

ВОЛЬТ-АМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОТЯЖЕННЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТОВ С ВЯЗКИМ ТРАНСПОРТОМ МАГНИТНОГО ПОТОКА

Ю. Е. Кузовлев

Донецкий физико-технический институт им. А. А. Галкина
Национальной академии наук Украины
340114, Донецк, Украина

Поступила в редакцию 21 декабря 1996 г.

Построена теория вольт-амперной характеристики (ВАХ) распределенных джозефсоновских переходов, ширина которых много больше длины свободного пробега одиночного флаксона, определяющей диссипацией в переходе. Получены явные аналитические выражения для максимального избыточного тока перехода и низковольтной асимптотики ВАХ.

1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени опубликовано уже множество работ, посвященных явлениям в распределенных джозефсоновских переходах. Но большинство исследований относится к переходам с контактами сверхпроводящих берегов «внахлест» («overlap»-геометрия). При этом сторонний транспортный ток перехода входит в уравнение для скачка фазы параметра порядка между берегами перехода в виде источника, равномерно распределенного по длине перехода. Менее изучен контакт берегов «встык» (так называемая «in line»-геометрия). При определенных условиях (см. [1]) она приводит к модельному уравнению типа синус-Гордон с трением, в котором источника тока в явном виде нет. Вместо этого транспортный ток вводится посредством граничных условий для магнитного поля на краях контакта.

Как было показано в [2], в таких переходах резистивный режим отличается сильной пространственной неоднородностью распределения флаксонов (джозефсоновских вихрей), если ширина перехода L намного больше, во-первых, джозефсоновской глубины проникновения λ_j (т. е. размера одиночного стоячего флаксона) и, во-вторых, пути «свободного пробега» λ_f , проходимого движущимся флаксонам до его остановки вследствие диссипации в контакте. Неравенство $L \gg \lambda_f$ означает, что движение флаксонов имеет существенно вязкий, небаллистический характер, а малоамплитудные возбуждения в контакте являются сильно затухающими.

Последние обстоятельства приводят [2] к практически полному исчезновению скачков на ВАХ контакта (ступенек Фiske), которые связаны с резонансами при движении флаксонов и генерации малоамплитудных возбуждений («плазменных волн») и хорошо выражены при $L < \lambda_f$. Остающиеся особенности ВАХ — это, во-первых, величина избыточного сверхтока в омической области и, во-вторых, форма ВАХ в области достаточно малых напряжений, где ток I меньше своего критического значения I_c . Под I_c здесь понимается максимальный ток, который можно пропустить через контакт без

сопротивления. Резистивность может иметь место и при $I < I_c$, на так называемой «одночастичной» ветви ВАХ, которая и будет объектом нашего рассмотрения (на практике она часто наблюдается при обратном обходе ВАХ).

В настоящей работе предложена приближенная аналитическая теория указанных параметров ВАХ при условиях $L \gg \lambda_f$, $L \gg \lambda_j$ в отсутствие внешнего магнитного поля. Показано, во-первых, что избыточный сверхток на «одночастичной» ветви имеет пологий максимум, стремясь к нулю как при малых напряжениях (почти независимо от ширины контакта), так и при достаточно больших напряжениях на контакте (тем медленнее, чем больше отношение L/λ_j). При этом поведение ВАХ в ближней омической области близко к линейной зависимости, которая отсекает на оси I отрезок (эффективный избыточный ток) приблизительно равный $2I_c/3$. Во-вторых, при малых напряжениях на контакте, когда нормальный ток много меньше сверхтока, ток убывает примерно как обратный логарифм напряжения U , так что «одночастичная» ветвь ВАХ имеет «клюв» с бесконечной производной при $U = 0$. Однако эта особенность ВАХ, обязанная небаллистическому переносу магнитного потока, может отчасти сгладиться в контакте между достаточно тонкими (по направлению вдоль магнитного поля) берегами из-за нелокального магнитного взаимодействия флаксонов через «нормальное» пространство. Показано также, что наблюдавшаяся в [2] «тонкая структура» усредненных по времени распределений поля и тока возникает как результат «нелинейной интерференции» между цепочкой флаксонов, бегущих от краев к центру контакта, и плазменными волнами, возбуждающимися у краев.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ «СХОДЯЩЕЙСЯ ВОЛНЫ»

2.1. Безразмерные переменные

Вывод уравнений для джозефсоновского контакта (S - I - S -типа) между массивными берегами можно найти, например, в [7]:

$$\frac{c}{4\pi} H_x = \sigma U_t + gU + j_c \sin \varphi, \quad 2eU = \hbar \varphi_t, \quad \varphi_x \simeq 2\pi dH/\Phi_0.$$

Первое уравнение связывает сумму емкостной, нормальной и джозефсоновской составляющих тока через контакт с ротором магнитного поля в плоскости контакта. Здесь H — поле, U — напряжение на контакте, φ — скачок фазы, σ и g — емкость и проводимость на единицу площади контакта, x — расстояние от середины контакта, подстрочные индексы « x » и « t » означают дифференцирование по координате вдоль контакта и по времени, d — эффективная магнитная толщина контакта, $d > 2\lambda$, где λ — лондонская глубина проникновения поля в берегах; символы c , e , j_c и Φ_0 имеют стандартный смысл. Последнее соотношение, вытекающее из квантования магнитного потока в сверхпроводящих берегах и дающее простую локальную связь между градиентом фазы и полем, является приближенным. Оно справедливо, если характерный масштаб λ_j изменения магнитного поля в контакте, $\lambda_j \equiv \sqrt{\Phi_0 c / 8\pi^2 d j_c}$, много больше λ , что можно легко проверить. Данное выражение для λ_j непосредственно вытекает из приведенных соотношений [1]. Интеграл от правой части первого уравнения по всей площади контакта равен полному транспортному току I . Отсюда выражаем I через поле на краях контакта:

$$I = D \frac{c}{4\pi} [H(L/2) - H(-L/2)],$$

где D — толщина берегов контакта.

Для упрощения последующих математических выкладок перейдем к безразмерным обозначениям. Выделяя λ_j в качестве единицы длины, перепишем третье уравнение и с его помощью граничное условие для поля в виде

$$\lambda_j \varphi_x = H/H_0,$$

$$I = I_0 \lambda_j [\varphi_x(L/2) - \varphi_x(-L/2)],$$

где введены естественные единицы для поля и тока: $H_0 \equiv \Phi_0/2\pi d\lambda_j$, $I_0 \equiv Dj_c\lambda_j$. За единицу времени возьмем $\tau \equiv \lambda_j/u$, где u — скорость свихартовских электромагнитных волн в контакте. Для нее из исходных уравнений легко получить $u \equiv c(4\pi d\sigma)^{-1/2}$. Тогда за единицы напряжения и сопротивления следует взять, соответственно, $U_0 \equiv \hbar/2e\tau$ и $R_0 \equiv U_0/I_0 = 4\pi du/Dc^2$.

Приводя все переменные к безразмерному виду с помощью введенных единиц (делая замену $x/\lambda_j \rightarrow x$, $I/I_0 \rightarrow I$ и т. д.), приходим к уравнению

$$\varphi_{xx} = \varphi_{tt} + \gamma\varphi_t + \sin\varphi \quad (1)$$

с граничным условием

$$I = \varphi_x(L/2) - \varphi_x(-L/2).$$

Последнее с учетом симметрии распределения тока относительно центра контакта $x = 0$ можно переписать в виде пары условий

$$\varphi_x(t, x = \pm L/2) = \pm I/2. \quad (1a)$$

Безразмерный параметр γ в (1), определяющий величину диссипации, дается выражением

$$\gamma = \Phi_0 g u / 2\pi j_c \lambda_j c = R_0 \lambda_j / RL,$$

где через R обозначено нормальное сопротивление контакта: $R = (gDL)^{-1}$.

Рассмотрим длину свободного пробега флаксона до его остановки в широком контакте, полагая, что начальная скорость флаксона сравнима с u , т. е. с его максимально возможной скоростью. Соответствующие несложные вычисления дают $\lambda_f \sim \lambda_j/\gamma = RL/R_0$. Таким образом, условие вязкого характера движения флаксонов имеет вид $R \ll R_0$ или в безразмерных обозначениях,

$$\gamma L \gg 1. \quad (2)$$

Заметим, что в качестве полного набора характеристик контакта можно взять шесть параметров: λ , L и D (определяющие его геометрию), I_0 и R (задающие масштабы ВАХ) и u . Учитывая, что обычно u на порядок или полтора меньше скорости света и полагая $d \simeq 2\lambda$, имеем $R_0[\text{Ом}] \sim 10-100(\lambda/D)$. При условии $L \gg 1$ (или в размерной форме, $L \gg \lambda_j$) критический ток контакта I_c очень просто выражается через I_0 . Действительно, устойчивое статическое решение (1) состоит из двух «неполных» флаксонов (разной полярности), проникших с краев контакта. Форма одиночного стоячего флаксона описывается выражением $\varphi_x = 2/\text{ch}(x - x_0)$. Отсюда и из (1a) следует, что максимальное значение транспортного тока, достижимое в статическом режиме, равно $I_c = 4$ или, в размерной форме, $I_c = 4I_0 = 4Dj_c\lambda_j$.

2.2. Постановка задачи

В стационарном резистивном режиме производная фазы $\varphi(t, x)$ по времени имеет ненулевую усредненную по времени составляющую. При этом постоянная составляющая напряжения равна

$$\langle U \rangle = U_0 \tau \langle \varphi_t \rangle \equiv U_0 \Omega,$$

где угловые скобки означают усреднение по времени, а Ω — безразмерная скорость дрейфа фазы, совпадающая, очевидно, с приведенным к безразмерному виду напряжением. Ниже всюду, где нет специальных оговорок, используются безразмерные переменные.

Наблюдаемая в резистивном состоянии картина переноса магнитного потока в широком контакте [2] в целом выглядит довольно сложной даже для приближенного аналитического описания, хотя в основе она проста. Вихри, зарождающиеся на одном краю контакта, и антивихри, рождающиеся на другом краю, движутся к центру, где аннигилируют. Однако в силу условия (2) они неспособны достичь центра по инерции. Для этого требуется градиент концентрации вихрей, который создал бы градиент давления, направленный против силы трения, т. е. к центру. Поэтому бегущие к центру вместе с цепочкой вихрей периодические (или квазипериодические) во времени волны магнитного поля $\varphi_x(t, x)$ и локального напряжения $\varphi_t(t, x)$ пространственно неоднородны. Неоднородность означает, что амплитуда и форма временных колебаний поля и напряжения зависят от места в контакте.

Усложняющим фактором является то, что на бегущую цепочку вихрей накладываются малоамплитудные («плазменные») возбуждения. При большом числе вихрей в контакте они проявляются как «звуковые» волны концентрации вихрей. Они генерируются в центре при аннигиляции пар и на краях. В результате вихри, находящиеся вблизи этих двух источников «плазменных» волн, могут совершать обратное движение, которое нельзя описать в терминах бегущей от краев к центру волны.

Важно подчеркнуть, однако, что, как показывает численное моделирование (см. также разд. 3), генерация плазменных волн обязана в основном тому, что граничные условия (1а) жестко фиксируют мгновенное значение полного тока, которое должно сохраняться при вхождении очередного вихря. Вся картина сильно упрощается, если заменить (1а) на более мягкие, сглаженные по времени граничные условия

$$\langle \varphi_x(t, x = \pm L/2) \rangle = \pm I/2, \quad (3)$$

которые задают только постоянную составляющую полного тока. Именно, теперь всюду, кроме довольно узкой средней области шириной порядка единицы, обратное движение исчезает, оставляя монотонно сходящуюся цепочку вихрей. Возвратное перемещение в центре связано с тем, что здесь аннигилирующая пара вихрь — антивихрь может совершить колебание за время гибели. Впрочем, в центре картина сходящейся волны заведомо нарушается, и он должен рассматриваться особо.

Условия (3) позволяют сконструировать относительно простое приближенное решение уравнения (1) для реального контакта конечной ширины в виде относящегося к области $|x| < L/2$ фрагмента сходящейся из бесконечности волны вихрей в бесконечно широком контакте (тем самым неявно вводятся дополнительные ограничения, которые заменяют более детальные условия (1а) для мгновенного тока). Возвращаясь

от (3) к (1a), можно строить решение в виде суперпозиции данного приближения и плазменных волн, которые, по своему определению, не несут «топологического заряда», т. е. не изменяют количества вихрей в контакте (по крайней мере, в среднем по времени).

Можно надеяться, что эта модификация решения несущественно отразится на ВАХ, поскольку постоянная составляющая полного тока в равной мере фиксируется как условиями (1a), так и условиями (3), тогда как количество вихрей не фиксируется ни теми, ни другими. Действительно, благодаря условию сильной вязкости (2) распределение магнитного потока, диссипация в контакте, а значит, и ВАХ определяются балансом силы трения и взаимного расталкивания вихрей в объеме контакта и не должны быть чувствительными к деталям аннигиляции и вхождения вихрей. В таком случае возврат от (3) к (1a) должен приводить лишь к перераспределению плотности тока внутри контакта, в частности, к упомянутой выше тонкой структуре, не изменяя среднего по времени интегрального тока, и интересующие нас особенности ВАХ могут быть проанализированы в рамках смягченных граничных условий (3).

С другой стороны, приближение, базирующееся на (3), имеет и самостоятельный физический смысл, так как, во-первых, при измерении ВАХ даже в режиме заданного тока фактически контролируется лишь низкочастотная составляющая тока и, во-вторых, мгновенный ток внешней цепи может включать не учитываемый в (1), (1a) переменный ток смещения. Кроме того, условия (3) являются даже более естественными, чем (1a), для режима заданного напряжения. В этой связи можно отметить, что численный эксперимент, подчиняясь «принципу минимального производства энтропии», при задании тока выводит на «сверхпроводящую» ветвь ВАХ (на которой $I \rightarrow I_c$ при $U \rightarrow 0$), а при задании напряжения — на (более низколежащую по току) «одночастичную» ветвь.

2.3. Математическая формулировка приближения

Глубоко в резистивной области, где усредненный по времени нормальный ток

$$I_n = \gamma \int \langle \varphi_t(t, x) \rangle dx = \gamma \Omega L$$

много больше среднего сверхтока

$$I_s = \int \langle \sin(\varphi(t, x)) \rangle dx,$$

пренебрегая последним, получаем приближенное решение (1) в виде сходящейся волны:

$$\varphi(t, x) \simeq \Omega(t + \gamma x^2/2).$$

Соответствующие усредненные по времени магнитное поле $h(x) \equiv \langle \varphi_x \rangle$ и локальная концентрация вихрей $n(x)$ линейно зависят от координаты:

$$h(x) = 2\pi n(x) \simeq \gamma \Omega x.$$

При этом локальная скорость вихря $v = dX(t)/dt$, где $X(t)$ — положение вихря, в точке $X(t) = x$ определяется условием постоянства фазы $\varphi(t, X(t)) = \text{const}$ и равна $v(x) = -(\gamma x)^{-1}$. Она удовлетворяет необходимому требованию сохранения магнитного потока

$$2\pi n(x)v(x) = h(x)v(x) = -\Omega = \text{const}, \quad (4)$$

т. е. независимости переносимого в среднем в единицу времени магнитного потока от места в контакте. Очевидно, что в силу (2) скорость вихрей всегда мала на краях.

В общем случае при произвольном соотношении между I_n и I_s также будем искать решение (1) с условиями (3) в виде монотонно (т. е. без изменения направления) сходящихся цепочки вихрей и симметричной встречной «антицепочки». Центральная область должна рассматриваться особо, так как в силу антисимметрии распределения поля всегда $h(0) = 0$, и трактуемая с точки зрения «гидродинамического» соотношения (4) скорость вихрей принимает здесь нефизические значения. Однако пока мы исключим из «приближения сходящейся волны» только точку $x = 0$, рассматривая при этом наш контакт как внутреннюю часть неограниченного контакта. Зададим напряжение $\Omega \equiv \langle \varphi_t \rangle$, а постоянную составляющую полного тока найдем из (3).

Соответственно станем искать $\varphi(t, x)$ в виде периодической по времени сходящейся волны. Учитывая, что в стационарном резистивном состоянии $\varphi(t, x)$ в среднем нарастает пропорционально времени, фазу волны следует записать в виде

$$\tau(t, x) = \Omega t + \theta(x), \quad (5)$$

а решение (1) искать в форме

$$\varphi(t, x) = \tau(t, x) + \Phi(\tau(t, x), x), \quad (6)$$

где функция $\Phi(\tau, x)$ периодична по аргументу τ с периодом 2π (или кратным 2π). Смысл фазы волны $\tau(t, x)$ заключается в том, что она одновременно и целиком определяет как мелкомасштабные пространственные, так и высокочастотные временные осцилляции мгновенного поля φ_x и напряжения φ_t . Поэтому после перехода к новой паре переменных $\{\tau, x\}$ роль переменной « x » меняется: теперь она описывает только сравнительно крупномасштабную пространственную неоднородность волны, т. е. зависимость параметров быстрых осцилляций от места в контакте.

Конечно, выражение (6) является еще формально точным. Основной смысл «приближения сходящейся волны» — это введение дополнительного требования, что постоянная составляющая $\Phi(\tau, x)$ не зависит от x :

$$\varphi_0 \equiv \langle \Phi(\tau, x) \rangle = \text{const} \quad (7)$$

(угловая скобка будет обозначать также усреднение по периоду τ). Действительно, нарушение (7) означало бы, что два слагаемых справа в (6) имеют фактически две различные волновые фазы (τ во втором и $\tau + \langle \Phi \rangle$ в первом). С чисто математической точки зрения именно равенство (7) и определяет рассматриваемое приближение. В силу (7) имеем $\langle \Phi_\tau \rangle = 0$ и, кроме того, выполняется равенство

$$\langle \Phi_x \rangle = \frac{d}{dx} \langle \Phi \rangle = 0, \quad (8)$$

а отсюда вытекает связь между средним магнитным полем и фазой (5) сходящейся волны:

$$h(x) = \langle \varphi_x \rangle = \langle (1 + \Phi_\tau) \theta_x(x) + \Phi_x \rangle = \theta_x(x).$$

Скорость вихрей, определяемая, как выше, из условия постоянства фазы волны, $\tau(t, x) = \text{const}$, равна

$$v(x) = -\Omega / \theta_x(x) = -\Omega / h(x).$$

Как видно из этих выражений для скорости и поля, равенство (7) автоматически гарантирует согласие между «приближением сходящейся волны» и «гидродинамическим» соотношением (4). Кроме того, привлекая вытекающее из (1) после усреднения равенство

$$\frac{d}{dx}h(x) = \gamma\Omega + \langle \sin \varphi \rangle \equiv j, \quad (9)$$

где j — средняя плотность полного тока, благодаря (7), (8) получаем из (9) непосредственную связь между фазой $\theta(x)$ и ВАХ:

$$I = 2h(L/2). \quad (10)$$

Уравнение (1) принимает в новых переменных вид

$$h^2\Phi_{\tau\tau} - \Omega^2\Phi_{\tau\tau} + 2h\Phi_{\tau x} + \Phi_{xx} + (h_x - \gamma\Omega)(1 + \Phi_\tau) = \sin(\tau + \Phi). \quad (11)$$

Разумеется, решение этого формально точного уравнения не обязано удовлетворять требованию (7). Однако мы покажем, что на достаточном удалении от центра в левой части (11) можно приближенно пренебречь всеми слагаемыми, кроме первого, а решение упрощенного уравнения

$$h^2\Phi_{\tau\tau} = \sin(\tau + \Phi) \quad (12)$$

согласуется с ключевым условием (7) приближения сходящейся волны. Прежде заметим, что амплитуда осцилляций $\Phi(\tau, x)$ является убывающей функцией $|x|$. Действительно, на некотором характерном расстоянии x_0 от центра, где среднее поле $h(x)$, нарастая, начинает превышать 2π , плотность вихрей, в соответствии с (4), становится много больше единицы, т.е. обратного размера изолированного вихря. Поэтому амплитуда мелкомасштабных неоднородностей поля и напряжения, связанных с чередованием вихрей, должна убывать. Поскольку же $h(x)$ возрастает приблизительно линейно, это убывание должно происходить по степенному закону. Следовательно, при каждом дифференцировании $\Phi(\tau, x)$ по x появляется множитель порядка $1/|x|$ (тогда как при дифференцировании по τ — множитель порядка единицы), и в (11) наибольший вес имеет слагаемое, содержащее наименьшее количество дифференцирований по x и большую степень h . По этой причине второе, третье и четвертое слагаемые малы по сравнению с первым. Можно надеяться также на относительную малость пятого слагаемого, учитывая, что входящая в него разность $h_x - \gamma\Omega = \langle \sin(\tau + \Phi) \rangle$, т.е. средняя плотность сверхтока, должна быть малой всюду, кроме, возможно, узкой области в центре, поскольку интегральный сверхток не должен превышать нескольких единиц. В результате слева можно сохранить лишь первый член (имеющий, как и правая часть (11), порядок единицы), и тогда остается уравнение (12). Ниже мы дополнительно убедимся в справедливости этих соображений.

Периодическое решение (12) с периодом 2π есть, как известно,

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, x) &= \Phi_0(\tau, k) \equiv \pi + 2\text{am}(k, K(k)\tau/\pi) - \tau = \\ &= \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\tau)}{n \text{ch}(ng)}, \quad g \equiv \pi K \left((1 - k^2)^{1/2} \right) / K(k) \end{aligned} \quad (13)$$

(т. е. определенная выше константа $\varphi_0 = \pi$). Здесь функция $\text{am}(k, u)$ — эллиптическая амплитуда, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл, а эллиптический модуль $k = k(x)$ связан с параметром $h = h(x)$ (в силу независимости периода 2π от координаты и h) соотношением

$$h = \pi/kK(k). \quad (14)$$

Отсюда и из (10) получаем для ВАХ выражение

$$I = 2\pi/qK(q), \quad q \equiv k(L/2). \quad (15)$$

3. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И ВОЛЬТ-АМПЕРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Само по себе уравнение (12) ничего не говорит о зависимости поля h и модуля k от координаты. Однако поскольку модуль определяет величину и форму временных осцилляций поля и напряжения и, тем самым, усредненную по периоду плотность энергии, эту зависимость можно найти из точного соотношения баланса энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varphi_t^2 + \frac{1}{2} \varphi_x^2 - \cos \varphi \right) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi_x \varphi_t - \gamma \varphi_t^2 \quad (16)$$

в его усредненной по времени форме

$$\frac{d}{dx} \langle \varphi_t \varphi_x \rangle = \gamma \langle \varphi_t^2 \rangle, \quad (17)$$

связывающей дивергенцию потока энергии (вектора Пойнтинга) и ее диссипативные потери. Соответственно, ВАХ (15) отражает кинетику переноса и диссипации энергии осцилляций. Приятное свойство приближения сходящейся волны заключается в том, что в этом приближении из (17) вытекает замкнутое кинетическое уравнение для $k(x)$.

В переменных (τ, x) уравнение (17) принимает вид

$$\frac{d}{dx} \Omega \langle \varphi_\tau (\theta_x \varphi_\tau + \varphi_x) \rangle = \gamma \Omega^2 \langle \varphi_\tau^2 \rangle. \quad (18)$$

Подставляя сюда $\varphi(t, x)$ в форме, определяемой (6) и (13), нетрудно увидеть, что в приближении сходящейся волны при любой зависимости $k(x)$ выполняется равенство

$$\langle \varphi_\tau \varphi_x \rangle = 0. \quad (19)$$

Это равенство обязано тому, что в фурье-разложении (13) только амплитуды, но не фазы гармоник являются функциями модуля и, тем самым, координаты. Поэтому из (18), с учетом полученного выше соотношения $h(x) = \theta_x(x)$, следует уравнение

$$\frac{d}{dx} h \langle \varphi_\tau^2 \rangle = \gamma \Omega \langle \varphi_\tau^2 \rangle. \quad (20)$$

Из стандартных формул теории эллиптических функций Якоби [3] имеем

$$\langle \varphi_\tau^2 \rangle = 1 + \langle (\partial \Phi_0 / \partial \tau)^2 \rangle = (2/\pi)^2 E(k)K(k) \equiv f(k), \quad (21)$$

где $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. После подстановки (14) и (21) в (20) и привлечения формулы

$$d [E(k)/k] / dk = -K(k)/k^2$$

из [3] приходим к кинетическому уравнению для модуля:

$$\frac{dk}{dx} = -\gamma\Omega k^2 E(k)/\pi. \quad (22)$$

Подчеркнем, что нетривиальная часть зависимости $k(x)$, $h(x)$ отражает пространственное распределение среднего сверхтока: в пренебрежении последним $h(x)$ была бы, как ясно из (9), чисто линейной функцией x . Сверхток же в резистивном режиме вообще тесно связан с амплитудой осцилляций. Например, при граничных условиях (1а) из точного уравнения (17) после интегрирования по длине контакта и несложных преобразования с учетом симметрии $\varphi(t, x)$ относительно точки $x = 0$ имеем

$$I - \gamma\Omega L = I_s = \gamma\Omega^{-1} \int \langle (\varphi_t - \langle \varphi_t \rangle)^2 \rangle dx.$$

Таким образом, сверхток выражается через дисперсию флуктуаций напряжения φ_t около его среднего значения Ω или, другими словами, через «избыточную» диссипацию, сопутствующую флуктуациям напряжения. Но дисперсия нечувствительна к фазам фурье-гармоник. Это замечание помогает понять, почему ВАХ может быть найдена с помощью усредненного энергетического соотношения (20), в котором фазы тоже не играют роли.

Для вычисления $k(L/2)$ в (15) необходимо задать начальные условия к (22) в центре контакта. Сначала рассмотрим ВАХ, пренебрегая тем, что в области аннигиляции приближение (12), (13) теряет силу, и применим уравнение (22) во всей половине контакта $0 < x < L/2$. Так как $h(0) = 0$, то, согласно (14), в таком случае нужно взять $k(0) = 1$. Соответствующее решение уравнения (22) является функцией только одной переменной — произведения $\gamma\Omega x$, а ВАХ (15) — функцией комбинации $I_n = \gamma\Omega L$, т. е. нормального тока: $I = F(I_n)$, где функция $F(z)$ определяется в неявной форме парой соотношений

$$F = \frac{2\pi}{qK(q)}, \quad \int_q^1 \frac{dk}{k^2 E(k)} = \frac{z}{2\pi}.$$

В размерных обозначениях ВАХ имеет вид

$$I = I_0 F(U/RI_0),$$

где токовый масштаб $I_0 \simeq I_c/4$ был определен выше. Вблизи центра эллиптический модуль меняется как

$$k(x) \cong \frac{1}{1 + \gamma\Omega x/\pi}.$$

Отсюда, используя асимптотику эллиптического интеграла

$$K(k) \simeq \frac{1}{2} \ln \frac{8}{1-k}, \quad 1-k \ll 1, \quad (23)$$

для достаточно малых напряжений, при которых полный нормальный ток I_n много меньше чем 2π , находим из (15)

$$I \approx \frac{4\pi}{\ln(16\pi/I_n)}, \quad I_n = \gamma\Omega L \ll 2\pi. \quad (24)$$

Таким образом, квазичастичная ветвь ВАХ имеет логарифмический «клюв» с бесконечно растущим наклоном вблизи нулевого напряжения. Для ВАХ при значениях нормального тока больших единицы из (15) и (22) получаем $I \simeq I_n + I_{ex}$, где

$$I_{ex} = 4 \left[1 - \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2E(u)} - 1 \right) \frac{du}{u^2} \right] \approx 2.76 \approx \frac{2I_c}{3} \quad (25)$$

— асимптотическое значение избыточного сверхтока.

4. КОРРЕКЦИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ СХОДЯЩЕЙСЯ ВОЛНЫ

4.1. Вклад области аннигиляции

Прежде чем обсудить ВАХ с учетом особой роли центральной области, оценим ее ширину. На ее границе отброшенные члены в уравнении (11) должны приобретать величину порядка единицы. Подставляя $k(x)$ в виде решения (22) с условием $k(0) = 1$, для третьего, например, слагаемого слева в (11) можно получить оценку

$$2h\partial^2\Phi_0/\partial\tau\partial x = 2h(\partial^2\Phi_0/\partial\tau\partial k)(dk/dx) \sim h(1-k^2)^{-1}(dk/dx) < |x|^{-1}.$$

Для средней плотности сверхтока $j_s = \langle \sin\varphi \rangle$ в центре из (9), (14) и (23) находим

$$\begin{aligned} j &= dh/dx = \gamma\Omega E^2(k)(1-k^2)^{-1}K^{-2}(k), \\ j_s &= j - \gamma\Omega \sim 2\pi|x|^{-1} [\ln(8\pi/\gamma\Omega x)]^{-2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Как видно, в рамках исследуемого приближения третье слагаемое сравнивается с единицей, а j_s принимает нефизические значения большие единицы примерно при $|x| < 1$, т.е. ширина x_0 области неприменимости приближения (12), (13) невелика: $x_0 \sim 1$, причем она слабо зависит от $\gamma\Omega$ (из-за логарифмически медленного роста осцилляций в центре).

Вообще, дифференцирование эллиптических функций по координате дает, с учетом уравнения (22) и асимптотики (23), фактор порядка

$$k^{-1}dk/dx \sim \gamma\Omega k/2 < |x|^{-1} \quad \text{при } k \ll 1,$$

когда $\gamma\Omega|x|/\pi > 1$, т.е. в области слабых осцилляций, и фактор порядка

$$(1-k)^{-1}dk/dx \sim |x|^{-1} \quad \text{при } k \rightarrow 1,$$

когда $\gamma\Omega|x|/\pi < 1$ и осцилляции уже не малы. Следовательно, переход от (11) к (12) оправдан всюду при $|x| > x_0$, $x_0 \sim 1$, причем даже в том случае, когда осцилляции являются сильными по всей ширине контакта.

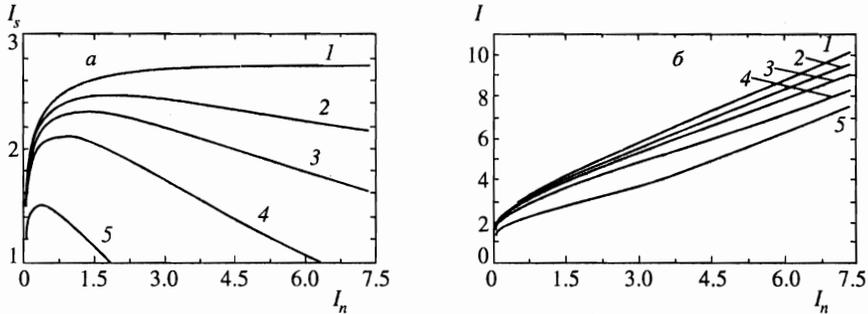


Рис. 1. Зависимости сверхтока (а) и полного тока (б) от нормального тока при различных значениях параметра $\delta = x_0/L = 0$ (1), 0.05 (2), 0.1 (3), 0.2 (4) и 0.5 (5). Для перехода к размерным обозначениям следует заменить I на I/I_0 , I_s на I_s/I_0 , I_n на U/RI_0 ($I_0 = j_c D \lambda_j$)

Из предыдущего ясно также, что в области аннигиляции средняя плотность сверхтока имеет максимум (и может здесь достигать значений ~ 1). Ввиду узости этой области аппроксимируем здесь среднюю плотность полного тока константой: $j(x) \simeq j_0$, так что $h(x) = j_0 x$, а приближение сходящейся волны применим для $|x| > x_0$. При этом начальное условие к уравнению (22) $k(x_0) \equiv k_0$ и величину j_0 найдем исходя из требований непрерывности поля и плотности тока в точках $\pm x_0$. Исключая j_0 из пары соответствующих соотношений с помощью (14) и (26), нетрудно получить следующее единственное уравнение сшивки для определения k_0 :

$$I_n k_0 E^2(k_0) \delta = \pi(1 - k_0^2) K(k_0), \quad (27)$$

где введен безразмерный параметр $\delta \equiv x_0/L$.

Очевидно, что теперь вместо одной универсальной ВАХ $I = F(I_n)$ мы получим в переменных (I, I_n) различные характеристики для контактов разной длины. При этом рассмотренная выше ВАХ с асимптотиками (24) и (25) соответствует пределу $\delta \rightarrow 0$, т. е. бесконечно длинному контакту. Роль параметра δ видна из рис. 1, где показаны ВАХ $I(I_n, \delta)$ (рис. 1б) и зависимость сверхтока $I_s(I_n, \delta) = I - I_n$ от нормального тока для различных значений δ (рис. 1а), причем при больших значениях δ вклад сверхтока меньше, а кривые лежат ниже. Самая нижняя кривая для формально предельной величины δ подчеркивает тенденцию изменения формы ВАХ: с уменьшением длины и ростом δ избыточный сверхток в «омической» области становится все более резко убывающей функцией напряжения, а ВАХ приобретает все более заметный перегиб. Очевидно, избыточный ток (25) является максимально возможным значением сверхтока на «резистивной» ветви.

Для того чтобы рассматриваемая коррекция приближения сходящейся волны приобрела количественный характер, необходимо найти вводимый ею параметр x_0 — полуширину серединной области аннигиляции. Пока что он известен нам лишь по порядку величины. Здесь мы не будем пытаться решить эту задачу аналитически. Вместо этого попробуем найти x_0 из данных численного моделирования [2]. В виду проведенных выше оценок разумным выглядит приближение, в котором величина x_0 постоянна (не зависит от γ, I_n и L). В таком случае ее можно определить исходя из требования, чтобы в «ближней» омической области (т. е. при значениях нормального тока I_n равных нескольким единицам) две ветви ВАХ — рассматриваемая нами и исследованная в [2]

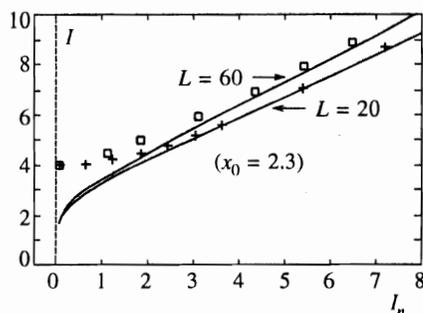


Рис. 2. Две ветви ВАХ: найденная с помощью компьютерного моделирования в [1] верхняя «сверхпроводящая» ветвь (крестики и квадратики) и вычисленная по формулам настоящей работы при $x_0 = 2.3$ нижняя «резистивная» ветвь (сплошные кривые) — при двух значениях длины контакта: $L = 20$ (крестики и нижележащая кривая) и $L = 60$ (квадратики и верхняя кривая)

ветвь (стремящаяся к I_c при малых I_n) — сливались друг с другом. Если допущение о постоянстве x_0 соответствует действительности, то найденное таким способом значение x_0 должно быть одним и тем же при разных длинах контакта. Оказалось, что дело обстоит именно так: сравнение данных [2] и вычислений по формулам (15), (22) и (27) для длин $L = 20, 30, 40$ и 60 дали близкие значения x_0 , а именно, $x_0 \simeq 2.3$. Для примера на рис. 2 показаны вычисленная при $x_0 = 2.3$ нижняя ветвь ВАХ и взятая из [2] верхняя ветвь для $L = 20$ (крестики и нижележащая кривая) и $L = 60$ (квадратики и верхняя кривая). Рисунок 2 демонстрирует, что избыточный ток, определяемый как отрезок, который отсекается на оси $I_n = 0$ линейным продолжением ближнего омического участка ВАХ, оказывается лишь чуть меньше I_{ex} , независимо от δ .

Следует заметить также, что параметр δ , отвечающий ширине $L = 60$, уже настолько мал, что соответствующая ВАХ практически неотличима от ВАХ для очень широкого контакта ($\delta = 0$), для которого значение x_0 несущественно. Поэтому совпадение в омической области вычисленной нами «одночастичной» ветви и экспериментальной «сверхпроводящей» ветви дает подтверждение аналитического выражения (25).

4.2. Роль конечности толщины берегов контакта

Рассмотрим теперь поведение ВАХ при стремящихся к нулю напряжениях, когда основной вклад принадлежит сверхтоку. Как видно из формулы (27) и рис. 1, 2, здесь и с учетом коррекции характерный логарифмический «клев» сохраняется независимо от величин x_0, δ . Однако, как уже отмечалось в [4], производная ВАХ при $I_n \rightarrow 0$ может стать конечной благодаря пространственно-нелокальной связи между магнитным полем и плотностью тока в контакте, которая не учитывается моделью (1), хотя реально всегда существует. Обсудим эту коррекцию ВАХ подробнее.

В контакте, сверхпроводящие берега которого имеют конечную толщину D в направлении ориентации вихрей, динамика вихрей с учетом дальнедействующего магнитного взаимодействия между ними через нормальное пространство описывается [4] вместо (1) пространственно-нелокальным уравнением

$$\varphi_{tt} + \gamma\varphi_t + \sin\varphi = \frac{\partial}{\partial x} \int Q(x, z) \frac{\partial}{\partial z} \varphi(t, z) dz + j_0(x). \quad (28)$$

Здесь источник тока $j_0(x)$, сосредоточенный преимущественно вблизи краев, представляет сторонний транспортный ток (интеграл по всей длине контакта от первого члена в правой части (28) равен нулю). Для формально бесконечно широкого контакта ядро

$Q(x, z)$ зависит лишь от разности аргументов и для геометрии «встык» имеет в используемых безразмерных обозначениях форму [4]

$$Q(x) = \frac{1}{\pi\alpha} K_0\left(\frac{|x|}{\alpha}\right) + \frac{\lambda}{\pi D} \int_0^{\infty} \frac{J_0(qx) dq}{\sigma^3 [\sigma + \alpha q \operatorname{cth}(\sigma D/\lambda)]}, \quad (28a)$$

$$\sigma = \sigma(q) \equiv \sqrt{1 + \alpha^2 q^2}.$$

Здесь параметр α — это отношение лондоновской глубины проникновения в берегах к джозефсоновской длине λ_j .

Далее мы ограничимся случаем, когда $\alpha \ll 1$ (как и в модели (1)), а отношение толщины к глубине проникновения хотя и велико, $D \gg \lambda$, но конечно. Тогда первое слагаемое в (28a) можно заменить на дельта-функцию. Интеграл в (28a), который мы обозначим через $R(x)$, при $|x| \gg \alpha$ всегда имеет степенной «хвост»:

$$R(x) \simeq \frac{1}{|x|}.$$

Для $\varphi(t, x)$ вдали от краев широкого контакта получаем из (28)

$$\varphi_{tt} + \gamma\varphi_t + \sin\varphi = \varphi_{xx} + \frac{\lambda}{\pi D} j_{nl}(t, x), \quad (29)$$

$$j_{nl}(t, x) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \int R(x-z) \frac{\partial}{\partial z} \varphi(t, z) dz,$$

где j_{nl} представляет вклад нелокальности. Неравенство $D \gg \lambda$ позволяет рассматривать этот вклад как слабое возмущение локальной динамики, описываемой уравнением (1). Приближение (12), (13) сохраняет смысл, но в уравнении баланса (16) справа появится дополнительный член $(\lambda/\pi D) j_{nl} \varphi_t$ (при этом уравнение останется точным, но содержимое скобки слева будет представлять лишь локализованную в контакте часть энергии). Пренебрегая флуктуациями нелокального вклада в плотность тока, т. е. делая замену

$$\langle j_{nl} \varphi_t \rangle \simeq \langle j_{nl} \rangle \Omega = \Omega \frac{\partial}{\partial x} \int R(x-z) h(z) dz,$$

для модуля вместо (22) получим уравнение

$$\frac{dk}{dx} = -\frac{k^2}{\pi} E(k) \left[\gamma\Omega - \frac{\lambda}{\pi D} \frac{\langle j_{nl} \rangle}{f(k)} \right], \quad (30)$$

где функция $f(k)$ была введена в (21).

Учтем, что $f(k) > 1$ при всех $k > 0$. Слабая нелокальность может существенно повлиять на ВАХ, когда второй член в квадратной скобке в (30) сравнивается с первым. Из (30) видно, что это возможно лишь в области «клюва» ВАХ, поскольку здесь фактор $\langle j_{nl} \rangle$ примерно пропорционален току I , тогда как напряжение, согласно (24), экспоненциально убывает с ростом тока. В этой области $h(x)$ имеет логарифмическую зависимость от координаты. Для оценки соответствующего характерного напряжения заменим в (30) фактор $\langle j_{nl} \rangle$ на его усредненное еще и по ширине контакта значение

$$\overline{j_{nl}} \equiv \frac{1}{L} \int \langle j_{nl} \rangle dx \cong \frac{I}{L} \ln(L/2x_0) \quad (30a)$$

и приравняем правую часть (30) нулю. Таким путем для характерного нормального тока I_n^{cr} , при котором происходит кроссовер к определяющемуся нелокальными эффектами поведению ВАХ, получается оценка

$$I_n^{cr} \simeq \frac{4\lambda}{D} \frac{\ln(L/2x_0)}{\ln(4\pi D/\lambda)} \sim \frac{\lambda}{D}$$

(соответствующее характерное значение напряжения в размерной форме имеет порядок $U_n^{cr} \sim \lambda R I_0 / D = \lambda \lambda_j R L j_c$).

При меньших значениях нормального тока логарифмический «клюв» должен смениться более гладкой зависимостью $I(I_n)$. Как можно предположить на основании (30), (30а), она приблизительно линейная с наклоном порядка D/λ большим, чем (единичный) наклон в омической области. Поскольку глубина проникновения возрастает с температурой, этот начальный наклон ВАХ должен уменьшаться при увеличении температуры.

Обсудим физический смысл асимптотики (24) и перехода от нее к квазилинейному поведению ВАХ. При понижении напряжения расстояние между вихрями увеличивается и становится сравнимым с размером свободного флаксона. При этом взаимодействие между вихрями экспоненциально ослабевает с расстоянием, но должно уравнивать силу трения. Поскольку, как мы видели, расстояние имеет порядок $1/n = 2\pi/h \sim 4\pi/I$, а сила трения пропорциональна напряжению Ω , последнее становится экспоненциальной функцией обратного тока, что и отражается в (24). Внутренняя часть контакта играет здесь роль определяющего «узкого места», так как внутри концентрация вихрей ниже. Однако при наличии нелокальности вихри, находящиеся на периферии контакта, индуцируют в его средней части более или менее равномерно распределенный ток $(\lambda/\pi D)j_{nl}(t, x)$. Этот ток порождает в (29) силу Лоренца, которая, противодействуя трению, помимо локального межвихревого взаимодействия толкает «внутренние» вихри к центру, что и отражается в (30). При $I_n < I_n^{cr}$ именно нелокальность начинает играть решающую роль, и в этой области ее уже нельзя считать слабым возмущением.

4.3. Граничные условия и распределение сверхтока

Рассмотрим, как меняется пространственное распределение тока и поля при переходе от граничных условий (1а) к (3). Представим приближенное решение (1) в форме

$$\varphi(t, x) = \varphi_0(t, x) + a(t, x),$$

где через $\varphi_0(t, x)$ обозначено решение (1) при условиях (3), а второе слагаемое представляет собой «плазменное возбуждение», не связанное с изменением «топологического заряда», т. е. числа вихрей в контакте. Рассмотрим достаточно далекую резистивную область, где количественное различие (1а) и (3) невелико. Тогда из (1а), (3) и (13) для плазменных колебаний вытекают граничные условия

$$a_x(t, \pm L/2) = \pm I/2 - \varphi_{0x}(t, \pm L/2) \approx -(2/I) \cos [\Omega t + \theta(\pm L/2)]. \quad (31)$$

Ввиду малости фактора $2/I$ можно трактовать $a(t, x)$ как слабое возмущение. Из (1) следует, что соответствующая добавка к плотности тока может быть представлена как

$$\delta j(x) = d^2 \langle a \rangle / dx^2 = \langle \sin \varphi \rangle - \langle \sin \varphi_0 \rangle \simeq \langle a \cos \varphi_0 \rangle, \quad (32)$$

где учтено, что вследствие «незаряженности» плазменная добавка должна удовлетворять неравенству $\langle \partial a(t, x) / \partial t \rangle = 0$. С другой стороны, малость возмущения позволяет линеаризовать по нему уравнение (1):

$$a_{tt} + \gamma a_t = a_{xx} - a \cos \varphi_0. \quad (33)$$

С позиций этого уравнения резистивные режимы с удвоенным периодом $2(2\pi/\Omega)$, наблюдавшиеся в [2], могут быть объяснены как результат параметрического возбуждения субгармоник джозефсоновской частоты, вызванного параметрическим членом $a \cos \varphi_0 \simeq a \cos[\Omega t + \theta(x)]$. Однако при условии (2) такие режимы так же, как и стохастический режим, если и существуют, то очень слабо отличаются от простейшего с периодом $2\pi/\Omega$ и практически неидентифицируемы. Это понятно: параметрический эффект обязан «объемному» взаимодействию флаксонов и плазменной волны, а это взаимодействие слабо из-за большого различия скорости плазменной волны (которая близка к единице) и скорости флаксонов (которая при условии (2) почти всюду существенно меньше единицы).

Данное обстоятельство позволяет опустить параметрический член в (33) и заменить $a(t, x)$ в правой части (32) на решение элементарного волнового уравнения $a_{tt} + \gamma a_t = a_{xx}$ с граничными условиями (31). Кроме того, согласно предыдущему анализу в рассматриваемой омической области можно прибегнуть к приближению

$$\varphi_0 \cong \Omega t + \theta(x), \quad \theta(x) \approx (I_s |x| + \gamma \Omega x^2) / 2 + \text{const}. \quad (34)$$

В результате после стандартных вычислений и временного усреднения можно получить из (32) следующее перераспределение сверхтока:

$$\delta j(x) \approx \text{Re} \left\{ [IS \text{sh}(SL/2)]^{-1} \text{ch}(Sx) \exp [i (\theta(L/2) - \theta(x))] \right\}, \quad (35)$$

где введено комплексное волновое число $S = (i\gamma\Omega - \Omega^2)^{1/2}$.

Из (34) и (35) видно, что «плазменные волны» приводят к пространственным осцилляциям усредненной по времени плотности тока, причем как амплитуда, так и пространственная частота этих осцилляций нарастают от середины к краям контакта. Именно такая картина и наблюдалась в упоминавшихся численных экспериментах.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели приближенную аналитическую теорию стационарного резистивного состояния широких джозефсоновских переходов с достаточно малым нормальным сопротивлением. Хотя приведенные результаты привязаны в основном к конкретной математической модели (1), они без труда могут быть обобщены на случай нелинейного трения. Кроме того, использованный подход, возможно, окажется полезным для анализа взаимодействия резистивного состояния с высокочастотным электромагнитным излучением и с постоянными внешними полями. В частности, интересные явления происходят и находят отражение в дифференциальном сопротивлении контакта (в производной ВАХ) в присутствии статического пространственно модулированного магнитного поля [5–7].

Объектом приложения полученных результатов, помимо искусственных контактов, являются естественно возникающие протяженные слабые связи в гранулированных и поликристаллических пленках ВТСП. Так, пленки, изучавшиеся в [5–7], имели сопротивление $R \simeq 1$ Ом на одну линию слабой связи. В то же время оценки λ и D для этих пленок приводят к $D/\lambda \approx 3-10$, так что «критическое» сопротивление R_0 , определенное выше, составляет 3–30 Ом. Таким образом, $R < R_0$ и условие (2) вязкого транспорта магнитного потока выполняется (фактически сильное неравенство в (2) не обязательно, поскольку, как мы видели, в небаллистическом режиме реальная скорость вихрей оказывается много меньше максимальной, т. е. и свободный пробег флаксонов меньше принятого при выводе условия (2)).

Выражаю благодарность А. К. Асадову, Ю. В. Медведеву и П. Н. Михеенко за полезные обсуждения.

Литература

1. И. О. Кулик, И. К. Янсон, *Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах*, Наука, Москва (1970).
2. А. Е. Filippov, Yu. E. Kuzovlev, and T. K. Soboleva, *Phys. Lett. A* **183**, 123 (1993).
3. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, Наука, Москва (1979).
4. Ю. Е. Кузовлев, А. И. Ломтев, *ЖЭТФ* **111**, 1803 (1996).
5. Ю. М. Иванченко, Ю. Е. Кузовлев, П. Н. Михеенко, Я. И. Южелевский, *СФХТ* **4**, 950 (1991).
6. Я. И. Южелевский, Ю. Е. Кузовлев, П. Н. Михеенко, *ФНТ* **17**, 1377 (1991).
7. P. N. Mikheenko and Ya. Y. Yuzhelevskii, *Physica C* **217**, 97 (1993).