построении кинетической теории вихревой системы в сверхпроводнике во внешнем меняющемся по направлению магнитном поле  $\mathbf{H}_0(t)$ . Естественно, что построение такой теории возможно лишь при использовании ряда разумных допущений и ограничений. Прежде всего в работе предполагается выполненным условие  $H_0 \gg H_{c1}$ , что позволяет пренебрегать различием между магнитной индукцией и термодинамическим магнитным полем (здесь  $H_{c1}$  — нижнее критическое магнитное поле). Связь между вихревой плотностью и магнитной индукцией предполагается локальной, что допустимо в массивных образцах с размерами, намного превышающими лондоновскую глубину проникновения  $\lambda_L$ , если магнитная индукция мало

меняется на масштабах порядка  $\lambda_L$  [16–18]. Мы будем также пренебрегать силами вязкого трения, которые пропорциональны скорости движения вихрей. Такое пренебрежение допустимо, если изменение внешнего магнитного поля происходит достаточно медленно. Наконец, мы считаем силу пиннинга, действующую на каждый отдельный вихрь, не зависящей ни от пространственных координат, ни от магнитной индукции. Согласно обычной модели критического состояния, такому приближению соответствует пренебрежение зависимостью критической плотности тока от магнитной индукции. Теория строится для случая, когда все физические величины зависят от единственной пространственной координаты  $x$ , что соответствует рассмотрению полупространства или достаточно толстой пластины.

Во втором разделе статьи формулируются основные уравнения кинетической теории. Сначала в нем обосновывается необходимость введения двух функций координат и углов. Одна из них представляет функцию распределения вихрей  $n(x, \vartheta)$ , а другая — скорость  $V(x, \vartheta)$  их движения. Первое из уравнений для нахождения этих функций есть кинетическое уравнение с интегралом столкновений, учитывающим пересечения вихрей, приводящие к изменению их ориентаций. Второе уравнение описывает силовой баланс для вихрей. В магнитной силе, действующей на вихри, учитываются коллективные эффекты, связанные с пересечениями вихрей. Третий раздел посвящен анализу электродинамических следствий уравнений кинетической теории. Показано, что пересечения вихрей могут приводить к значительному уменьшению (коллапсу) градиента модуля магнитной индукции. В этом же разделе осуществлен переход от уравнений кинетической теории к уравнениям двухскоростной гидродинамической модели.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

Рассмотрим сверхпроводник, занимающий полупространство ( $x > 0$ ), или пластину ( $-d/2 < x < d/2$ ) во внешнем магнитном поле, меняющемся как по модулю, так и по направлению, но всегда остающемся параллельным поверхности образца. В этом случае входящие в сверхпроводник вихри отличаются по направлению от вихрей, уже присутствующих в образце. В результате возникает ситуация, когда в одном и том же физически малом сверхпроводящем объеме находятся вихри с различными углами  $\vartheta$  наклона к некоторой выбранной нами оси  $z$ . Изменение внешнего магнитного поля  $H_0(t)$  приводит к движению вихрей, причем скорость такого движения может зависеть не только от координаты  $x$ , но и от угла  $\vartheta$ . Будем в дальнейшем описывать состояние и движение вихревой системы с помощью усредненных величин, относящихся к большим группам вихрей, имеющих близкие углы. Для этого введем в рассмотрение плотность вихрей  $n(x, \vartheta)$  и их скорость  $V(x, \vartheta)$ , зависящие от координаты  $x$  и угла  $\vartheta$ . Определим плотность вихрей так, что величина  $n(x, \vartheta)dx d\vartheta$  есть число вихрей с углами в интервале  $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$  в пространственной окрестности  $(x, x + dx)$ . Величина  $V(x, \vartheta)$  является средней скоростью вихрей, расположенных в окрестности точки  $x$  и имеющих углы близкие к  $\vartheta$ . Будем в дальнейшем предполагать, что внешнее магнитное поле меняется настолько медленно, что магнитная сила, действующая на вихрь, уравновешивается только силой пиннинга  $f_p$ , а силами вязкого сопротивления  $\eta V$ , где  $\eta$  — коэффициент вязкости, можно пренебречь. Это означает, что развиваемая теория справедлива для относительно малых скоростей движения вихрей  $V < f_p/\eta$ . Допустим также, что магнитное поле меняется тем не менее достаточно быстро, для того чтобы можно бы-

ло пренебречь явлением крипа потока, приводящим к малой логарифмической релаксации магнитного момента и однородному распределению магнитного поля в объеме сверхпроводника при  $H_0 = \text{const}$ . Мы будем считать, что характерное время изменения магнитного поля много меньше характерного времени релаксации. В рамках этих предположений скорость  $V(x, \vartheta)$  мгновенно обращается в нуль во всех точках образца при прекращении изменения внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ . Эти приближения соответствуют условиям применимости модели критического состояния.

Обратим внимание на принципиальные отличия постановки данной кинетической проблемы от обычного кинетического описания поведения систем частиц. Обычно кинетическое уравнение формулируется для функции распределения частиц по их координатам и импульсам, а решение кинетического уравнения позволяет найти любую кинетическую характеристику системы. В рассматриваемой нами ситуации взаимодействующие объекты (вихри) не обладают кинетической энергией. Поэтому скорость их движения полностью определяется условием силового баланса, которое для всех вихрей с данными  $x$  и  $\vartheta$  имеет одинаковый вид. Таким образом, все вихри с данными  $x$  и  $\vartheta$  движутся с одинаковой скоростью  $V(x, \vartheta)$ , т. е. распределение вихрей по скоростям имеет  $\delta$ -функциональный характер. Поэтому кинетическое уравнение формулируется для функции распределения  $n(x, \vartheta)$ , в которой в качестве аргумента выступают лишь координата  $x$  и угол  $\vartheta$ . Однако в теории возникает вторая подлежащая определению функция  $V(x, \vartheta)$ . Для нахождения обеих неизвестных функций  $n(x, \vartheta)$  и  $V(x, \vartheta)$  требуется помимо кинетического уравнения сформулировать второе, независимое, уравнение, представляющее собой упомянутое условие баланса сил, действующих на вихрь. Данный раздел статьи посвящен выводу этой системы уравнений.

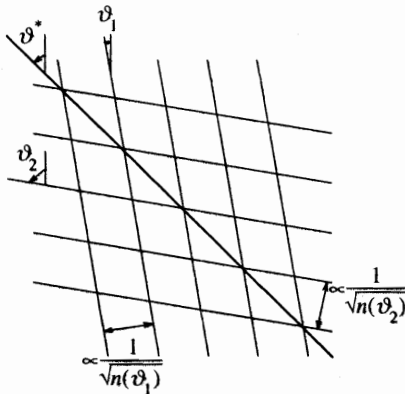
### А. Кинетическое уравнение

Этот раздел посвящен выводу кинетического уравнения для описания изменения плотности вихрей  $n(x, \vartheta)$  при их движении и пересечениях. Прежде всего необходимо обратить внимание на то, что в жестком сверхпроводнике поворот вихрей под действием внешнего магнитного поля невозможен. Действительно, выигрыш магнитной энергии при повороте вихря как целого пропорционален его длине, тогда как потери энергии, связанные с преодолением силы пиннинга, пропорциональны квадрату длины. Таким образом, для бесконечно длинных вихрей такой процесс энергетически запрещен. Это означает, что изменение ориентации вихрей может происходить только за счет их взаимных пересечений, последующего разрезания (cutting) и поворотов небольших участков новых вихрей друг к другу [10]. С учетом этого обстоятельства кинетическое уравнение можно написать следующим образом:

$$\frac{\partial n(x, \vartheta)}{\partial t} + \frac{\partial [n(x, \vartheta)V(x, \vartheta)]}{\partial x} = I(n), \quad (2)$$

где  $I(n) = I_+(n) - I_-(n)$  — интеграл столкновений, а  $I_+(n)$  и  $I_-(n)$  — слагаемые, описывающие «приход» вихрей в состояние с углом вблизи  $\vartheta$  и «уход» из этого состояния.

Для того чтобы получить интеграл столкновений, рассмотрим два пересекающихся ряда вихрей с углами  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  (рисунок). Если пересечение этих рядов сопровождается перерезанием, все вновь образовавшиеся вихри окажутся ориентированы вдоль общего направления  $\vartheta^*$ . Простые геометрические вычисления с учетом того, что расстояния между вихрями в рядах пропорциональны  $1/\sqrt{n(\vartheta_1)}$  и  $1/\sqrt{n(\vartheta_2)}$ , приводят к равенству,



Пересечение двух рядов вихрей

определяющему направление образующихся вихрей:

$$\vartheta^*(x, \vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{\vartheta_1 \sqrt{n(\vartheta_1)} + \vartheta_2 \sqrt{n(\vartheta_2)}}{\sqrt{n(\vartheta_1)} + \sqrt{n(\vartheta_2)}}. \tag{3}$$

Здесь предполагается, что разность  $|\vartheta_1 - \vartheta_2| \ll 1$ . Число вихревых рядов на единицу длины вдоль оси  $x$ , имеющих угол  $\vartheta_1$  и пересекающихся в единицу времени с рядами, имеющими угол  $\vartheta_2$ , описывается выражением

$$\nu(x, \vartheta_1, \vartheta_2) = \sqrt{n(x, \vartheta_1)} \sqrt{n(x, \vartheta_2)} |V(x, \vartheta_1) - V(x, \vartheta_2)|, \tag{4}$$

где  $V(x, \vartheta_1)$  и  $V(x, \vartheta_2)$  — средние скорости вихрей, ориентированных соответственно вдоль углов  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$ . Если пересечение этих рядов сопровождается перерезанием, то они перейдут в состояние с углом  $\vartheta^*$ . Примем, что число вихрей в единичном интервале по  $x$  с углами  $\vartheta^*$  увеличится на

$$N(x, \vartheta_1, \vartheta_2) = \sqrt{n(x, \vartheta_1)} + \sqrt{n(x, \vartheta_2)}. \tag{5}$$

Используя эти выражения, запишем приходное слагаемое интеграла столкновений в виде

$$I_+ = \frac{1}{2} \int d\vartheta_1 d\vartheta_2 P(x, \vartheta_1, \vartheta_2) \nu(x, \vartheta_1, \vartheta_2) N(x, \vartheta_1, \vartheta_2) \delta(\vartheta - \vartheta^*(x, \vartheta_1, \vartheta_2)). \tag{6}$$

Здесь  $P(x, \vartheta_1, \vartheta_2) = P(x, \vartheta_2, \vartheta_1)$  — симметричная относительно перестановки углов функция вероятности разрезания двух пересекающихся вихревых рядов. Легко убедиться, что «уход» вихрей из состояния с углом  $\vartheta$  определяется формулой

$$I_- = \int d\vartheta_2 P(x, \vartheta, \vartheta_2) \nu(\vartheta, \vartheta_2) \sqrt{n(x, \vartheta)}. \tag{7}$$

Учитывая угловую симметрию функции  $P(x, \vartheta_1, \vartheta_2)$ , получим следующее выражение для интеграла столкновений вихрей:

$$I = \int d\vartheta_1 d\vartheta_2 P(x, \vartheta_1, \vartheta_2) n(x, \vartheta_1) \sqrt{n(x, \vartheta_2)} |V(x, \vartheta_1) - V(x, \vartheta_2)| \times \left[ \delta\left(\vartheta - \frac{\vartheta_1 \sqrt{n(\vartheta_1)} + \vartheta_2 \sqrt{n(\vartheta_2)}}{\sqrt{n(\vartheta_1)} + \sqrt{n(\vartheta_2)}}\right) - \delta(\vartheta - \vartheta_1) \right]. \tag{8}$$

Отметим два важных свойства приведенного интеграла столкновений. Он сохраняет неизменным как полное число вихрей, так и средний угол их наклона к оси  $z$ . Иными словами, равны нулю следующие два интеграла:  $\int d\vartheta I(\vartheta)$  и  $\int d\vartheta \vartheta I(\vartheta)$ . Можно получить и более общее свойство интеграла столкновений (8). Для достаточно плавных функций  $\varphi$  угла  $\vartheta$  оказывается справедливым следующее равенство (см. Приложение А):

$$\int d\vartheta I(\vartheta)\varphi(\vartheta) = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} \Big|_{\vartheta=\bar{\vartheta}} \int d\vartheta_1 d\vartheta_2 P(x, \vartheta_1, \vartheta_2) |V(x, \vartheta_1) - V(x, \vartheta_2)| \times \\ \times \frac{n(x, \vartheta_1)n(x, \vartheta_2)}{\sqrt{n(x, \vartheta_1)} + \sqrt{n(x, \vartheta_2)}} (\vartheta_1 - \vartheta_2)^2, \quad (9)$$

где производная  $\partial^2 \varphi / \partial \vartheta^2$  вычислена в точке  $\vartheta = \bar{\vartheta}(x)$ , определяющей направление среднего угла,

$$\bar{n}(x)\bar{\vartheta}(x) = \int d\vartheta \vartheta n(x, \vartheta). \quad (10)$$

В последнем выражении полная плотность вихрей  $\bar{n}(x)$  определяется как

$$\bar{n}(x) = \int d\vartheta n(x, \vartheta). \quad (11)$$

Используя указанные свойства интеграла столкновений, получаем квазигидродинамические уравнения переноса полной плотности  $\bar{n}(x)$  вихрей и среднего угла наклона  $\bar{\vartheta}(x)$  (см. Приложение А):

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{n}\bar{V})}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial (\bar{n}\bar{\vartheta})}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{n}\bar{V}\bar{\vartheta})}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

где  $\bar{V}(x)$  и  $\bar{V}\bar{\vartheta}$  определяются формулами

$$\bar{V} = \frac{1}{\bar{n}} \int d\vartheta V(x, \vartheta)n(x, \vartheta), \quad (14)$$

$$\bar{V}\bar{\vartheta} = \frac{1}{\bar{n}} \int d\vartheta V(x, \vartheta)\vartheta n(x, \vartheta). \quad (15)$$

### В. Уравнение баланса сил

Для завершения постановки кинетической проблемы уравнение, полученное в предыдущей части, необходимо дополнить уравнением баланса сил, действующих на вихрь, а также соотношением, связывающим индукцию магнитного поля с плотностью вихрей. В локальном пределе связь вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и средней по углам  $\vartheta$  плотности вихрей может быть записана в следующем виде:

$$\mathbf{B} = \Phi_0 \int d\vartheta n(x, \vartheta)\mathbf{e}(\vartheta) \approx \bar{n}(x)\mathbf{e}(\bar{\vartheta}), \quad (16)$$

где  $\mathbf{e}(\vartheta)$  — единичный вектор, определяющий направление вихря с углом наклона  $\vartheta$  к оси  $z$ .

Уравнение баланса представляет собой равенство магнитной силы, обусловленной взаимодействием вихрей друг с другом, и силы пиннинга, действующей на вихревую систему. Для вычисления магнитной силы необходимо сначала найти магнитную часть энергии Гиббса  $G_{em}$ . Используя хорошо известное выражение для  $G_{em}$  (см., например, [19]), в локальном пределе получаем

$$G_{em} = \frac{1}{8\pi} \int dx (\mathbf{B}^2 - 2\mathbf{H}_0\mathbf{B}) = \frac{\Phi_0^2}{8\pi} \int dx dx' d\vartheta d\vartheta' \mathbf{e}(\vartheta)\mathbf{e}(\vartheta')n(x', \vartheta')n(x, \vartheta) - \frac{\mathbf{H}_0\Phi_0}{4\pi} \int dx d\vartheta \mathbf{e}(\vartheta)n(x, \vartheta). \quad (17)$$

Магнитная сила  $f_m(x, \vartheta)$ , действующая на подсистему вихрей с углами  $\vartheta$  в точке  $x$ , определяется изменением энергии Гиббса  $G_{em}$  при смещении  $\delta u(x, \vartheta)$  вихрей:

$$\delta G_{em} = \int dx d\vartheta n(x, \vartheta) f_m(x, \vartheta) \delta u(x, \vartheta). \quad (18)$$

К сожалению, из выражений (17), (18) не удастся непосредственно вычислить магнитную силу, поскольку функционал  $G_{em}$  зависит от вихревой плотности  $n(x, \vartheta)$ . Это означает, что необходимо найти связь изменения вихревой плотности  $\delta n(x, \vartheta)$  с малым смещением вихрей  $\delta u(x, \vartheta)$ . Такую связь легко установить с помощью кинетического уравнения. Интегрируя уравнение (2) по малому промежутку времени  $\tau$ , в течение которого происходит смещение  $\delta u(x, \vartheta) = \tau V(x, \vartheta)$ , и оставляя лишь старшие по смещению члены, получим

$$\delta n(x, \vartheta) = -\frac{\partial [n(x, \vartheta)\delta u(x, \vartheta)]}{\partial x} + I\tau. \quad (19)$$

Вычисляя теперь изменение магнитной части энергии Гиббса (17) при малом изменении плотности вихрей и используя (18), (19), находим выражение для магнитной силы (см. Приложение В):

$$\frac{4\pi}{\Phi_0} f_m(x, \vartheta) = \mathbf{e}(\vartheta) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{1}{2} \mathbf{e}(\vartheta) (\mathbf{B} - \mathbf{H}_0) \int \frac{P(\vartheta, \vartheta') n(\vartheta') d\vartheta'}{\sqrt{n(\vartheta)} + \sqrt{n(\vartheta')}} (\vartheta - \vartheta')^2 \text{sign} [V(\vartheta) - V(\vartheta')]. \quad (20)$$

Первый член в (20) связан с силой Лоренца, действующей на вихрь. Именно это слагаемое переходит в обычное выражение для магнитной силы (см., например, [18]) в случае, когда все вихри параллельны друг другу и внешнему полю. Второе слагаемое возникает только благодаря пересечению вихрей и исчезает, если все вихри параллельны друг другу или вероятность их разрезания  $P(\vartheta_1, \vartheta_2) = 0$ . Происхождение этого слагаемого связано с довольно своеобразными коллективными эффектами. Ясно, что любое поступательное перемещение какого-либо вихря вызывает пересечения и повороты не только его, но и соседних с ним вихрей. Иными словами, при перемещении меняется состояние не только данного вихря, но и его соседей. В результате появляется дополнительный, коллективный, вклад в энергию Гиббса, а значит, и дополнительная,

коллективная, сила. С этой точки зрения, вихревая система представляет собой не газ независимо движущихся вихрей, а жидкость с очень сильно выраженным межвихревым взаимодействием.

Полная магнитная сила, действующая на вихрь в критическом состоянии, должна уравниваться эффективной силой пиннинга. Эта последняя сила включает в себя не только сопротивление движению вихрей, вызываемое их перемещением, но также и сопротивление, связанное с работой сил пиннинга на выпрямление вихрей после их пересечений. Для того чтобы вычислить такую эффективную силу сопротивления, рассчитаем работу сил пиннинга  $\delta G_p$  и  $\delta G_{cut}$ , затрачиваемую на перемещение и выпрямление вихрей соответственно при их малом смещении  $\delta u(x, \vartheta)$ . Поскольку при перемещении одного  $i$ -го вихря совершается работа  $f_p |\delta u_i| = f_p \delta u_i \text{sign} V_i$ , то работа  $\delta G_p$  перемещения всех вихрей определяется формулой

$$\delta G_p = \int dx d\vartheta n(x, \vartheta) \delta u(x, \vartheta) f_p \text{sign} [V(x, \vartheta)]. \quad (21)$$

Наличие в этом выражении множителя  $\text{sign}(V)$  связано с тем фактом, что работа преодоления сил пиннинга всегда положительна, т.е. здесь учтено, что сила пиннинга направлена противоположно скорости движения вихрей.

Второй вклад в силу сопротивления движению вихрей дают потери энергии на выпрямление вихрей, образующихся после разрезания. Для того чтобы оценить эту силу, предположим, что вихри абсолютно упруги. Это означает, что формирующийся после пересечения новый вихрь, состоящий из отрезков вдоль направлений вихрей до их пересечения, обязательно выпрямляется. При этом отрезки рассматриваемого вихря разворачиваются навстречу друг другу, совершая работу против сил пиннинга (см. рисунок). Такая работа для одного вихря, образовавшегося при пересечении рядов с углами  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$ , отнесенная к единице его длины, определяется формулой

$$A = \frac{1}{2} f_p \frac{a(\vartheta_1) a(\vartheta_2)}{a(\vartheta_1) + a(\vartheta_2)} \propto \frac{1}{2} f_p \frac{1}{\sqrt{n(x, \vartheta_1)} + \sqrt{n(x, \vartheta_2)}}, \quad (22)$$

где  $a(\vartheta) \propto 1/\sqrt{n(\vartheta)}$  — характерное расстояние между вихрями в ряду, имеющем угол наклона  $\vartheta$ . Используя последнее выражение и соотношение (4), задающее число пересекающихся вихрей, получаем

$$\delta G_{cut} = \frac{1}{2} \int dx d\vartheta d\vartheta' f_p P(x, \vartheta, \vartheta') \sqrt{n(x, \vartheta)} \sqrt{n(x, \vartheta')} \delta u(x, \vartheta) \times \\ \times \text{sign} [V(x, \vartheta) - V(x, \vartheta')]. \quad (23)$$

Полная сила сопротивления  $f_p^{eff}$ , действующая на вихрь, определяется из соотношения

$$\delta G_p + \delta G_{cut} = \int dx d\vartheta f_p^{eff} n(x, \vartheta) \delta u(x, \vartheta). \quad (24)$$

Отсюда с помощью выражений (21) и (23) находим эффективную силу сопротивления

$$f_p^{eff} = f_p \text{sign} V(x, \vartheta) + \frac{1}{2} f_p \int d\vartheta' P(x, \vartheta, \vartheta') \frac{\sqrt{n(x, \vartheta')}}{\sqrt{n(x, \vartheta)}} \times \\ \times \text{sign} [V(x, \vartheta) - V(x, \vartheta')]. \quad (25)$$



Используя условие равенства нулю суммы всех сил, действующих на вихрь, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial B}{\partial x} + (\vartheta - \bar{\vartheta}) B \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} + \\ & + \frac{1}{2} \left[ B - H_0 \cos(\bar{\vartheta} - \vartheta_0) \right] \int \frac{P(\vartheta, \vartheta') n(\vartheta') d\vartheta'}{\sqrt{n(\vartheta)} + \sqrt{n(\vartheta')}} (\vartheta - \vartheta')^2 \text{sign} [V(\vartheta) - V(\vartheta')] = \\ & = -\frac{4\pi}{c} J_c \text{sign}^* [V(\vartheta)] - \frac{2\pi}{c} J_c \int d\vartheta' P(\vartheta, \vartheta') \frac{\sqrt{n(\vartheta')}}{\sqrt{n(\vartheta)}} \text{sign} [V(\vartheta) - V(\vartheta')], \quad (26) \end{aligned}$$

где  $J_c = cf_p/\Phi_0$  — критическая плотность тока,  $\vartheta_0$  — угол наклона внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}$  к оси  $z$ , значение функции  $\text{sign}(0)$  равно нулю. Введенная здесь функция  $\text{sign}^*(x)$  совпадает с функцией  $\text{sign}(x)$  во всех точках за исключением точки  $x = 0$ , где значение  $\text{sign}^*(0)$  находится в интервале  $(-1, 1)$ . Необходимость введения  $\text{sign}^*[V(\vartheta)]$  вызвана тем, что в одной и той же точке пространства могут находиться как движущиеся, так и покоящиеся вихри, причем для последних сила сопротивления их перемещению (сила трения покоя), вообще говоря, не равна нулю. Это и послужило причиной замены  $\text{sign}(V(x, \vartheta))$  на  $\text{sign}^*(V(x, \vartheta))$ . В то же время во всех случаях, когда аргументом знаковой функции являются относительные скорости (разности скоростей  $V(x, \vartheta) - V(x, \vartheta')$ ), то оставлена функция  $\text{sign}(V(x, \vartheta) - V(x, \vartheta'))$ . В самом деле, в этом случае вихри, имеющие углы  $\vartheta$  и  $\vartheta'$ , не пересекаются, и соответствующая выпрямлению сила сопротивления строго равна нулю. Если часть вихрей в какой-либо точке двигается, а часть покоится, то создается впечатление, что для покоящихся вихрей  $\text{sign}^*(0)$  и соответственно правая часть уравнения (26) не определены. Однако, поскольку скорость таких вихрей равна нулю, изменение их плотности во времени и в пространстве полностью может быть определено из кинетического уравнения, а уравнение (26) в этом случае служит для нахождения значения  $\text{sign}^*(V(x, \vartheta) = 0)$ . Граничный угол в распределении  $n(x, \vartheta)$  между областью, соответствующей  $V(x, \vartheta) = 0$  и интервалом, где  $V(x, \vartheta)$  отлична от нуля, может быть определен из условия непрерывности  $V$  по переменной  $\vartheta$ .

Граничными условиями к уравнениям (2), (16) и (26) служат равенство магнитной индукции на границе образца  $\mathbf{B}(0, t)$  внешнему полю  $\mathbf{H}_0(t)$ , а также требование непрерывности скорости  $V(x, t)$  всюду, где вихревая плотность отлична от нуля.

В общем случае, решение задачи в рамках представленной кинетической теории подразумевает определение распределения вихрей  $n(x, \vartheta)$  и их скоростей  $V(x, \vartheta)$  для заданного закона квазистационарного изменения внешнего магнитного поля со временем  $\mathbf{H}_0(t)$ . Для этого необходимо решить уравнения (2), (16) и (26) для искомых функций. В следующих разделах мы будем применять систему уравнений (2), (16) и (26) для построения электродинамики сверхпроводника в меняющемся по направлению внешнем магнитном поле и анализа наиболее важных магнитных свойств таких объектов.

### 3. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Решение задачи о динамике вихревой решетки в рамках предложенной кинетической модели очень сложно. Однако для интерпретации электродинамических экспериментов обычно нет необходимости рассчитывать детали распределения плотности вихрей по их углам наклона к оси  $z$ . Поэтому целесообразно свести основные уравнения

теории к более простой системе электродинамических уравнений, определяющих лишь пространственное распределение индукции (ее модуля и угла наклона к оси  $z$ ). В этом и состоит основная цель данного раздела.

#### А. Подавление градиента модуля магнитной индукции

Проанализируем вначале в общих чертах особенности распределения магнитной индукции, вытекающие из уравнения силового баланса (26). Домножив выражение (26) на вихревую плотность  $n(x, \vartheta)$  и проинтегрировав полученное соотношение по переменной  $\vartheta$ , можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{4\pi J_c}{cB} \int d\vartheta \Phi_0 n(\vartheta) \text{sign}^*(V(\vartheta)). \quad (27)$$

В случае, когда внешнее магнитное поле не меняет своего направления и все вихри параллельны друг другу, скорость вихрей  $V$  имеет всюду одинаковый знак. В таких условиях равенство (27) дает обычное уравнение Бина [1]: плотность вихрей  $n = B/\Phi_0$  изменяется в глубь сверхпроводника линейно с наклоном  $4\pi J_c/\Phi_0$ . В другой ситуации, когда вихри с течением времени меняют свое направление, могут реализоваться два принципиально разных случая. Если практически все вихри в некоторой точке пространства двигаются в одном и том же направлении, то соотношение (27) переходит в уравнение, совпадающее с уравнением Бина [1]:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{4\pi}{c} J_c \text{sign}(\bar{V}). \quad (28)$$

Если же в одной пространственной области часть вихрей двигается в одну сторону, а часть в другую, то градиент индукции уменьшается. Действительно, в таком случае значения выражения  $\text{sign}^*(V)$  для двух вихрей, двигающихся в разные стороны, противоположны. Для тех областей сверхпроводника, где числа вихрей, двигающихся в разные стороны, близки друг к другу, происходит практически полное подавление градиента модуля индукции:

$$\partial B/\partial x \approx 0. \quad (29)$$

Коллапс градиента плотности вихрей, соответствующий переходу от электродинамического уравнения (28) к (29), необходимо учитывать при интерпретации большой группы экспериментов в скрещенных внешних магнитных полях [3–5].

Уравнения (28), (29) имеют достаточно простую форму и ясный физический смысл. К сожалению, их недостаточно для решения конкретных электродинамических задач. Действительно, чтобы выбрать, какое из этих двух уравнений следует применять, необходимо сначала установить поле скоростей  $V(x, t)$ , т. е. вернуться к анализу сложной исходной системы (2), (16), (26). По этой причине представляет интерес построение на основе уравнений (2), (16), (26) более простых моделей, допускающих достаточно простую и наглядную физическую интерпретацию.

#### В. Электродинамика в рамках двухкомпонентной модели

Сформулируем замкнутую систему уравнений в рамках простейшего модельного приближения, в котором истинное угловое распределение вихрей заменяется следующей функцией

$$n(x, \vartheta) = \frac{1}{2}n(x) [\delta(\vartheta - \vartheta_A(x)) + \delta(\vartheta - \vartheta_B(x))]. \quad (30)$$

Иными словами, мы будем считать, что в каждой точке  $x$  половина вихрей (вихри типа  $A$ ) имеют угол  $\vartheta_A$  и движутся со скоростью  $V_A$ , а остальные характеризуются углом  $\vartheta_B$  и скоростью  $V_B$ . Допустим для определенности, что справедливо условие  $\vartheta_A > \vartheta_B$ .

Основная проблема, возникающая при переходе к двухкомпонентной системе, связана с тем, что в рамках этого приближения не удастся удовлетворить кинетическому уравнению (2), поскольку после пересечения вихрей групп  $A$  и  $B$ , возникают вихри, не принадлежащие ни к одному из этих типов. Поэтому мы вместо кинетического уравнения будем пользоваться его гидродинамическими следствиями: уравнениями переноса полной плотности (12) и среднего угла (13). Эти уравнения в модели (30) принимают вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial [n(V_A + V_B)/2]}{\partial x} = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial [n(\vartheta_A + \vartheta_B)]}{\partial t} + \frac{\partial [n(\vartheta_A V_A + \vartheta_B V_B)]}{\partial x} = 0. \quad (32)$$

Теперь проанализируем уравнения силового баланса для двух вихревых подрешеток  $A$  и  $B$ . Уравнение для компоненты  $A$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{(\vartheta_A - \vartheta_B)}{2} B \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} + \frac{1}{2} [B - H_0 \cos(\bar{\vartheta} - \vartheta_0)] \times \\ \times \frac{P\sqrt{n(x)}}{2\sqrt{2}} (\vartheta_A - \vartheta_B)^2 \text{sign}[V_A(x) - V_B(x)] = \\ = -\frac{4\pi}{c} J_c \text{sign}^*[V_A(x)] - \frac{2\pi}{c} J_c P \text{sign}[V_A(x) - V_B(x)], \end{aligned} \quad (33)$$

где средний угол  $\bar{\vartheta}$  определяется формулой  $\bar{\vartheta} = (\vartheta_A + \vartheta_B)/2$ . Уравнение силового баланса для группы  $B$  может быть получено из уравнения (33) заменой  $A$  на  $B$ .

В рамках двухкомпонентной модели уравнение (27), описывающее подавление градиента магнитной индукции, переписывается в виде

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{2\pi}{c} J_c [\text{sign}^*(V_A) + \text{sign}^*(V_B)]. \quad (34)$$

Исключая из уравнения силового баланса (33) градиент  $\partial B/\partial x$  с помощью (34), получим уравнение, определяющее пространственное распределение  $\bar{\vartheta}$

$$\begin{aligned} n(x)(\vartheta_A - \vartheta_B) B \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} + \\ + [B - H_0 \cos(\bar{\vartheta} - \vartheta_0)] \frac{P\sqrt{n(x)}}{8} (\vartheta_A - \vartheta_B)^2 \text{sign}(V_A - V_B) = \\ = -\frac{4\pi}{c} J_c [\text{sign}^*(V_A) - \text{sign}^*(V_B)] - \frac{4\pi}{c} J_c P \text{sign}(V_A - V_B). \end{aligned} \quad (35)$$

К сожалению, в рамках двухкомпонентной модели не удастся без дополнительных предположений замкнуть систему уравнений переноса (31), (32) и силового баланса для компонент  $A$  (33) и  $B$ . Действительно, подлежат определению пять неизвестных функций,

которые мы можем выбрать, например, следующим образом:  $V_A, V_B, B, \bar{\vartheta}, \vartheta_A - \vartheta_B$ . Однако мы имеем только четыре уравнения для этих функций. Для того чтобы замкнуть эту систему, необходимо добавить еще одно феноменологическое уравнение. Как и в работе [15], примем, что характерный разброс углов  $\vartheta_A - \vartheta_B$  пропорционален градиенту среднего угла  $(1/2)\partial(\vartheta_A + \vartheta_B)/\partial x$ :

$$\vartheta_A - \vartheta_B \approx -l \operatorname{sign}(V_A - V_B) \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x}, \quad (36)$$

где  $l$  — феноменологический параметр, определяющий длину свободного пробега вихрей между последовательными процессами пересечения, при которых происходит уничтожение старых и рождение новых вихрей. Качественно соотношение (36) может быть обосновано, если предположить, что в данную точку  $x$  приходят вихри из некоторой ее окрестности и приносят с собой различные углы наклона к оси  $z$  (см. Приложение С).

Используя соотношение (36), можно получить замкнутую систему электродинамических уравнений. Так, для случая, когда все вихри движутся в одном направлении ( $\operatorname{sign} V_A = \operatorname{sign} V_B$ ), модуль индукции вычисляется из (28), а распределение углов дается уравнением

$$\left\{ B - \frac{l}{l^*} \left[ B - H_0 \cos(\bar{\vartheta} - \vartheta_0) \right] \right\} l \left( \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} \right)^2 = \frac{4\pi}{c} J_c P, \quad (37)$$

где  $l^*$  определяется равенством

$$l^* \approx \frac{2\sqrt{2}}{P\sqrt{n}}. \quad (38)$$

Если же вихри групп  $A$  и  $B$  движутся в противоположных направлениях ( $\operatorname{sign} V_A = -\operatorname{sign} V_B$ ), то распределение  $B$  находится из (29), а средний угол рассчитывается с помощью уравнения

$$\left\{ B - \frac{l}{l^*} \left[ B - H_0 \cos(\bar{\vartheta} - \vartheta_0) \right] \right\} l \left( \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} \right)^2 = \frac{4\pi}{c} J_c (P + 2). \quad (39)$$

Кроме этих двух случаев может возникнуть ситуация, когда в некоторой области какая-либо из вихревых подрешеток покоится. В этой области модуль градиента индукции  $\partial B/\partial x$  меняется от величины  $4\pi J_c/c$  до нуля, так как значение  $\operatorname{sign}^*(0)$  изменяется от  $-1$  до  $1$ . Исключая неизвестный параметр  $\operatorname{sign}^*(0)$ , придем к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{1}{2} \left\{ B - \frac{l}{l^*} \left[ B - H_0 \cos(\bar{\vartheta} - \vartheta_0) \right] \right\} l \left( \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} \right)^2 \operatorname{sign}(V_A) = \\ = -\frac{4\pi}{c} J_c \operatorname{sign}(V_A) \left( 1 + \frac{P}{2} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Границы между областями, в которых реализуются случаи  $\operatorname{sign} V_A = \operatorname{sign} V_B$ ,  $\operatorname{sign} V_A = -\operatorname{sign} V_B$  и  $V_B = 0$ , находятся из уравнений переноса (31) и (32). Последнее из этих уравнений в переменных  $V_A, V_B, n, \bar{\vartheta}$  переписывается в виде:

$$\frac{\partial n\bar{\vartheta}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial n\bar{\vartheta}(V_A + V_B)}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left( n |V_A - V_B| l \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} \right) = 0. \quad (41)$$

Равенства (28), (29), (31), (37), (39), (40), (41) образуют замкнутую систему электродинамических уравнений. Если положить длину  $l$  равной  $l^*$ , то приходим к системе уравнений, полученной в работе [15].

В заключение этого раздела обратим внимание на то, что рассматриваемая двухкомпонентная модель является весьма грубым приближением. Действительно, замена функции распределения вихревой плотности лишь двумя группами вихрей с углами  $\vartheta_A$  и  $\vartheta_B$  не может быть строго обоснована. Тем не менее эта модель учитывает принципиальные особенности кинетики вихревой решетки в скрещенных магнитных полях, так что полученные на ее основе электродинамические уравнения позволяют интерпретировать ряд экспериментальных результатов. Обсудим пределы применимости двухкомпонентной модели. Все основные уравнения теории, а следовательно, и данной модели, были получены в предположении малости углового разброса вихрей в каждой точке образца, т. е. при условии  $l(\partial\vartheta/\partial x) \ll 1$ . Из уравнения (37) вытекает, что это условие заведомо нарушается в окрестности точек, где  $\cos(\vartheta - \vartheta_0) = B(1 - l/l^*)/H_0$ . Это накладывает ограничения на применимость этой двухкомпонентной модели.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрено поведение вихревой системы в сверхпроводнике, помещенном в магнитное поле, квазистационарно меняющееся как по модулю, так и по направлению. В этом случае вихри имеют разную пространственную ориентацию. В предложенной кинетической теории поведение вихревой системы описывается кинетическим уравнением (2) и уравнением силового баланса (26), которые определяют пространственное распределение вихревой плотности  $n(x, \vartheta)$  и скорости  $V(x, \vartheta)$ . Интеграл столкновений (8) в кинетическом уравнении (2) описывает изменение плотности  $n(x, \vartheta)$  вихрей вследствие их взаимных пересечений, сопровождающихся изменением ориентации. Показано, что интеграл столкновений сохраняет полное число вихрей и средний угол их наклона.

Уравнение баланса сил учитывает не только непосредственное взаимодействие вихрей друг с другом, внешним магнитным полем и центрами пиннинга, но и коллективное взаимодействие, связанное с пересечением и рассеянием вихрей друг на друге. Такое коллективное взаимодействие вихрей дает дополнительный вклад в магнитную силу, что может привести к их взаимному притяжению. Это, в свою очередь, вызывает встречное движение вихрей, что приводит к подавлению градиента модуля магнитной индукции в сверхпроводнике.

В работе рассмотрен переход к более простой двухкомпонентной модели, в которой реальное распределение вихрей по их углам наклона заменяется распределением, в котором вихри имеют в каждой точке пространства лишь два угла наклона:  $\vartheta_A(x)$  и  $\vartheta_B(x)$ . Для получения замкнутой системы уравнений в модель добавлено дополнительное феноменологическое условие связи углового разброса вихрей с градиентом среднего угла и длиной свободного пробега. Полученная двухкомпонентная гидродинамическая модель позволяет интерпретировать большое число экспериментов по электродинамике сверхпроводников в скрещенных магнитных полях (см. [15] и цитируемую там литера-

туру).

Работа выполнена в рамках государственной программы по сверхпроводимости (проекты 96046 и 95046) и частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 97-02-16399).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Целью данного приложения является вывод соотношения (9), а также уравнений переноса (12) и (13). Домножая выражение (8) на  $\varphi(\vartheta)$  и затем интегрируя полученное соотношение, находим

$$J = \int d\vartheta_1 d\vartheta_2 P(\vartheta_1, \vartheta_2) n(x, \vartheta_1) \sqrt{n(x, \vartheta_2)} |V(x, \vartheta_1) - V(x, \vartheta_2)| \times \\ \times \left[ \varphi \left( \frac{\vartheta_1 \sqrt{n(\vartheta_1)} + \vartheta_2 \sqrt{n(\vartheta_2)}}{\sqrt{n(\vartheta_1)} + \sqrt{n(\vartheta_2)}} \right) - \varphi(\vartheta_1) \right]. \quad (\text{A.1})$$

В дальнейшем будем предполагать, что разброс углов вихрей в одной и той же точке пространства вблизи среднего значения  $\bar{\vartheta}$  достаточно мал. В этом случае справедливы разложения

$$\varphi \left( \frac{\vartheta_1 \sqrt{n(\vartheta_1)} + \vartheta_2 \sqrt{n(\vartheta_2)}}{\sqrt{n(\vartheta_1)} + \sqrt{n(\vartheta_2)}} \right) \approx \varphi(\bar{\vartheta}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \Big|_{\bar{\vartheta}} \left( \frac{\vartheta_1 \sqrt{n(\vartheta_1)} + \vartheta_2 \sqrt{n(\vartheta_2)}}{\sqrt{n(\vartheta_1)} + \sqrt{n(\vartheta_2)}} - \bar{\vartheta} \right) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} \Big|_{\bar{\vartheta}} \left( \frac{\vartheta_1 \sqrt{n(\vartheta_1)} + \vartheta_2 \sqrt{n(\vartheta_2)}}{\sqrt{n(\vartheta_1)} + \sqrt{n(\vartheta_2)}} - \bar{\vartheta} \right)^2, \quad (\text{A.2})$$

$$\varphi(\vartheta_1) = \varphi(\bar{\vartheta}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \Big|_{\bar{\vartheta}} (\vartheta_1 - \bar{\vartheta}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} \Big|_{\bar{\vartheta}} (\vartheta_1 - \bar{\vartheta})^2. \quad (\text{A.3})$$

Подставляя эти разложения функции  $\varphi$  в (A.1), получим

$$J = J^{(1)} + J^{(2)}, \quad (\text{A.4})$$

где

$$J^{(1)} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \Big|_{\bar{\vartheta}} - \bar{\vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} \Big|_{\bar{\vartheta}} \right) \times \\ \times \int d\vartheta_1 d\vartheta_2 P(\vartheta_1, \vartheta_2) \frac{n(\vartheta_1)n(\vartheta_2)}{\sqrt{n(\vartheta_1)} + \sqrt{n(\vartheta_2)}} |V(\vartheta_1) - V(\vartheta_2)| (\vartheta_2 - \vartheta_1), \quad (\text{A.5})$$

$$J^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} \Big|_{\bar{\vartheta}} \int d\vartheta_1 d\vartheta_2 \frac{P(\vartheta_1, \vartheta_2)n(\vartheta_1)n(\vartheta_2)}{(\sqrt{n(\vartheta_1)} + \sqrt{n(\vartheta_2)})^2} |V(\vartheta_1) - V(\vartheta_2)| (\vartheta_2 - \vartheta_1) \times \\ \times \left( 2\sqrt{n(\vartheta_1)} \vartheta_1 + \sqrt{n(\vartheta_2)} \vartheta_2 + \sqrt{n(\vartheta_2)} \vartheta_1 \right). \quad (\text{A.6})$$

Интеграл  $J^{(1)}$  равен нулю. Действительно, проводя в (A.5) замену переменных  $\vartheta_1 \rightarrow \vartheta_2$ ,  $\vartheta_2 \rightarrow \vartheta_1$ , приходим к равенству  $J^{(1)} = -J^{(1)}$ , из которого следует, что  $J^{(1)} = 0$ . Сделав в интеграле (A.6) такую же замену переменных, получаем

$$J^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} \Big|_{\bar{\vartheta}} \int d\vartheta_1 d\vartheta_2 \frac{P(\vartheta_1, \vartheta_2) n(\vartheta_1) n(\vartheta_2)}{(\sqrt{n(\vartheta_1)} + \sqrt{n(\vartheta_2)})^2} |V(\vartheta_1) - V(\vartheta_2)| (\vartheta_1 - \vartheta_2) \times \\ \times \left( 2\sqrt{n(\vartheta_2)} \vartheta_2 + \sqrt{n(\vartheta_1)} \vartheta_1 + \sqrt{n(\vartheta_1)} \vartheta_2 \right). \quad (\text{A.7})$$

Таким образом, искомый интеграл  $J$  можно записать в виде полусуммы выражений (A.6) и (A.7). После простых алгебраических преобразований приходим к выражению (9).

Положив в (9)  $\varphi = 1$  и  $\varphi = \vartheta$ , получаем, что интеграл столкновений (8) сохраняет полное число вихрей и средний угол, т.е. оказываются справедливыми соотношения

$$\int d\vartheta I(\vartheta) = 0, \quad \int d\vartheta \vartheta I(\vartheta) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Проинтегрировав (2) по  $\vartheta$  и используя (A.8), найдем первое уравнение переноса (12). Для того чтобы получить второе уравнение переноса (13), достаточно домножить кинетическое уравнение (2) на  $\vartheta$  и затем проинтегрировать, используя (A.8). Таким образом, свойство (9) интеграла столкновений и уравнения переноса (12), (13) доказаны.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

Цель этого приложения состоит в получении выражения для магнитной силы, действующей на вихри с учетом их пересечений. Смещение вихрей  $\delta u(x, \vartheta)$  приводит к изменению их распределения на малую величину  $\delta n(x, \vartheta)$ . Это приводит к изменению магнитной энергии системы  $\delta G_{em}$ , которое с учетом соотношения (17) можно представить в форме

$$\delta G_{em} = \frac{\Phi_0}{4\pi} \int dx d\vartheta \mathbf{e}(\vartheta) [\mathbf{B}(x) - \mathbf{H}_0] \delta n(x, \vartheta). \quad (\text{B.1})$$

Подставляя в это выражение соотношение (19) и проводя интегрирование по частям, получим

$$\delta G_{em} = \frac{\Phi_0}{4\pi} \int dx d\vartheta n(x, \vartheta) \delta u(x, \vartheta) \mathbf{e}(\vartheta) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \\ + \frac{\Phi_0}{4\pi} \int dx d\vartheta \delta I(n) \mathbf{e}(\vartheta) [\mathbf{B}(x) - \mathbf{H}_0], \quad (\text{B.2})$$

где  $\delta I = I\tau$ . С другой стороны, используя соотношение (9), равенство  $\partial^2 \mathbf{e} / \partial \vartheta^2 = -\mathbf{e}$ , а также симметрию функции вероятности  $P(\vartheta, \vartheta')$ , находим

$$\int d\vartheta I(n) \tau \mathbf{e}(\vartheta) = \frac{1}{2} \int d\vartheta \mathbf{e}(\vartheta) n(x, \vartheta) \delta u(x, \vartheta) \times \\ \times \int \frac{P(\vartheta, \vartheta') n(\vartheta') d\vartheta'}{\sqrt{n(\vartheta)} + \sqrt{n(\vartheta')}} \text{sign} [V(\vartheta) - V(\vartheta')] (\vartheta - \vartheta')^2. \quad (\text{B.3})$$

Подставляя последнее выражение в (B.2), приходим к равенству

$$\delta G_{em} = \frac{\Phi_0}{4\pi} \int dx d\vartheta n(x, \vartheta) \delta u(x, \vartheta) \left\{ \mathbf{e}(\vartheta) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mathbf{e}(\vartheta) [\mathbf{B}(x) - \mathbf{H}_0] \int \frac{P(\vartheta, \vartheta') n(\vartheta') d\vartheta'}{\sqrt{n(\vartheta)} + \sqrt{n(\vartheta')}} (\vartheta - \vartheta')^2 \text{sign} [V(\vartheta) - V(\vartheta_1)] \right\}. \quad (\text{B.4})$$

Отсюда и из (18) непосредственно следует выражение для магнитной силы (20).

### ПРИЛОЖЕНИЕ С

Эта часть работы посвящена качественному обоснованию уравнения (36), а также оценке входящей в это уравнение длины свободного пробега  $l$ .

Рассмотрим два вихря, обозначаемых ниже 1 и 2, которые образовались в момент времени  $t - \tau$  в точках  $x_1$  и  $x_2$  и затем пересеклись в точке  $x$  в момент  $t$ . Вычислим углы  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  наклона рассматриваемых вихрей к оси  $z$ . Поскольку вихри 1 и 2 возникли в результате пересечения вихрей типа  $A$  и  $B$  в точках  $x_1$  и  $x_2$ , то согласно формуле (3) получаем следующие выражения для углов наклона

$$\vartheta_1 = (\vartheta_A(x_1, t - \tau) + \vartheta_B(x_1, t - \tau))/2 = \bar{\vartheta}(x_1, t - \tau), \quad (\text{C.1})$$

$$\vartheta_2 = (\vartheta_A(x_2, t - \tau) + \vartheta_B(x_2, t - \tau))/2 = \bar{\vartheta}(x_2, t - \tau). \quad (\text{C.2})$$

Вихри 1 и 2, достигнув точки  $x$ , становятся вихрями типа  $A$  и  $B$  для этой точки и момента времени  $t$ . В результате получаем оценку для разности углов наклона вихрей типа  $A$  и  $B$ :

$$\vartheta_A - \vartheta_B = \bar{\vartheta}(x_1, t - \tau) - \bar{\vartheta}(x_2, t - \tau). \quad (\text{C.3})$$

Сохраняя лишь линейные члены разложения разности  $\vartheta_A - \vartheta_B$  по  $\tau$ ,  $x - x_1$  и  $x - x_2$ , приходим к следующему соотношению:

$$\vartheta_A - \vartheta_B = \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} (x_1 - x_2). \quad (\text{C.4})$$

Чтобы определить расстояние  $x_2 - x_1$ , которое проходит вихрь без пересечений, перейдем от лабораторной системы отсчета  $K$  в систему  $K'$ , связанную с вихрем типа  $A$ . В этой системе скорость вихря  $B$  есть  $V_B - V_A$ . За время  $\tau$  с покоящимся вихрем  $A$  пересекается  $\sqrt{n/2}|V_A - V_B|\tau$  вихрей типа  $B$ . Поскольку лишь каждое  $1/P$  пересечение сопровождается рождением новых вихрей, то для оценки среднего времени между пересечениями получаем

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{P\sqrt{n}|V_A - V_B|}. \quad (\text{C.5})$$

За время  $\tau$  в системе  $K$  вихрь  $A$  со скоростью  $V_A$  проходит расстояние  $V_A\tau = x - x_1$ , а вихрь  $B$  — со скоростью  $V_B$  расстояние  $V_B\tau = x - x_2$ . Таким образом, получаем  $x_2 - x_1 = (V_B - V_A)\tau$ . Используя это выражение и соотношения (C.4), (C.5), получаем для разности углов наклона вихрей типа  $A$  и  $B$  следующую оценку:

$$\vartheta_A - \vartheta_B = -\text{sign}(V_A - V_B) \frac{\sqrt{2}}{P\sqrt{n}} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x}. \quad (\text{C.6})$$

Таким образом, длину  $l$  можно оценить как

$$l = \frac{\sqrt{2}}{P\sqrt{n}}. \quad (\text{C.7})$$



## Литература

1. C. P. Bean, Phys. Rev. Lett. **8**, 250 (1962).
2. I. V. Baltaga, L. M. Fisher, N. V. Il'in et al., Phys. Lett. A **148**, 213 (1990).
3. I. V. Baltaga, N. M. Makarov, V. A. Yampol'skii et al., ФНТ **21**, 411 (1995).
4. L. M. Fisher, A. V. Kalinov, I. F. Voloshin et al., Sol. State Commun. **97**, 833 (1996).
5. S. K. Hasanain, Sadia Manzoor, and A. Amirabadizadeh, Supercond. Sci. Technol. **8**, 519 (1995).
6. J. R. Clem, Phys. Rev. B **26**, 2463 (1982).
7. J. R. Clem and A. Perez-Gonzalez, Phys. Rev. B **30**, 5041 (1984).
8. R. Cave and M. A. R. LeBlanc, J. Appl. Phys. **53**, 1631 (1982).
9. J. R. Clem, J. Appl. Phys. **50**, 3518 (1979).
10. E. H. Brandt, J. R. Clem, and D. G. Walmsley, J. Low Temp. Phys. **37**, 43 (1979).
11. E. H. Brandt, J. Low Temp. Phys. **39**, 41 (1980).
12. R. Boyer, G. Fillion, and M. A. R. LeBlanc, J. Appl. Phys. **51**, 1692 (1980).
13. L. M. Fisher, N. V. Il'in, I. F. Voloshin et al., Physica C **197**, 161 (1992).
14. I. V. Baltaga, K. V. Il'enko, N. M. Makarov et al., Sol. State Commun. **93**, 697 (1995).
15. И. Ф. Волошин, А. В. Калинов, С. Е. Савельев и др., ЖЭТФ **111**, 1071 (1997).
16. И. Ф. Волошин, В. С. Горбачев, С. Е. Савельев и др., Письма в ЖЭТФ **59**, 55 (1994).
17. L. M. Fisher, V. S. Gorbachev, S. E. Savel'ev et al., Physica C **245**, 231 (1995).
18. В. С. Горбачев, С. Е. Савельев, ЖЭТФ **109**, 1247 (1995).
19. В. В. Шмидт, Г. С. Мкртчян, УФН **112**, 459 (1974).