*ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 3(9), стр. 805–817* 

# РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ К ШИРИНАМ УРОВНЕЙ В ЛЕГКИХ МЕЗОАТОМАХ

*В. Г. Иванов*[a], *С. Г. Каршенбойм*[b]

[a] *Главная астрономическая обсерватория Российской академии наук 196140, Санкт-Петербург, Россия*

[b] *Научно-исследовательский институт метрологии им Д. И. Менделеева 198005, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 25 февраля 1997 г.

Рассмотрены поправки, связанные с электронной поляризацией вакуума, к радиационным ширинам уровней и интенсивностям линий в легких мюонных атомах. Найдены также полные ширины уровней с учетом конечных размеров ядра, релятивистских эффектов и отдачи.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] в логарифмическом приближении были рассмотрены радиационные поправки относительного порядка $\alpha(Z\alpha)^2$ к дипольным матричным элементам и радиационным ширинам уровней. Как известно, в мезоатомах ведущая радиационная поправка связана с электронной поляризацией и, имея относительный порядок $\alpha$, приводит к поправкам к радиационным ширинам уровней и интенсивностям линий на уровне нескольких процентов. С ростом $Z$ заметную роль также может играть распределение электрического заряда в ядре.

Существенное отличие ведущих радиационных поправок в мюонных атомах от поправок в обычных обусловлено разными характерными атомными импульсами. В обычных легких атомах атомные импульсы $Z\alpha m_e$ много меньше массы электрона $m_e$ и, следовательно, вклад электронной вакуумной поляризации имеет относительный порядок $\alpha(Z\alpha)^2$. Вклад собственной энергии электрона имеет тот же порядок, однако содержит большой логарифм ($\log(Z\alpha)^2$), и при вычислении в логарифмическом приближении можно пренебречь вкладом поляризации вакуума. В мюонных атомах характерный атомный импульс $Z\alpha m_\mu$ оказывается того же порядка, что и электронная масса $m_e$ и, напротив, электронная поляризация доминирует.

Данная работа посвящена обсуждению поправок в ширинам уровней легких мезоатомов с зарядом ядра $Z \leq 10$. Расчеты проводятся для водородоподобных ионов, однако в случае ионов или нейтральных атомов, включающих также электроны, поправки, связанные со взаимодействием электрона и мюона, малы и при необходимости могут быть учтены отдельно.

Напомним также, что в отличие от обычного атома в мюонных системах тонкая структура меньше, чем лэмбовские сдвиги, имеющие при малых $Z$ нерелятивистскую природу, и поэтому результаты для радиационных поправок можно находить в нерелятивистском приближении, а релятивистские поправки можно учесть отдельно.

Работа построена следующим образом: вначале обсуждаются различные оценки радиационных поправок, затем проводится их явное вычисление. Численные результаты приводятся для уровней $2p$. Основная часть работы посвящена радиационным поправкам, однако в Заключении обсуждаются полные ширины и дается обзор всех известных и неизвестных вкладов.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВОК

### 2.1. Приближение дельтообразного потенциала

Прежде всего несколько переформулируем результаты работ [1–3] в терминах более удобных для последующего рассмотрения. В указанных работах были найдены радиационные поправки относительного порядка $\alpha(Z\alpha)^2\log(Z\alpha)$ к вероятностям переходов между уровнями в водородоподобных системах. Логарифмический вклад возникает при учете собственной энергии электрона в кулоновском поле, свойства которой в качестве возмущения значительно отличаются от свойств поляризации вакуума, определяющей ведущую радиационную поправку в мюонном атоме. Однако в вычислительном плане результаты [1–3] основаны на дельтообразности коэффициента при логарифме и отсутствии вкладов, связанных с радиационными поправками к излучению и к волновой функции $p$-состояния. Существенную роль в упрощении вычислений сыграло также отсутствие зависимости возмущения от энергии. При выполнении всех перечисленных условий достаточно было учесть поправки к энергии и к волновой функции $s$-состояния, связанные с однопетлевым оператором собственной энергии электрона (мюона) в кулоновском поле ядра.

Возмущение с дельтообразным потенциалом

$$V(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})\,\frac{\Delta E(1s)}{(\psi_{1s}(0))^2} \tag{1}$$

приводит к поправкам к энергии

$$\Delta E(nl) = \frac{\delta_{l0}}{n^3}\,\Delta E(1s) \tag{2}$$

и к волновой функции состояния $nlm$

$$\Delta\psi_{nlm}(\mathbf{r}) = \delta_{l0}\,\frac{R_{n0}(0)}{R_{10}(0)}\sum_{q\neq n}\psi_{q00}(\mathbf{r})\,\frac{R_{q0}(0)}{R_{10}(0)}\,\frac{\Delta E(1s)}{E_{ns}-E_{qs}}, \tag{3}$$

где $R_{nl}(r)$ — радиальная часть шредингеровской волновой функции

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\vartheta,\varphi), \tag{4}$$

а сумма включает все промежуточные состояния дискретного и непрерывного спектров.

Учитывая их, получаем [1–3] поправку к ширине уровня $2p$ в виде

$$\Delta\Gamma_{2p}^{DP} = -\left(0.98\ldots\right)\mathscr{R}\,\Gamma^{(0)}(2p), \tag{5}$$

где нерелятивистская ширина в дипольном приближении определяется выражением

$$\Gamma^{(0)}(i \to f) = \frac{4\omega_{fi}^3}{3} |\mathbf{d}_{fi}|^2 \tag{6}$$

и в случае перехода $2p \to 1s$ равна

$$\Gamma^{(0)}(2p) = \frac{2^9}{3^8} \alpha (Z\alpha)^2 E_0. \tag{7}$$

Эффективный параметр определен как сдвиг уровня $1s$

$$\mathscr{R} = \frac{\Delta E_{1s}}{E_0} \tag{8}$$

в единицах невозмущенной энергии основного состояния мезоатома (т. е. аналога постоянной Ридберга)

$$E_0 = \frac{(Z\alpha)^2 m_R}{2},$$

а $m_R$ — приведенная масса. Все выражения записаны в релятивистской системе единиц $\hbar = c = 1$ и $\alpha = e^2$, а фазы волновых функций $s$-состояний в координатном представлении определены так, что их значения в нуле вещественны и положительны.

Как известно, ряд возмущений в легких водородоподобных атомах с небольшим зарядом ядра $Z$ отвечает в первом приближении дельтообразному потенциалу. Так, распределение заряда ядра можно учесть при помощи возмущения

$$V_{NC}(\mathbf{r}) = \frac{2\pi(Z\alpha)}{3} \langle R^2 \rangle \, \delta(\mathbf{r}),$$

где $\langle R^2 \rangle$ — средний квадрат зарядового радиуса ядра. Таким образом, приведенный выше результат (5) пригоден для учета распределения заряда в ядре с коэффициентом

$$\Delta E_{NC}(1s) = \frac{2}{3} (Z\alpha)^4 \, m_R^3 \, \langle R^2 \rangle. \tag{9}$$

Взаимодействие, отвечающее за ядерную поляризацию, в легких мезоатомах также может считаться дельтообразным и может быть учтено при помощи поправки (5).

Общее выражение для радиационных поправок к ширине уровня и явные вычисления проводятся в следующих разделах, однако, опираясь на результаты (5) и предваряя явные вычисления, можно оценить величину вклада. Действительно, в случае легких мезоатомов в ведущем порядке по параметру $Z\alpha$ по-прежнему нет зависимости возмущения от энергии и отсутствуют поправки к оператору излучения фотона, но появляются дополнительные поправки к волновой функции и энергии $p$-состояний. Однако нетрудно убедиться, что вклады в сдвиги уровней $1s$, $2s$ и $2p$ в легких мезоатомах обладают тем свойством (см. например, результаты для мезоводорода в [4, 5] и для мезогелия [6]), что результаты для $2p$-уровней существенно меньше, чем для $2s$, а сдвиги для уровней $1s$ и $2s$ отличаются примерно в восемь раз ($n^3$). Такие энергетические сдвиги как раз и имеют место при дельтообразном возмущении. С другой стороны, вклад в поправку к дипольному матричному элементу для дельтообразного возмущения в значительной степени определяется недиагональным матричным элементом от возмущения, взятым между состояниями $1s$ и $2s$ [1–3]. Суммируя вышесказанное, можно написать оценку для поправки к ширине уровней $2p$, воспользовавшись для коэффициента в (5) численными значениями величины лэмбовского сдвига основного уровня. Результаты для вклада вакуумной поляризации удобно представлять в виде

$$\Delta\Gamma = C_{VP}\,\mathcal{R}_{VP}\,\Gamma^{(0)}. \tag{10}$$

Эффективные параметры для разных значений $Z$ и оценки приведены в табл. 1. Погрешность оценок характеризуется величинами

$$\kappa_1 = \frac{\Delta E(1s) - 8\,\Delta E(2s)}{\Delta E(1s)},$$

$$\kappa_2 = \frac{\Delta E(2p)}{\Delta E(2s)},$$

которые обращаются в нуль в случае дельтообразного потенциала.

*Таблица 1*

**Оценки однопетлевых радиационных поправок к ширине распада $2p \to 1s$ в приближении дельтообразного потенциала**

| $Z$ | $\mathcal{R}_{VP}/\alpha$ | $\kappa_1$, % | $\kappa_2$, % | $\Delta\Gamma^{DP}/\alpha\Gamma^{(0)}$ | $\Delta I^{DP}/\alpha I^{(0)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −0.10 | 8 | 7 | 0.10 | 0.24 |
| 2 | −0.24 | 12 | 20 | 0.23 | 0.54 |
| 3 | −0.34 | 11 | 31 | 0.33 | 0.78 |
| 4 | −0.42 | 10 | 40 | 0.41 | 0.97 |
| 5 | −0.49 | 8 | 46 | 0.48 | 1.1 |
| 6 | −0.55 | 5 | 52 | 0.54 | 1.3 |
| 7 | −0.60 | 3 | 56 | 0.59 | 1.4 |
| 8 | −0.65 | 1 | 59 | 0.64 | 1.5 |
| 9 | −0.69 | −1 | 62 | 0.68 | 1.6 |
| 10 | −0.73 | −2 | 64 | 0.72 | 1.7 |

При оценке погрешности следует также помнить, что окончательный результат (5) возникает [1–3] после больших численных сокращений. Отдельные вклады, связанные с поправками к частоте и к дипольному матричному элементу в выражении (6), представлены в табл. 2.

*Таблица 2*

**Отдельные вклады, найденные в приближении дельтообразного потенциала ($DP$) и эффективного заряда (бегущей константы связи ($RC$))**

| Величина | Поправки к частоте | Поправки к матричным элементам | Полный вклад |
|---|---|---|---|
| $\Delta\Gamma^{DP}/\mathcal{R}_{VP}\Gamma^{(0)}$ | −4.00 | 3.02 | −0.98 |
| $\Delta I^{DP}/\mathcal{R}_{VP}I^{(0)}$ | −5.33 | 3.02 | −2.32 |
| $\Delta\Gamma^{RC}/\mathcal{R}_{VP}\Gamma^{(0)}$ | −3.00 | 1.00 | −2.00 |
| $\Delta I^{RC}/\mathcal{R}_{VP}I^{(0)}$ | −4.00 | 1.00 | −3.00 |

### 2.2. Приближение эффективного заряда

Легко видеть, что приведенные выше оценки должны быть тем лучше, чем меньше $Z$. Однако с ростом заряда ядра появляется возможность оценить вклады при помощи бегущей константы связи. В самом деле, полагая, что

$$Z\alpha m_\mu \gg m_e, \tag{11}$$

получаем общее правило для учета однопетлевых поправок:

$$Z\,\alpha(q) = Z\,\alpha\left\{1 + \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{3}\log\frac{q^2}{m_e^2} - \frac{5}{9}\right)\right\}, \tag{12}$$

где эффективный импульс определен как $q = Z\alpha m_\mu$.

Строго говоря, учет нелогарифмического слагаемого в выражении для бегущей константы связи является превышением точности, и, кроме того, для разных состояний эффективные импульсы должны несколько различаться. Следует заметить, что нерелятивистские[1)] дипольные радиационные ширины пропорциональны одинаковому фактору $(Z\alpha)^4$, и поэтому зависимость от состояний в этом приближении равна нулю. Заметим, что даже при $Z = 10$ выражения для поправок еще не находятся в асимптотической области, что можно увидеть из выражений для энергии низших уровней (см. ниже). Поэтому более разумно вместо прямого применения правила (12) воспользоваться связью между ширинами и энергиями. Для этого заметим, что энергии уровней пропорциональны $(Z\alpha)^2$ и, следовательно, в обсуждаемом приближении величины

$$\frac{\Delta E(1s) - 4\,\Delta E(2s)}{\Delta E(1s)} = \frac{1+\kappa_1}{2},$$

$$\frac{\Delta E(2s) - \Delta E(2p)}{\Delta E(2s)} = 1 - \kappa_2$$

должны обращаться в нуль. Поправку запишем теперь в виде

$$\Gamma_{2p}^{RC} = -2\,\mathcal{R}_{VP}\,\Gamma^{(0)}(2p), \tag{13}$$

а ее точность определяется малостью величин $(1+\kappa_1)/2$ и $1-\kappa_2$. Оценки для разных значений $Z$ приведены в табл. 3, а величины отдельных слагаемых — в табл. 2.

В заключение обсуждения оценок отметим, что волновые функции обычно более чувствительны к возмущениям, чем энергии, и поэтому погрешности могут быть достаточно велики. Однако то, что результаты, отвечающие противоположным асимптотическим условиям[2)], приводят к величинам, различающимся всего в два раза, указывает на слабую зависимость результатов от $Z$ после выделения масштабного фактора $\mathcal{R}$.

---

[1)] Наряду с асимптотическим условием (11) область применимости обсуждаемой нерелятивистской оценки ограничена также очевидным требованием $Z\alpha \ll 1$.

[2)] Дельтообразный потенциал, как нетрудно понять, возникает в пределе $Z\alpha m_\mu \ll m_e$.

*Таблица 3*

**Оценки однопетлевых радиационных поправок к ширине распада $2p \to 1s$ в приближении бегущей константы связи**

| $Z$ | $(1+\kappa_1)/2$, % | $1-\kappa_2$, % | $\Delta\Gamma^{RC}/\alpha\Gamma^{(0)}$ | $\Delta I^{RC}/\alpha I^{(0)}$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 55 | 69 | 0.67 | 1.0 |
| 4 | 55 | 60 | 0.84 | 1.2 |
| 5 | 54 | 54 | 1.0 | 1.5 |
| 6 | 52 | 48 | 1.1 | 1.7 |
| 7 | 51 | 44 | 1.2 | 1.8 |
| 8 | 50 | 41 | 1.3 | 2.0 |
| 9 | 50 | 38 | 1.4 | 2.1 |
| 10 | 49 | 36 | 1.4 | 2.2 |

## 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВОК

Радиационные поправки к уровням энергии и волновым функциям, а следовательно, и к ширинам уровней, могут быть описаны нерелятивистским (для не слишком больших $Z$) потенциалом Юлинга. При этом ширина с учетом поправки определяется выражением (6) с волновыми функциями и энергиями, найденными с учетом возмущающего потенциала. Для вычисления поправок к ширине и интенсивностям можно найти поправки к дипольным матричным элементам и энергиям переходов.

Выражение для ведущих радиационных поправок порядка $\alpha$ к дипольному матричному элементу в мезоатоме имеет вид

$$\Delta d_z(2p \to 1s) = \langle \Delta^{1s}|ez|2p\rangle + \langle 1s|ez|\Delta^{2p}\rangle,$$

где поправки к волновым функциям

$$\langle \Delta^{nlm}| = \sum_{q\neq n} \frac{\langle nlm|V_{VP}|qlm\rangle}{E_n - E_q}\langle qlm|$$

включают сумму по всем промежуточным состояниям дискретного и непрерывного спектров.

В терминах нормированных дипольных матричных элементов [2]

$$\mathscr{D}^s_q = \frac{d_z(2p \to qs)}{d_z(2p \to 1s)}\frac{R_{10}(0)}{R_{q0}(0)}, \qquad (14)$$

$$\mathscr{D}^p_q = \frac{d_z(qp \to 1s)}{d_z(2p \to 1s)}\frac{R'_{21}(0)}{R'_{q1}(0)} \qquad (15)$$

относительная поправка приобретает вид

$$\frac{\Delta d_z(2p\to 1s)}{d_z(2p\to 1s)} = \sum_{q\neq 1} \mathscr{D}_q^s \frac{R_{q0}(0)}{R_{10}(0)} \frac{\langle 1s|V_{VP}|qs\rangle}{E_1-E_q} + \sum_{q\neq 2} \mathscr{D}_q^p \frac{R'_{q1}(0)}{R'_{21}(0)} \frac{\langle qp|V_{VP}|2p\rangle}{E_2-E_q}. \tag{16}$$

Явные выражения дипольных матричных элементов, необходимые для дальнейших вычислений, приведены в Приложении.

Недиагональный матричный элемент от электронной поляризации вакуума легко выражается через радиальные волновые функции:

$$\langle nlm|V_{VP}(r)|ql'm'\rangle = -(Z\alpha)\frac{\alpha}{\pi}\delta_{mm'}\delta_{ll'}V_{nq}^l, \tag{17}$$

где

$$V_{nq}^l = \int_0^\infty dr\, r^2 R_{nl}(r)\, R_{ql}(r)\int_0^1 dv \frac{v^2\left(1-v^2/3\right)}{1-v^2}\frac{e^{-\lambda r}}{r}, \tag{18}$$

$$\lambda = \frac{2m_e}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{19}$$

Подставляя явные выражения для волновых функций (см. Приложение), получаем

$$\int_0^\infty dr\, r\, R_{10}(r)\, R_{q0}(r)e^{-\lambda r} = \frac{R_{10}(0)R_{q0}(0)}{\left[\lambda+\gamma(1+1/q)\right]^2}\left[\frac{\lambda+\gamma(1-1/q)}{\lambda+\gamma(1+1/q)}\right]^{q-1}, \tag{20}$$

$$\int_0^\infty dr\, r\, R_{21}(r)\, R_{q1}(r)\, e^{-\lambda r} = \frac{96 R'_{21}(0)R'_{q1}(0)}{\left[2\lambda+\gamma(1+2/q)\right]^4}\left[\frac{2\lambda+\gamma(1-2/q)}{2\lambda+\gamma(1+2/q)}\right]^{q-2}. \tag{21}$$

В результате матричный элемент (17) сводится к однократному интегралу:

$$V_{1q}^s = R_{10}(0)R_{q0}(0)\int_0^1 dv\frac{v^2\left(1-v^2/3\right)}{1-v^2}\frac{1}{\left[\lambda+\gamma(1+1/q)\right]^2}\left[\frac{\lambda+\gamma(1-1/q)}{\lambda+\gamma(1+1/q)}\right]^{q-1}, \tag{22}$$

$$V_{q2}^p = R'_{21}(0)R'_{q1}(0)\int_0^1 dv\frac{v^2\left(1-v^2/3\right)}{1-v^2}\frac{96}{\left[2\lambda+\gamma(1+2/q)\right]^4}\left[\frac{2\lambda+\gamma(1-2/q)}{2\lambda+\gamma(1+2/q)}\right]^{q-2}. \tag{23}$$

Окончательное выражение для вклада однопетлевой поляризации вакуума в ширину $2p$-уровня принимает вид

$$\frac{\Delta d_z(2p\to 1s)}{d_z(2p\to 1s)} = \frac{\alpha}{\pi}\left\{8\sum_{n\neq 1}\frac{1}{n^3}\frac{\mathscr{D}_n^s\,\widetilde{V}_{1n}^s}{1-1/n^2} + 8\int_0^\infty \frac{dt}{t^3(1+1/t^2)}\frac{\mathscr{D}_t^s\,\widetilde{V}_{1t}^s}{1-e^{-2\pi t}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{12}\sum_{n\neq 2}\frac{32}{n^5}\frac{n^2-1}{3}\frac{\mathscr{D}_n^p\,\widetilde{V}_{n2}^p}{1/4-1/n^2} + \frac{1}{12}\int_0^\infty \frac{32\,dt}{t^5(1/4+1/t^2)}\frac{1+t^2}{3}\frac{\mathscr{D}_t^p\,\widetilde{V}_{t2}^p}{1-e^{-2\pi t}}\right\}, \tag{24}$$

где введены обозначения

$$V_{1q}^s = R_{10}(0)R_{q0}(0)\widetilde{V}_{1q}^s/\gamma^2,$$

$$V_{q2}^p = R'_{21}(0)R'_{q1}(0)\widetilde{V}_{q2}^p/\gamma^2,$$

более удобные для аналитического продолжения на состояния непрерывного спектра. Выражения для $\widetilde{V}_{1t}^s$, $\widetilde{V}_{t2}^p$ получаются заменой $n \to -it$.

Численное интегрирование приводит к следующим результатам: для мезоводорода

$$\frac{\Delta d_z(2p \to 1s)}{d_z(2p \to 1s)} = \frac{\alpha}{\pi}\,[-0.5867 + 0.0805 + 0.0525] = -0.4537\,\frac{\alpha}{\pi},$$

для мезогелия

$$\frac{\Delta d_z(2p \to 1s)}{d_z(2p \to 1s)} = \frac{\alpha}{\pi}\,[-1.274 + 0.199 + 0.135] = -0.940\,\frac{\alpha}{\pi}.$$

Слагаемые в квадратных скобках происходят от вкладов состояний с $n = 2$, более высоких связанных состояний и от непрерывного спектра соответственно. Мы видим, что вклад с $n = 2$ численно доминирует, что оправдывает оценки при помощи формул для дельтообразного потенциала.

Результаты для $Z \le 10$ приводятся в табл. 4. Видно, что вклады $p$-состояний меньше соответствующих вкладов $s$-состояний, что служит хорошим основанием для оценок по дельтообразному потенциалу. Также можно увидеть, что обе оценки, приведенные в предыдущем разделе (см. табл. 1–3), находятся в согласии с результатами прямых вычислений. Согласие оценок и результатов прямых расчетов позволяет надеяться, что аналогичные оценки будут применимы и для ширин и интенсивностей переходов более высоких уровней. Результаты для дельтообразного потенциала для переходов между уровнями с $n, n' \le 4$, необходимые для оценок, получены в работе [3].

*Таблица 4*

**Результаты прямых вычислений ширины уровня 2$p$ и интенсивности линии 2$p \to 1s$. Верхний индекс ($s$ и $p$) указывает на уровень, к волновой функции ($\Psi$) или энергии ($E$) которого вычислена поправка**

| $Z$ | $C_E^s$ | $C_E^p$ | $C_\Psi^s$ | $C_\Psi^p$ | $C_{VP}$ | $\Delta I_{VP}^{tot}/\mathscr{R}_{VP} I^{(0)}$ | $\Delta\Gamma_{VP}^{tot}/\alpha\Gamma^{(0)}$ | $\Delta I_{VP}^{tot}/\alpha I^{(0)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −4.0 | 0.03 | 2.9 | −0.09 | −1.2 | −2.5 | 0.12 | 0.26 |
| 2 | −4.0 | 0.09 | 2.8 | −0.22 | −1.4 | −2.7 | 0.32 | 0.63 |
| 3 | −4.0 | 0.14 | 2.7 | −0.31 | −1.5 | −2.8 | 0.51 | 0.94 |
| 4 | −4.0 | 0.18 | 2.6 | −0.37 | −1.6 | −2.9 | 0.66 | 1.2 |
| 5 | −4.0 | 0.21 | 2.6 | −0.42 | −1.6 | −2.9 | 0.80 | 1.4 |
| 6 | −4.0 | 0.24 | 2.5 | −0.46 | −1.7 | −2.9 | 0.93 | 1.6 |
| 7 | −4.0 | 0.27 | 2.5 | −0.49 | −1.7 | −3.0 | 1.0 | 1.8 |
| 8 | −4.0 | 0.29 | 2.5 | −0.51 | −1.8 | −3.0 | 1.1 | 1.9 |
| 9 | −4.0 | 0.31 | 2.4 | −0.53 | −1.8 | −3.0 | 1.2 | 2.1 |
| 10 | −4.0 | 0.33 | 2.4 | −0.54 | −1.8 | −3.0 | 1.3 | 2.2 |

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсудим теперь выражение для полной радиационной ширины уровней $2p_j$:

$$\Gamma_{2p_j}(Z) = \Gamma^{(0)}(2p_j)\left(\frac{m_R}{m_\mu}\right)^2\left(1+Z\frac{m_\mu}{M}\right)^2 \times$$
$$\times\left[1+C_{Rel}(2p_j)(Z\alpha)^2+C'_{Rel}(2p_j).\frac{Zm_\mu}{M}(Z\alpha)^2+C_{VP}(2p)\mathscr{R}_{VP}+C_{NC}(2p)\mathscr{R}_{NC}\right], \quad (25)$$

где нерелятивистская дипольная ширина $\Gamma^{(0)}$ определена в (7), а ее численное значение можно найти, подставляя величину энергии основного состояния

$$E_0 = 2813.226(3)\,Z^2\frac{m_R}{m_\mu}\ \text{эВ}.$$

Эффективные параметры $\mathscr{R}$ и константы $C$ для вклада вакуумной поляризации и эффектов конечного размера ядра рассмотрены выше. Эффекты отдачи в нерелятивистском приближении учтены специальным множителем

$$\left(\frac{m_R}{m}\right)^2\left(1+Z\frac{m_\mu}{M}\right)^2$$

[7], где $M$ — масса ядра. Релятивистский коэффициент $C_{Rel}$ можно легко найти, вычисляя ширину по дираковским волновым функциям (результат для состояния $2p_{1/2}$ совпадает с найденным в работе [8] и противоречит результату [9]; в случае состояния $2p_{3/2}$ наш результат находится в согласии с [9]). Также нетрудно учесть и релятивистскую часть отдачи (см. табл. 5).

*Таблица 5*

**Коэффициенты $C_{Rel}$ и $C'_{Rel}$ (см. (25)) для вычисления релятивистской поправки $\Delta\Gamma_{Rel}$**

| Состояние | $C_{Rel}$ | $C'_{Rel}$ |
|---|---|---|
| $2p_{1/2}$ | $\ln\frac{9}{8}$ | 1 |
| $2p_{3/2}$ | $-\frac{7}{48}-\frac{1}{2}\ln\frac{32}{27}$ | 1 |

В табл. 6 мы собрали наиболее значимые вклады в ширины уровней. Доминирует поправка, индуцированная однопетлевой электронной поляризацией вакуума. Погрешность учета конечных размеров ядра связана с поправками более высоких порядков по $Z\alpha$. Следует иметь в виду, что обсуждаемые здесь поправки по-разному зависят от заряда ядра $Z$, и меньшие поправки могут стать заметными в более тяжелых мезоатомах.

В ряде работ исследовались с высокой точностью отношения интенсивностей некоторых линий в мезоатомах (см. [10] и ссылки в этой работе). Различные поправки к интенсивностям линии ($2p\to 1s$) представлены в табл. 7. Погрешность измерений находится на уровне процента, и обсуждаемые здесь поправки могут оказаться существенными.

*Таблица 6*

**Основные вклады в ширину $\Gamma(2p_j)$ (см. (25)). Поправки к отдаче ($\Delta\Gamma_{Rec}$) отвечают отличию фактора $(m_R/m_\mu)^2\,(1+Zm_\mu/M)^2$ от единицы**

| $Z$ | $A$ | $\Delta\Gamma_{Rec}/\Gamma^{(0)}$ | $\Delta\Gamma_{VP}/\Gamma^{(0)}$ | $\Delta\Gamma_{NC}/\Gamma^{(0)}$ | $\Delta\Gamma_{Rel}/\Gamma^{(0)}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $j=1/2$ | $j=3/2$ |
| 1 | 1 | 0 | $8.729(9)\cdot10^{-4}$ | $-1.20(3)\cdot10^{-5}$ | $1.11\cdot10^{-5}$ | $-7.4\cdot10^{-6}$ |
| 2 | 4 | 0.0558903 | $2.349(4)\cdot10^{-3}$ | $-2.12(3)\cdot10^{-4}$ | $3.65\cdot10^{-5}$ | $-3.77\cdot10^{-5}$ |
| 3 | 7 | 0.0646677 | $3.682(5)\cdot10^{-3}$ | $-1.00(3)\cdot10^{-3}$ | $7.90\cdot10^{-5}$ | $-8.81\cdot10^{-5}$ |
| 4 | 9 | 0.075988 | $4.840(3)\cdot10^{-3}$ | $-1.98(8)\cdot10^{-3}$ | $1.422\cdot10^{-4}$ | $-1.548\cdot10^{-4}$ |
| 5 | 11 | 0.083268 | $5.858(3)\cdot10^{-3}$ | $-2.8(2)\cdot10^{-3}$ | $2.240\cdot10^{-4}$ | $-2.401\cdot10^{-4}$ |
| 6 | 12 | 0.095858 | $6.753(2)\cdot10^{-3}$ | $-4.3(2)\cdot10^{-3}$ | $3.326\cdot10^{-4}$ | $-3.359\cdot10^{-4}$ |
| 7 | 14 | 0.098775 | $7.554(3)\cdot10^{-3}$ | $-6.3(4)\cdot10^{-3}$ | $4.531\cdot10^{-4}$ | $-4.569\cdot10^{-4}$ |
| 8 | 16 | 0.10104 | $8.262(2)\cdot10^{-3}$ | $-9.3(8)\cdot10^{-3}$ | $5.923\cdot10^{-4}$ | $-5.965\cdot10^{-4}$ |
| 9 | 19 | 0.09724 | $8.913(3)\cdot10^{-3}$ | $-0.013(1)$ | $7.374\cdot10^{-4}$ | $-7.674\cdot10^{-4}$ |
| 10 | 20 | 0.1042 | $9.504(3)\cdot10^{-3}$ | $-0.018(2)$ | $9.265\cdot10^{-4}$ | $-9.317\cdot10^{-4}$ |

*Таблица 7*

**Основные поправки к интенсивности линии переходов $2p_j\to 1s$**

| $Z$ | $A$ | $\Delta I_{Rec}/I^{(0)}$ | $\Delta I_{VP}/I^{(0)}$ | $\Delta I_{NC}/I^{(0)}$ | $\Delta I_{Rel}/I^{(0)}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $j=1/2$ | $j=3/2$ |
| 1 | 1 | 0 | $1.8665(9)\cdot10^{-3}$ | $4.3(6)\cdot10^{-6}$ | $1.57\cdot10^{-5}$ | $-1.2\cdot10^{-6}$ |
| 2 | 4 | 0.0558903 | $4.588(4)\cdot10^{-3}$ | $7.5(5)\cdot10^{-5}$ | $5.48\cdot10^{-5}$ | $-1.28\cdot10^{-5}$ |
| 3 | 7 | 0.0646677 | $6.848(5)\cdot10^{-3}$ | $3.6(5)\cdot10^{-4}$ | $1.202\cdot10^{-4}$ | $-3.19\cdot10^{-5}$ |
| 4 | 9 | 0.075988 | $8.737(3)\cdot10^{-3}$ | $7(1)\cdot10^{-4}$ | $2.154\cdot10^{-4}$ | $-5.50\cdot10^{-5}$ |
| 5 | 11 | 0.083268 | 0.010359(3) | $1.0(3)\cdot10^{-3}$ | $3.38\cdot10^{-4}$ | $-8.4\cdot10^{-5}$ |
| 6 | 12 | 0.095858 | 0.011763(2) | $1.5(4)\cdot10^{-3}$ | $4.97\cdot10^{-4}$ | $-1.11\cdot10^{-4}$ |
| 7 | 14 | 0.098775 | 0.013007(3) | $2.2(7)\cdot10^{-3}$ | $6.77\cdot10^{-4}$ | $-1.51\cdot10^{-4}$ |
| 8 | 16 | 0.10104 | 0.014104(2) | $3(1)\cdot10^{-3}$ | $8.9\cdot10^{-4}$ | $-2.0\cdot10^{-4}$ |
| 9 | 19 | 0.09724 | 0.015105(3) | $5(2)\cdot10^{-3}$ | $1.11\cdot10^{-3}$ | $-2.6\cdot10^{-4}$ |
| 10 | 20 | 0.1042 | 0.016008(3) | $6(4)\cdot10^{-3}$ | $1.38\cdot10^{-3}$ | $-3.1\cdot10^{-4}$ |

Окончательные результаты для ширин представлены в табл. 8. Погрешность результатов определяется оценкой невычисленных вкладов более высоких порядков и точностью численного интегрирования вклада поляризации вакуума (см. табл. 6).

*Таблица 8*

**Полные ширины переходов $2p_j \to 1s$**

| $Z$ | $A$ | $\Gamma_{1/2}$ | $\Gamma_{3/2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.0767426(7) | 0.0767412(7) |
| 2 | 4 | 1.40457(3) | 1.40446(3) |
| 3 | 7 | 7.2599(3) | 7.2587(3) |
| 4 | 9 | 23.276(2) | 23.269(2) |
| 5 | 11 | 57.36(1) | 57.33(1) |
| 6 | 12 | 120.36(3) | 120.28(3) |
| 7 | 14 | 223.6(1) | 223.4(1) |
| 8 | 16 | 381.9(3) | 381.4(3) |
| 9 | 19 | 608.2(8) | 607.2(8) |
| 10 | 20 | 929(2) | 928(2) |

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-02-03977).

*ПРИЛОЖЕНИЕ*

**Явные выражения для волновых функций и матричных элементов**

Радиальные части волновых функций (4) имеют вид

$$R_{10}(r) = R_{10}(0)\exp(-\gamma r),$$

$$R_{n0}(r) = R_{n0}(0)\exp\left(-\gamma r/n\right)\ F(1-n, 2; 2\gamma r/n),$$

$$R_{k0}(r) = R_{k0}(0)\exp(-ikr)\ F(1+i\gamma/k, 2; 2ikr),$$

$$R_{21}(r) = R'_{21}(0)\,\gamma r\ \exp(-\gamma r/2),$$

$$R_{n1}(r) = R'_{n1}(0)\left(2\gamma r/n\right)\exp\left(-\gamma r/n\right)\ F(2-n, 4; 2\gamma r/n),$$

$$R_{k1}(r) = R'_{k1}(0)\,(2kr)\exp(-ikr)\ F(2+i\gamma/k, 4; 2ikr),$$

где

$$\gamma = Z\alpha m_R,$$

$F(a, b; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, а волновое число $k$ отвечает состояниям непрерывного спектра.

Они определены так, что их значения в нуле для $s$-состояний и значения производных для $p$-состояний

$$R'_{q1}(0) = \frac{1}{\gamma} \left. \frac{\partial R_{q1}(r)}{\partial r} \right|_{r=0} \tag{П.1}$$

вещественны и положительны, и в случае связанных состояний равны

$$\left( \frac{R_{n0}(0)}{R_{10}(0)} \right)^2 = \frac{1}{n^3} \tag{П.2}$$

и

$$\left( \frac{R'_{n1}(0)}{R'_{21}(0)} \right)^2 = \frac{32}{3} \frac{1}{n^3} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right). \tag{П.3}$$

Для состояний непрерывного спектра равенства приобретают вид

$$\left( \frac{R_{k0}(0)}{R_{10}(0)} \right)^2 = \frac{2\pi}{\gamma} \frac{k/\gamma}{1 - \exp(-2\pi\gamma/k)} \tag{П.4}$$

и

$$\left( \frac{R'_{k1}(0)}{R'_{21}(0)} \right)^2 = \frac{32}{3} \frac{2\pi}{\gamma} \frac{k^3/\gamma}{1 - \exp(-2\pi\gamma/k)} \left( 1 + \frac{\gamma^2}{k^2} \right). \tag{П.5}$$

Нормированные дипольные матричные элементы имеют вид

$$\mathscr{D}^s_n = 3^4 \frac{n^6}{(n^2 - 4)^3} \left( \frac{n - 2}{n + 2} \right)^n, \tag{П.6}$$

$$\mathscr{D}^p_n = \frac{3^5}{2^6} \frac{n^6}{(n^2 - 1)^3} \left( \frac{n - 1}{n + 1} \right)^n \tag{П.7}$$

для дискретных состояний и

$$\mathscr{D}^s_t = 3^4 \frac{t^6}{(t^2 + 4)^3} \exp\left( -2t \operatorname{arctg} \frac{2}{t} \right), \tag{П.8}$$

$$\mathscr{D}^p_t = \frac{3^5}{2^6} \frac{t^6}{(t^2 + 1)^3} \exp\left( -2t \operatorname{arctg} \frac{1}{t} \right) \tag{П.9}$$

— для непрерывных, где $t = \gamma/k$ — непрерывный аналог главного квантового числа $n$.

## Литература

1. С. Г. Каршенбойм, ЖЭТФ **106**, 414 (1994); ЯФ **58**, 901 (1995).

2. С. Г. Каршенбойм, ЖЭТФ **107**, 1061 (1995).
3. V. G. Ivanov and S. G. Karshenboim, Phys. Lett. A **210**, 313 (1996); В. Г. Иванов, С. Г. Каршенбойм, ЖЭТФ **109**, 1219 (1996).
4. А. Д. Галанин, И. Я. Померанчук, ДАН СССР **96**, 251 (1952).
5. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1969).
6. G. A. Rinker, Phys. Rev. A **14**, 18 (1976); L. W. Fullerton and G. A. Rinker, Phys. Rev. A **13**, 1283 (1976).
7. Z. Fried and A. D. Martin, Nuovo Cim. **29**, 574 (1963).
8. Ю. Л. Соколов, В. П. Яковлев, ЖЭТФ **83**, 15 (1982).
9. А. В. Боровский, С. А. Запрягаев, О. И. Зацаринный, Н. А. Манаков, *Плазма многозарядных ионов*, Химия, Санкт-Петербург (1995).
10. C. J. Orth, M. E. Schilaci, and J. D. Knight, Phys. Rev. A **25**, 876 (1982).