

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА
ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД
МОСКВА

ТОМ 112, ВЫПУСК 3(9)
СЕНТЯБРЬ, 1997
«НАУКА»

УСТОЙЧИВОСТЬ САМОГРАВИТИРУЮЩИХ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ ДИСКОВ

© 1997

В. Л. Поляченко, Е. В. Поляченко

*Институт астрономии Российской академии наук
109017, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 26 ноября 1996 г.

Получены критерии, гарантирующие устойчивость газовых и звездных самогравитирующих дисков относительно любых локализованных малых возмущений. Эти критерии сформулированы в форме неравенств $Q > Q_c$ (отдельно для газа и звезд), которым должен удовлетворять «параметр устойчивости» Q , равный, по определению, единице на границе устойчивости радиальных возмущений. Критическое значение параметра устойчивости Q_c заметно больше (хотя и порядка) единицы, что свидетельствует о большей неустойчивости неаксиально-симметричных возмущений. Показано, что выведенный критерий устойчивости газового диска справедлив для дисков, вращающихся внутри сфероидальной компоненты (как в спиральных галактиках) или в поле центральной массы (планетные кольца и аккреционные диски). Звездные диски стабилизируются существенно труднее газовых, что в основном объясняется присущей им анизотропией распределения скоростей, которая благоприятна для неустойчивости.

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамические неустойчивости гравитирующих систем изучаются по нескольким причинам. Прежде всего, непосредственным результатом развития неустойчивостей может быть формирование различных наблюдаемых структурных черт (таких, например, как спиральные рукава галактик, галактические переемычки — бары — или тонкая структура планетных колец). Эллипсоидальная форма у эллиптических галактик также возникает в результате неустойчивости [1]. В некоторых случаях интерес представляют равновесные состояния, близкие к каким-либо другим, более простым состояниям, обладающим большей симметрией. В качестве примера можно снова привести

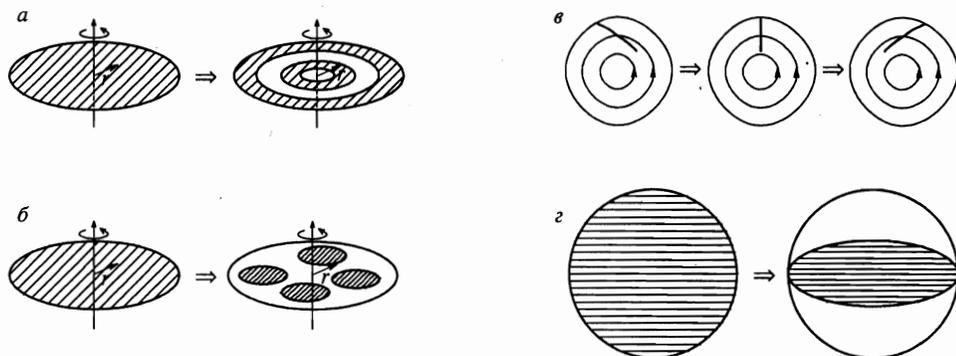


Рис. 1. Некоторые примеры эволюции самогравитирующих дисков: *a* — аксиально-симметричные (радиальные) возмущения; *б* — эволюция первоначально холодного (с круговыми орбитами частиц) диска; *в* — скручивание спирального возмущения в дифференциально вращающемся диске; *г* — бар-мода (эллиптическая деформация) диска

дисковые системы в теории спиральной структуры [2, 3], которая изучает неаксиально-симметричные равновесия (спиральной формы), мало отличающиеся от аксиально-симметричного «фона». Задачу об отыскании таких равновесных состояний можно рассматривать как частный случай задачи о малых колебаниях. Требование устойчивости часто накладывает довольно жесткие ограничения на параметры равновесных систем. Хорошим примером является история с интерпретацией обнаруженного группой Сарджента [4] аномально быстрого роста светимости звезд в центре сферической галактики М87 (позднее аналогичные «каспы светимости» были найдены и в ряде других галактик). Попытка объяснить эти данные в рамках стандартных моделей, изотропных вблизи центра, оказались безуспешными; тогда авторы работы [4] предположили, что в центре М87 имеется массивная (с массой порядка $5 \cdot 10^9$ масс Солнца) черная дыра. Не считая исчерпанными менее экзотические варианты объяснения, Данкан и Уилер рассмотрели [5] возможность анизотропных равновесий и показали, что достаточным преобладанием радиальных скоростей над трансверсальными также можно, в принципе, объяснить наблюдаемый эффект. Позднее эта идея развивалась в большом числе работ других авторов (см. например, [6]). Однако оказалось [3], что необходимая степень анизотропии настолько велика, что все рассматривавшиеся анизотропные модели заведомо неустойчивы. Речь идет о неустойчивости радиальных орбит (подробнее см. [1]), которая приводит к превращению первоначально сферической системы в эллиптическую. Поэтому в действительности системы с анизотропией, принятой в [5, 6], не могли бы оставаться сферическими (что противоречит наблюдаемой сферической форме изофот).

Наиболее динамичными и подверженными разнообразным неустойчивостям являются дисковые системы. К астрофизическим дискам относятся спиральные галактики, аккреционные диски, широкие планетные кольца (как у Сатурна), а также такие гипотетические объекты, как протогалактики и протопланетные облака. Сильно сплюсну-

тый, дискообразный вид всех перечисленных объектов обязан их быстрому вращению¹⁾. Соответственно, равновесие в таких дисках в основном обусловлено балансом центробежной и гравитационной сил. Однако использование простейшей модели — бесконечно-тонкого диска с нулевым давлением — было бы некорректно ввиду сильной неустойчивости такого диска. Формально это следует из выведенного Тоомре [7] локального дисперсионного уравнения, которое связывает частоту ω и волновое число k_r коротковолнового аксиально-симметричного (кольцевого, см. рис. 1а) возмущения вблизи некоторого произвольного радиуса r :

$$\omega^2 = \kappa^2(r) - 2\pi G\sigma_0(r)|k_r|, \quad (1)$$

где $\kappa(r) = \sqrt{4\Omega^2 + r(\Omega^2)'} - \text{эпициклическая частота}$, $\Omega(r)$ — угловая скорость вращения, $(\Omega^2)' \equiv d\Omega^2/dr$ (вращение, как правило, является дифференциальным, т.е. $\Omega' \neq 0$, причем $\Omega' < 0$), $\sigma_0(r)$ — поверхностная плотность массы диска, G — гравитационная постоянная; возмущение считается пропорциональным $\exp(-i\omega t + ik_r r)$, а диск располагается в плоскости xy . Такой вид дисперсионного уравнения представляется достаточно очевидным. При $G = 0$, т.е. в пренебрежении самогравитацией диска мы имеем, согласно (1), колебания с частотой κ — это и есть эпициклические колебания; уравнение

$$\ddot{r}_1 + \kappa^2 r_1 = 0$$

для малого возмущения r_1 радиуса первоначально круговой орбиты ($r(t) = r_0 + r_1(t)$) легко получить, линеаризуя уравнение движения звезды

$$\ddot{r} = -\frac{dW}{dr},$$

где эффективная потенциальная энергия $W = \Phi_0 + L_z^2/2r^2$ (Φ_0 — гравитационный потенциал, $L_z = rv_\varphi = \text{const}$ — угловой момент звезды). Легко убедиться в том, что во вращающейся со скоростью $\Omega(r)$ системе координат возмущенное движение частиц происходит по малым эллипсам (эпициклам), вытянутым по азимуту, с отношением полуосей

$$b/a = 2\Omega(r)/\kappa(r) > 1. \quad (2)$$

Самогравитация приводит, как видно из (1), к неустойчивости достаточно мелкомасштабных возмущений: $\omega^2 < 0$, если $|k_r| > k_T \equiv \kappa^2/2\pi G\sigma_0$. Разумеется, физическая природа этой неустойчивости — джинсовская (подробнее о джинсовской неустойчивости и ее приложениях см. в [2, 3, 8]). Квадрат «обычной» джинсовской частоты $\omega_{J3}^2 = 4\pi G\rho_0(r)$ (который должен был бы стоять в правой части (1) для бесконечной

¹⁾ В принципе, для бесстолкновительных систем, каковыми являются, например, сильно сплюснутые скопления галактик, эллиптические галактики или центральные области звездных компонент дисковых галактик, это не единственная возможность: дисковая форма в этом случае частично (или даже полностью) может быть связана с анизотропией давлений в плоскости вращения и перпендикулярно ей. Однако большинство астрофизических дисков сильно сплюснуты в основном за счет быстрого вращения; в этой статье мы ограничимся изучением только таких дисков (подробнее об альтернативных возможностях см. [2, 3]).

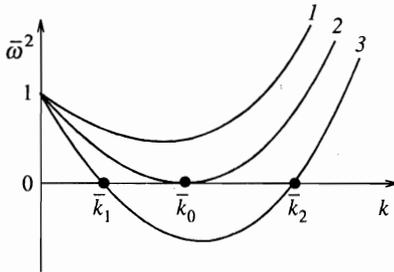


Рис. 2. Дисперсионные кривые для радиальных возмущений диска

по z среды — цилиндра с объемной плотностью $\rho_0(r)$ в дисковом случае заменяется на $\omega_{j_2}^2 = 2\pi G\sigma_0(r)|k_r|$. Необходимость именно такой замены следует уже из соображений размерности: из имеющихся в нашем распоряжении трех величин G, σ_0, k_r квадрат частоты конструируется единственным образом: $\omega_{j_2}^2 = \text{const} \cdot G\sigma_0(r)|k_r|$; значение $\text{const} = 2\pi$ соответствует тому, что $\omega_{j_2}^2$ переходит в $\omega_{j_3}^2$ при $k_r = 2\pi/h$ (h — полутолщина диска).

Естественным обобщением (1) является дисперсионное уравнение (см., например, [2, 3])

$$\omega^2 = \kappa^2(r) - 2\pi G\sigma_0(r)|k_r| + k_r^2 c_s^2 \tag{3}$$

для радиальных возмущений тонкого диска с конечным плоским давлением $P_\perp = \int P dz, P_z = 0, P$ — обычное давление газа, c_s — скорость звука: $c_s^2 = \partial P_\perp / \partial \sigma_0$. Как и должно быть, при больших k_r уравнение (3) вырождается в дисперсионное уравнение для звуковых волн. В безразмерном виде (3) можно представить как

$$\bar{\omega}^2 = 1 - |\bar{k}| + \bar{k}^2 Q^2 / 4, \tag{4}$$

где $\bar{\omega} = \omega / \kappa, \bar{k} = k_r / k_T$, а

$$Q = \kappa c_s / \pi G \sigma_0. \tag{5}$$

Поведение функции $\bar{\omega}^2 = \bar{\omega}^2(\bar{k})$ для различных значений параметра устойчивости Тоомре²⁾ Q представлено на рис. 2. Величина Q есть комбинация равновесных параметров диска, причем в числителе стоят параметры κ, c_s , увеличение которых способствует стабилизации диска, а в знаменателе — дестабилизации (σ_0). Пограничная кривая 2, которая касается оси абсцисс, соответствует $Q = 1$; при $Q > 1$ мы имеем кривые типа 1, на которых всюду $\omega^2 > 0$ (устойчивость), при $Q < 1$ — кривые типа 3, для которых имеется область (\bar{k}_1, \bar{k}_2) неустойчивых волновых чисел.

Таковы основные факты по устойчивости гравитирующих дисков относительно радиальных возмущений: в этом случае устойчивость или неустойчивость определяется значением единственного безразмерного параметра Q . Обратимся теперь к возмущениям, нарушающим исходную аксиальную симметрию диска, т. е. пропорциональным $\exp(-i\omega t + ik_r r + im\varphi)$, где φ — азимут, а m — целое число, причем $m \neq 0$. Эти возмущения, в отличие от кольцевых, подвержены влиянию дифференциальности вращения: на

²⁾ В действительности Тоомре [7] определил величину Q несколько иначе, а именно: $Q = \kappa c_r / 3.36 G \sigma_0$; именно эта величина равна единице на границе устойчивости радиальных возмущений звездных дисков, которые и рассматривались Тоомре (c_r — дисперсия радиальных скоростей звезд); подробнее см. в разд. 3.

рис. 1а схематически показана эволюция спирального возмущения вследствие дифференциальности вращения. С этой эволюцией связаны существенные усложнения теории устойчивости для неаксиально-симметричных возмущений (см. ниже). С другой стороны, неаксиальные возмущения оказываются более неустойчивыми (следовательно, более интересными), чем радиальные; точнее, они труднее поддаются стабилизации. Это, в частности, наглядно продемонстрировали многочисленные компьютерные (*N-body*) эксперименты. Например, неоднократно проводилось (см., например, [9]) моделирование эволюции первоначально «холодного» диска (с круговыми орбитами всех частиц); схематично результат этой эволюции представлен на рис. 1б: диск разваливается на несколько кусков (которые затем слипаются и образуют эллиптический диск с заметной долей радиальных движений частиц). Как мы видим, преобладают здесь отнюдь не кольцевые возмущения. Еще более наглядно преобладающая роль нерадиальных возмущений проявляется в численных экспериментах с дисками, в каждой точке которых выполнено условие устойчивости относительно радиальных возмущений, т. е. $Q(r) \equiv 1$. Оказывается [10], что такие диски остаются неустойчивыми к нерадиальным модам (рис. 1г).

Осложнения, возникающие при построении теории устойчивости неосесимметричных возмущений в дифференциально вращающемся гравитирующем диске, во многом сродни, например, проблемам, известным в гидродинамической теории устойчивости. Мы интересуемся локальными решениями вблизи некоторого радиуса r_0 , представляя угловую скорость как $\Omega(r) = \Omega(r_0) + \Omega'(r_0)(r - r_0)$ и опуская остальные члены разложения в ряд Тейлора. Такое приближение аналогично приближению Куэтта в случае плоскопараллельного течения, $v = v_x = v_x(y)$, когда принимается линейный закон $v_x(y) = v_x(y_0) + v'_x(y_0)(y - y_0)$. Как хорошо известно, для несжимаемого течения Куэтта линеаризованная задача сводится к уравнению Рэлея [11]; при этом оказывается невозможным удовлетворить необходимым условиям на границах течения (или на $|y| \rightarrow \infty$) [12]. Поэтому для изучения динамики возмущений в таких течениях необходимо решать задачу с начальными условиями. Похожая ситуация возникает и при рассмотрении локальных возмущений в несжимаемом вращающемся потоке [13]. Легко показать, что в x -представлении эта задача также сводится к уравнению Рэлея. Отсюда следует, что не существует собственных решений, которые исчезают вдали от места локализации возмущения, ввиду невозможности удовлетворить граничным условиям.

В рассматриваемых нами дифференциально вращающихся дисках локальные неосесимметричные безвихревые³⁾ возмущения также не могут быть собственными в приближении, аналогичном приближению Куэтта, т. е. при линейном законе для угловой скорости $\Omega(r)$ (см. ниже п. 2.2)⁴⁾. Для анализа динамики диска нужно, вообще говоря, решать задачу с начальными условиями. Однако доступной информации о состоянии и структуре диска, начальном уровне и характере возмущений, как правило, недостаточно для такого анализа. В этой ситуации большое значение могут иметь приближенные критерии, определяющие возможность заметного роста начальных возмущений и зависящие только от основных параметров диска. Ниже предлагается методика получения

³⁾ Точнее, речь идет о возмущениях, сохраняющих обобщенный вихрь, $(\text{rot}_z \mathbf{v} / \sigma)_1 = 0$.

⁴⁾ Как хорошо известно, собственные решения уравнения Рэлея могут существовать при условии, что $v_0'' = 0$ где-либо внутри области течения. В рассматриваемом нами случае вращающегося потока гравитирующего сжимаемого газа для существования собственных решений тоже, возможно, требуется некоторое аналогичное условие.

таких критериев (аналогичных критерию Тоомре) для локальных неосесимметричных возмущений диска. Говоря точнее, мы ограничимся выводом критериев, устанавливающих невозможность квазиэкспоненциального нарастания возмущений. Заметим, однако, что сильное увеличение начальной амплитуды возмущения происходит только при наличии достаточно протяженного во времени участка квазиэкспоненциального роста (подробнее см. обсуждение рис. 4 в разд. 2, 3 и особенно в Заключение).

Оказывается, что подобно тому, как неравенство $Q > 1$ обеспечивает устойчивость диска к аксиально-симметричным возмущениям, произвольные локальные возмущения гарантированно не нарастают, если выполнено аналогичное, но более сильное неравенство

$$Q > Q_c > 1, \quad (6)$$

где Q_c — новое критическое значение параметра Тоомре.

Главной целью данной работы как раз и является вычисление величины Q_c для газовых (разд. 2) и звездных (разд. 3) дисков. Для газовых дисков мы используем две ставшие уже давно стандартными модели: политропных дисков конечной толщины (п. 2.1) и бесконечно тонкого диска с плоским гидродинамическим давлением (п. 2.2). В п. 2.1 найдено выражение для критического значения $Q_c^{(g)}$, которое есть функция параметра $\alpha^2 = 2\Omega(r)/r|\Omega'(r)|$, характеризующего степень дифференциальности вращения диска в точке r (см. ниже формулу (18)). Это выражение остается одним и тем же для дисков с произвольным значением показателя адиабаты γ . В значительной степени результаты этого раздела уже содержались в завуалированном виде в работе Голдрейха и Линден-Белла [14], где впервые исследовалась устойчивость газовых дисков с дифференциальным вращением. Реальные газовые астрофизические диски (см. начало статьи) либо занимают экваториальную плоскость внутри сфероидальной компоненты в спиральных галактиках, либо вращаются в поле центральной массы (как планетные кольца или аккреционные диски); равновесное состояние определяется не только самогравитацией, но и внешней по отношению к диску гравитационной силой. Однако в теории Голдрейха и Линден-Белла эта внешняя сила учитывается не совсем корректно (подробнее см. в п. 2.1). Поэтому для учета реальной ситуации теория Голдрейха и Линден-Белла должна быть модифицирована. В п. 2.2 рассматривается простейшая модификация: мы исследуем там устойчивость модели бесконечно тонкого диска с плоским давлением P_{\perp} ; при этом становится безразлично, какая часть равновесия обеспечивается самогравитацией диска, а какая — внешними по отношению к диску массами. Примечательно, что и в этом случае остается в силе критерий устойчивости (6) с теми же $Q_c^{(g)}(\alpha^2)$, что и для политропных дисков. Ввиду того что этот критерий не меняется при использовании столь различных моделей, можно предположить, что он является универсальным: по-видимому, он справедлив для любых газовых дисков. В разд. 3 анализируется локальная устойчивость звездных дисков (в приближении, которое Дзулиан и Тоомре [15] использовали ранее для исследования эволюции начальных возмущений). Показано, что интегральное уравнение для фурье-амплитуды потенциала имеет решения, поведение которых качественно аналогично поведению возмущений в газовом диске. Получено приближенное уравнение, определяющее границу устойчивости звездного диска. Численное исследование этого уравнения позволяет найти зависимость $Q_c^{(s)}(\alpha^2)$, причем оказывается, что критические значения $Q_c^{(s)}(\alpha^2)$ существенно больше соответствующих $Q_c^{(g)}(\alpha^2)$; рассматриваются причины того, что звездные диски

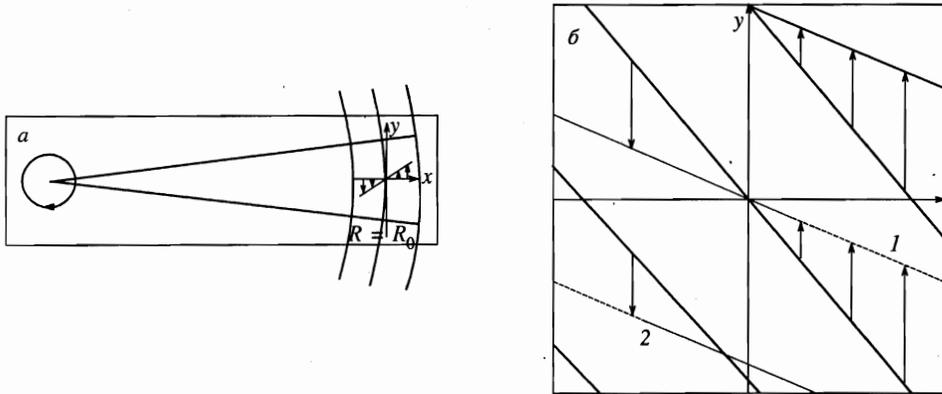


Рис. 3. Вращение с однородным сдвигом угловой скорости (а) и сопутствующие координаты Голдрейха-Линден-Белла (б): прямая 1 — $y'(\tau + \delta\tau) = \text{const}$; прямая 2 — $y'(\tau) = \text{const}$; стрелки соответствуют величине $2Axt$

значительно труднее стабилизировать, чем газовые. Обсуждение результатов содержится в заключительном разд. 4.

2. ГАЗОВЫЕ ДИСКИ

2.1. Устойчивость политропных дисков конечной толщины

Первое исследование поведения локальных возмущений в дифференциально вращающихся самогравитирующих дисках конечной толщины было выполнено Голдрейхом и Линден-Беллом [14]. Принятый этими авторами подход к задаче заключается в следующем.

Прежде всего они вводят (рис. 3) сопутствующие невозмущенному потоку газа оси координат x', y', z' :

$$x' = x, \quad y' = y - 2Axt, \quad z' = z, \quad (7)$$

где (x, y, z) — локальная декартова система в данной точке диска, причем ось x направлена по радиусу, ось y — вдоль азимута и ось z — параллельно оси вращения диска; $A = r\Omega'(r)/2$. В результате задача сводится к решению системы линеаризованных уравнений гидродинамики и уравнения Пуассона с коэффициентами, зависящими от t и z , но не зависящими от x' и y' . В то же время в исходных, непреобразованных уравнениях коэффициенты зависят от x и z , но не от t и y ; таким образом, преобразование (7) позволяет перейти от неоднородности по x к неоднородности по t . Это дает возможность корректного рассмотрения задачи об эволюции во времени возмущений, пропорциональных $\exp(ik_x x' + ik_y y')$ с произвольными постоянными k_x, k_y . Обратное преобразование этой экспоненты к исходной системе (x, y, z) дает

$$\exp(ik_x x' + ik_y y') = \exp[ik_y(-\tau x + y)], \quad (8)$$

где введена новая «временная» переменная

$$\tau = 2At - k_x/k_y,$$

$\tau = 0$ соответствует положению, когда волновой вектор возмущения в системе (x, y, z) направлен точно по оси y (средний из рис. 1б). Вид правой части показывает, что радиальная компонента волнового вектора (в исходной системе координат) меняется со временем по линейному закону:

$$k_r = -k_y \tau = k_x - 2Ak_y t. \quad (9)$$

Далее, воспользовавшись некоторыми дополнительными предположениями⁵⁾, Голдрейх и Линден-Белл выводят эволюционные уравнения для величины $\theta_1^* \equiv \sigma_1/\sigma_0$ (σ_1 и σ_0 — соответственно возмущенная и невозмущенная поверхностные плотности) в двух случаях — для дисков с показателями адиабаты $\gamma = 2$ и $\gamma = 1$. В случае изотермического диска ($\gamma = 1$) уравнение для нерадиальных возмущений в обозначениях оригинальной работы [14] есть

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\theta_1^*}{1 + \tau^2} \right) + \left[\frac{2B/A}{(1 + \tau^2)^2} + \frac{B\Omega/A^2 - P'/g(\bar{m})}{1 + \tau^2} \right] \theta_1^* = 0, \quad (10)$$

где

$$P' = \pi G \rho_c / A^2,$$

$$\frac{1}{g(\bar{m})} = \frac{\bar{m}(1 - \bar{m}^2)}{1 + \bar{m} + (1/2)\bar{m}^2\Psi'(1 + \bar{m}/2)}, \quad (11)$$

$$\Psi' \left(1 + \frac{\bar{m}}{2} \right) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(\bar{m}/2 + r)^2},$$

$$\bar{m} = k_y \sqrt{1 + \tau^2} / k_0, \quad B = A + \Omega, \quad k_0^2 = 2\pi G \rho_c / c^2,$$

ρ_c — плотность диска в экваториальной плоскости $z = 0$; в этой модели объемная плотность $\rho_0(z) = \rho_c / \cosh^2(z/z_0)$, $z_0 = c_s / \sqrt{2\pi G \rho_c}$. Аналогичное уравнение для эволюции радиальных возмущений выглядит несколько проще:

⁵⁾ Отметим, что в подходе Голдрейха и Линден-Белла используются некоторые предположения, которые делают получаемые результаты заведомо приближенными (мы, однако, считаем, что точные результаты, которые потребуют существенно более сложного вывода, не будут сильно отличаться от полученных Голдрейхом и Линден-Беллом [14] и нами в этой статье). Прежде всего речь идет об использовании приближения вертикального равновесия: принимается, что зависимость возмущенной плотности от z такая же, как у невозмущенной. В будущей детальной теории должны быть учтены точные механизмы установления равновесия по z в реальных астрофизических дисках. Обсуждение этой проблемы (как и саму ее постановку) можно найти в работе Фридмана и Хоружего [16]. Еще одним недостатком теории Голдрейха и Линден-Белла является использование формул для изолированного диска при описании равновесия по z : фактически это означает предположение о цилиндричности внешнего гало (в то время как более естественно было бы считать его сфероидальным).

$$\frac{d^2\theta_1^*}{d\tau^2} + \left[\frac{B\Omega}{A^2} - \frac{P'}{g(m_x)} \right] \theta_1^* = 0, \quad (12)$$

где $m_x = k_x/k_0$. В случае диска с $\gamma = 2$ уравнения эволюции почти совпадают с (10) и (12), только вместо $P'/g(\bar{m})$ в них стоит несколько иная функция: $P/F(K)$, где P — константа, аналогичная P' , а $F(K)$ — функция, заменяющая $g(\bar{m})$, причем $K = k_y a \sqrt{1 + \tau^2}$, a — полутолщина диска. Явный вид этой функции, как и константы P , нам в дальнейшем не понадобится. Важно, что обе функции, $1/g(m_x)$ и $1/F(K)$, имеют максимум при некотором значении m_x или K . По этой причине из уравнения (12) (и аналогичного ему при $\gamma = 2$) следует, что при условии

$$\frac{B\Omega}{A^2} \geq \begin{cases} P' \max [1/g(m_x)], & \gamma = 1, \\ P \max [1/F(K)], & \gamma = 2 \end{cases} \quad (13)$$

радиальные возмущения являются устойчивыми. Выбрав знак равенства в нижнем соотношении (13) (диски с $\gamma = 2$), Голдрейх и Линден-Белл решают численно уравнение типа (10) для неаксиально-симметричных возмущений в дисках, находящихся вблизи границы устойчивости радиальных мод. Полученные ими решения выглядят примерно так, как показано на рис. 4а и 4д: вначале мы имеем колебания с малой амплитудой $(\theta_1^*)_i$, затем, начиная с некоторого момента τ_1 , возмущение нарастает (особенно быстро вблизи $\tau = 0$) и, наконец, после $\tau = \tau_2$ устанавливаются колебания с существенно возросшей амплитудой $(\theta_1^*)_f$; коэффициент усиления $(\theta_1^*)_f / (\theta_1^*)_i$ может достигать значений порядка 10^3 .

Вопрос о существовании некоторого условия, гарантирующего полную устойчивость диска, Голдрейх и Линден-Белл не ставили. Попробуем извлечь такого рода информацию из уравнений (10) и (12). Вначале обратимся к уравнению (12), которое описывает радиальные возмущения изотермического диска. Обозначив $\max [1/g(m_x)] = c_1$, запишем условие маргинальной устойчивости в виде

$$\frac{\kappa^2}{4\pi G \rho_c} = c_1. \quad (14)$$

Как следует из пояснений, данных во Введении, условие (14) естественно сформулировать как равенство единице параметра устойчивости Тоомре Q . В данном случае, очевидно,

$$Q = \frac{\kappa}{\sqrt{4\pi G \rho_c c_1}}, \quad (15)$$

поскольку, во-первых, таким образом определенный параметр Q пропорционален, как и должно быть, $\kappa c_s / \pi G \sigma_0$ (так как $\sigma_0 \sim \rho_c h$, а $c_s/h \sim \sqrt{4\pi G \rho_c}$, ввиду того, что равновесие по z считается таким же, как у изолированного диска) и, во-вторых, $Q = 1$ на границе устойчивости аксиально-симметричных возмущений согласно (14). Заметим, что в данном случае величина Q зависит всего от двух независимых параметров (κ и ρ_c). В общем случае (5) таких параметров три (κ , c_s , σ_0); ясно, что дополнительная степень свободы предоставляется благодаря произвольности отношения масс гало и диска.

Перейдем теперь к неаксиальным возмущениям. Исключая с помощью замены $\theta_1^* = \sqrt{1 + \tau^2} \theta(\tau)$ первую производную из уравнения (10), сводим его к уравнению

$$\ddot{\theta} + \beta(\tau)\theta = 0, \quad (16)$$

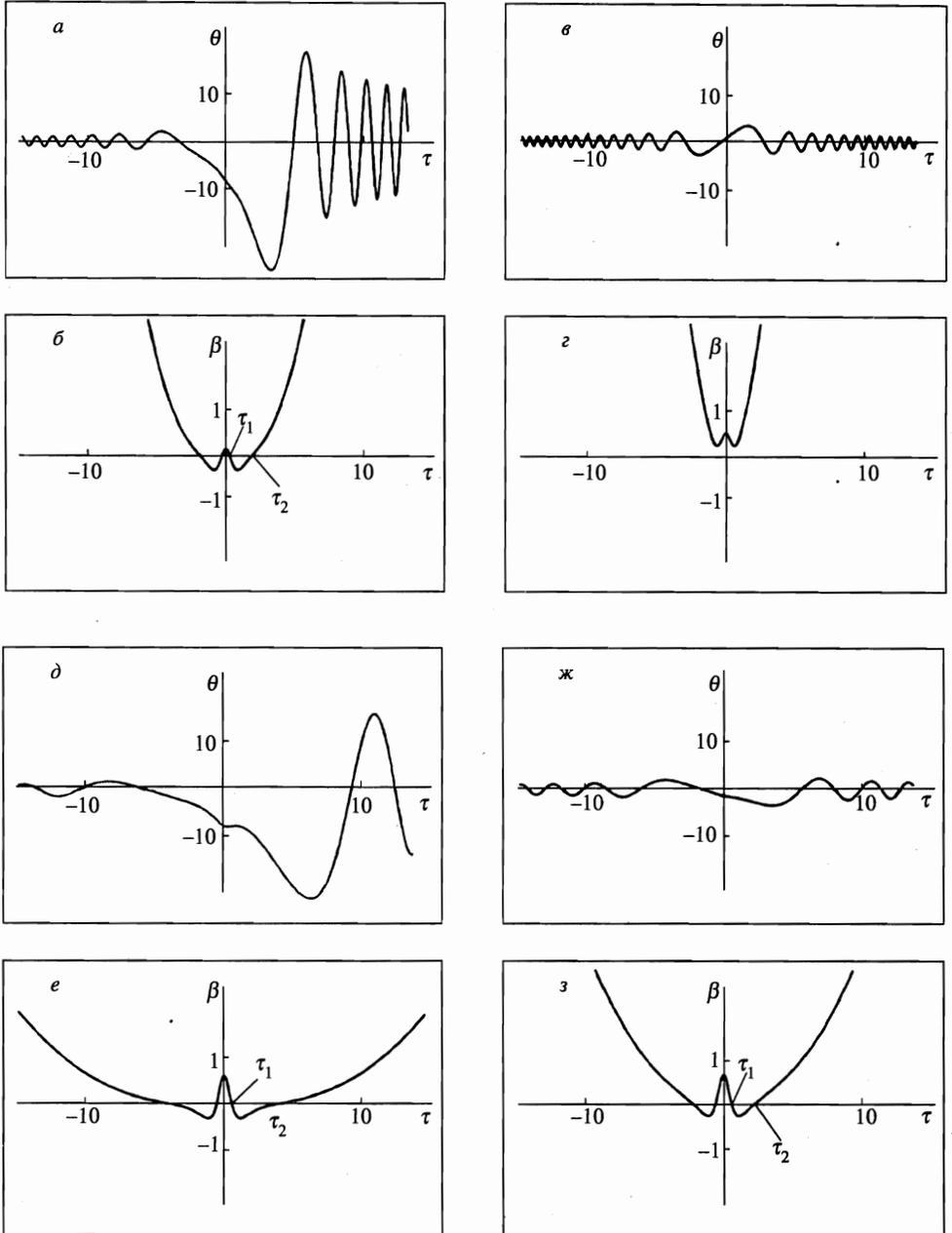


Рис. 4. Эволюция неаксиально-симметричных возмущений в газовых дисках: *a* — $Q^2 = 1.5$, $\alpha^2 = 2$ (галактика с плоской кривой вращения); *б* — функция $\beta(\tau)$, соответствующая случаю *a*; *в* — $Q^2 = 4$, $\alpha^2 = 2$; *з* — функция $\beta(\tau)$, соответствующая случаю *в*; *д* — $Q^2 = 1.5$, $\alpha^2 = 4/3$ (аккреционный диск с кеплеровским вращением); *е* — функция $\beta(\tau)$, соответствующая случаю *д*; *ж* — $Q^2 = 4$, $\alpha^2 = 4/3$; *з* — функция $\beta(\tau)$, соответствующая случаю *ж*. Возмущения в звездном диске ведут себя похожим образом, однако эти возмущения стабилизируются при существенно больших значениях параметра Q

где функцию $\beta(\tau)$ можно преобразовать к виду

$$\beta(\tau) = (\alpha^4 - \alpha^2) - \frac{2\alpha^2}{1 + \tau^2} + \frac{3}{(1 + \tau^2)^2} - \frac{(\alpha^4 - \alpha^2)}{Q^2 c_1 g(\bar{m})}, \quad (17)$$

причем $\alpha^2 = 2\Omega(r)/r|\Omega'(r)|$. Равенство $\beta(\tau) = 0$ разделяет квазиэкспоненциально растущие (при $\beta < 0$) и колебательные (при $\beta > 0$) участки решений $\theta(\tau)$ уравнения (16). Пусть α^2 фиксировано: например, $\alpha^2 = 2$ в случае плоской кривой вращения, когда $V_\varphi = \Omega(r)r = \text{const}$; такое вращение характерно для большинства спиральных галактик. Как можно показать, при $Q^2 \approx 1$ (как в вычислениях Голдрейха и Линден-Белла) $\beta(\tau)$ обращается в нуль в двух точках (см. рис. 4). Однако при больших значениях Q^2 (и $\alpha^2 > 3/2$) функция $\beta(\tau)$, как видно из (17), всюду положительна, так что возмущения никогда не нарастают. Это означает, что функция $Q_{\alpha^2}^2 = Q_{\alpha^2}^2(\tau^2, \bar{m})$, определенная по (17) из условия $\beta = 0$, имеет максимум (зависящий лишь от α^2) как функция двух переменных (τ^2 и \bar{m}). Этот максимум и определяет искомое критическое значение $Q = Q_c$, гарантирующее полную устойчивость диска (при $Q \geq Q_c$):

$$Q_c^2 = \frac{3}{2} \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - 3/2}. \quad (18)$$

По поводу выведенной формулы (18) необходимо сделать несколько замечаний.

1. Вычисление Q_c^2 не требует знания конкретного значения (c_1) максимума функции $P'/g(\bar{m})$: достаточно лишь знать, что этот максимум существует. Дело в том, что устойчивость относительно радиальных возмущений определяется, согласно (12), той же функцией $P'/g(m_x)$.

2. По той же причине Q_c имеет форму (18) и для дисков с $\gamma = 2$.

3. Более того, можно показать, что то же выражение (18) справедливо для диска с любым показателем адиабаты γ . Хотя аналитически эволюционные уравнения удается получить [14] лишь для $\gamma = 1$ и $\gamma = 2$, численно функцию $P_\gamma/F_\gamma(K)$, которая заменяет $P/F(K)$ при $\gamma = 2$ или $P'/g(\bar{m})$ при $\gamma = 1$, можно вычислить при любом γ . Это было сделано в работе [17], где также показано, что качественно функции $P_\gamma/F_\gamma(K)$ ведут себя одинаково при всех γ ; в частности, все они при некотором значении аргумента имеют максимум. Впрочем, существование максимума у любой функции $P_\gamma/F_\gamma(K)$ очевидно уже из простых физических соображений. Действительно, квадрат частоты радиальных возмущений в точке r равен

$$\omega^2 = \kappa^2 - r^2 (\Omega')^2 \frac{P_\gamma}{F_\gamma(k_x)}. \quad (19)$$

Как отмечено выше, радиальные возмущения, в отличие от нерадиальных, имеют чисто джинсовскую природу. Но это означает, что ω^2 проходит, как, например, на кривых рис. 2, через минимум (соответственно функция $P_\gamma/F_\gamma(k_x)$ — через максимум) при $k_x h \sim 1$, где h — порядка толщины диска. В случае неаксиально-симметричных возмущений механизм гравитационного (джинсовского) сжатия не является уже единственной причиной неустойчивости: здесь действует еще и другой механизм, связанный с перераспределением углового момента системы. Этот механизм подробно рассматривался, например, Линден-Беллом и Калнайсом [18] (см. также [2, 3]); в уравнении (17) с ним связано появление членов, зависящих от τ . Итак, в этом разделе показано, что

критерий устойчивости вида (6) с критическим значением Q_c , которое дается универсальной формулой (18), справедлив для дисков с любым показателем адиабаты.

4. Нельзя не обратить внимания на наличие особенности в выражении (18): $Q_c^2 \rightarrow \infty$ при $\alpha^2 \rightarrow 3/2$. Этот результат означает присутствие некоторого участка квазиэкспоненциального нарастания неосесимметричных возмущений в дисках с более быстрым, чем $\Omega \propto r^{-4/3}$, уменьшением угловой скорости вращения с радиусом при любом Q . Этот факт можно также рассматривать как свидетельство в некотором смысле большей неустойчивости дисков с более сильной степенью дифференциальности вращения. Фактически, однако, при больших Q протяженность области квазиэкспоненциального роста является очень узкой, и ее наличие практически никак не сказывается на эволюции возмущения. Мы еще раз вернемся к этому вопросу в Заключение.

2.2. Устойчивость бесконечно тонкого диска с плоским гидродинамическим давлением

Исходной является система, состоящая из уравнений плоской гидродинамики и уравнения Пуассона:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div}(\sigma \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla \Phi - \frac{1}{\sigma} \nabla P_{\perp}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G \sigma \delta(z),$$

где σ — поверхностная плотность массы газа в диске, \mathbf{v} — скорость элемента газа в плоскости (x, y) , Φ — гравитационный потенциал, P_{\perp} — давление двумерного газа. Записывая в полярных координатах r, φ линеаризованные уравнения гидродинамики (20), получим

$$\begin{aligned} \omega_* \mu - \frac{m}{r} v_{\varphi} + \frac{i}{\sigma_0} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_0 v_r) + \frac{i}{r} v_r &= 0, \\ \omega_* v_r - 2i\Omega v_{\varphi} + i \frac{\partial S}{\partial r} &= 0, \\ \omega_* v_{\varphi} + i \frac{\kappa^2}{2\Omega} v_r - \frac{m}{r} S &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где принято, что возмущенные величины пропорциональны $\exp(-i\omega t + im\varphi)$ (m — целое положительное), $\mu = \sigma_1/\sigma_0$, σ_1 и σ_0 — соответственно возмущенная и невозмущенная поверхностные плотности, v_r, v_{φ} — компоненты возмущенной скорости, $S = \Phi_1 + c_s^2 \mu$, Φ_1 — возмущенный гравитационный потенциал, $\omega_* = \omega - m\Omega = m(\Omega_p - \Omega) + i\gamma$, теперь γ обозначает малый инкремент нарастания волны, Ω_p — ее угловая скорость.

Введем локальную декартову систему координат вблизи радиуса коротации $r = r_0$ ($\Omega(r_0) = \Omega_p$): $x = (r - r_0)/\Delta$, $\Delta = \kappa/m|\Omega'|$. Уравнения (21) в главном порядке по малому параметру $\Delta/r_0 \ll 1$ (что равносильно $m \gg 1$ ⁶⁾) принимают вид

⁶⁾ Таким образом, наше приближение формально не применимо при $m \approx 1$ (что обычно для глобальных галактических спиральных мод).

$$\begin{aligned} z\mu - \frac{k_\varphi}{\kappa} v_\varphi + \frac{i}{\kappa\Delta} + \frac{i}{r} v'_r &= 0, \\ zv_r - i \frac{2\Omega}{\kappa} v_\varphi + \frac{i}{\kappa\Delta} S' &= 0, \\ zv_\varphi + i \frac{\kappa}{2\Omega} v_r - \frac{k_\varphi}{\kappa} S &= 0, \end{aligned} \tag{22}$$

где $z = \omega_*/\kappa = \text{Re } z + i\nu$, $k_\varphi = m/r_0$. Исключая v_φ с помощью первого уравнения (22) из остальных уравнений этой системы, получим

$$\begin{aligned} zv_r + \frac{\alpha^2}{k^2} v'_r - i \frac{\alpha^2}{k^2} z\kappa\Delta\mu + \frac{i}{\kappa\Delta} S' &= 0, \\ i \frac{k^2}{\alpha^2} v_r + izv'_r + z^2\kappa\Delta\mu - \frac{k^2}{\kappa\Delta} S &= 0, \end{aligned} \tag{23}$$

где $\alpha^2 = 2\Omega_0/r_0|\Omega'_0|$; как нетрудно показать, $k^2 = \alpha^4 - \alpha^2$.

Перейдем в (23) к фурье-образам возмущенных функций,

$$A_q = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-iqx} A(x). \tag{24}$$

Уравнения (23) в q -пространстве принимают вид

$$\begin{aligned} i \left(\frac{d}{dq} + \nu \right) v_{rq} + i \frac{\alpha^2}{k^2} q v_{rq} + \frac{\alpha^2}{k^2} \kappa\Delta \left(\frac{d}{dq} + \nu \right) \mu_q - \frac{q}{\kappa\Delta} S_q &= 0, \\ -i \left(\frac{d}{dq} + \nu \right) q v_{rq} + i \frac{k^2}{\alpha^2} v_{rq} - \kappa\Delta \left(\frac{d}{dq} + \nu \right)^2 \mu_q - \frac{k^2}{\kappa\Delta} S_q &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Переобозначим $A_q \exp(q\nu) \rightarrow A_q$, что равносильно записи уравнений (25) без ν . Из (25) можно найти

$$v_{rq} = \frac{i\kappa\Delta}{2 - \alpha^2(q^2 + k^2)/k^2} \left[\mu''_q - \frac{\alpha^2}{k^2} q\mu'_q + \frac{q^2 + k^2}{\kappa^2\Delta^2} S_q \right]. \tag{26}$$

Дифференцируя последнее выражение и подставляя результат в (25), получим следующее уравнение, связывающее μ_q и S_q :

$$\begin{aligned} \mu''''_q + \frac{\alpha^2}{k^2} q \frac{4 - \alpha^2(q^2 + k^2)/k^2}{2 - \alpha^2(q^2 + k^2)/k^2} \left(\mu''_q - \frac{\alpha^2}{k^2} q\mu'_q + \frac{q^2 + k^2}{\kappa^2\Delta^2} S_q \right) S_q - \frac{\alpha^2}{k^2} q\mu''_q - \\ - \frac{\alpha^2}{k^2} \mu'_q + \frac{q^2 + k^2}{\kappa^2\Delta^2} S'_q + \frac{2q}{\kappa^2\Delta^2} S_q + \left[2 - \frac{\alpha^2}{k^2} (q^2 + k^2) \right] \left(\frac{q}{\kappa^2\Delta^2} S_q - \frac{\alpha^2}{k^2} \mu'_q \right) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Из уравнения Пуассона в приближении малого параметра Δ/r_0 следует

$$\mu_q = - \frac{\Phi_q \sqrt{q^2 + k^2}}{2\pi G\sigma_0\Delta}, \tag{28}$$

так что

$$S_q = \Phi_q \left(1 - a\sqrt{q^2 + k^2} \right),$$

где $a = c_s^2/2\kappa^2\Delta^2$, $c = \kappa^2\Delta/\pi G\sigma_0$. Тогда уравнение (27) можно записать в виде

$$a_0\Phi_q + a_1\Phi'_q + a_2\Phi''_q + a_3\Phi'''_q = 0$$

или, обозначая $a_i = a_3b_i$, $a_3 = -c\sqrt{q^2 + k^2}/2$,

$$b_0\Phi_q + b_1\Phi'_q + b_2\Phi''_q + b_3\Phi'''_q = 0, \tag{29}$$

где

$$b_0 = q \left\{ \frac{2}{q^2 + k^2 - 2k^2/\alpha^2} \left[\frac{\alpha^2}{k^2} - \frac{\alpha^2}{q^2 + k^2} - \frac{k^2}{(q^2 + k^2)^2} + \frac{2}{c}\sqrt{q^2 + k^2} \left(1 - a\sqrt{q^2 + k^2} \right) \right] - \frac{3k^2}{(q^2 + k^2)^3} - \frac{\alpha^2}{k^2} \frac{3 - \alpha^2}{q^2 + k^2} - \frac{8}{c} \frac{1}{\sqrt{q^2 + k^2}} \left(1 - a\sqrt{q^2 + k^2} \right) + 2\frac{a}{c} \right\}, \tag{30}$$

$$b_1 = 1 - \frac{2}{c}\sqrt{q^2 + k^2} \left(1 - a\sqrt{q^2 + k^2} \right) + \frac{3k^2}{(q^2 + k^2)^2} - \frac{2\alpha^2}{q^2 + k^2}, \tag{31}$$

$$b_2 = q \left(\frac{3}{q^2 + k^2} - \frac{2}{q^2 + k^2 - 2k^2/\alpha^2} \right). \tag{32}$$

Прямой подстановкой можно проверить, что уравнение (29) с коэффициентами (32) факторизуется в виде

$$\left(\frac{d}{dq} + A \right) \left(\frac{d^2}{dq^2} + B \right) \Phi_q = 0, \tag{33}$$

где $A = b_2$, $B = b_1$. Такая факторизация, конечно, не случайна — она соответствует разделению вихревой и гравитационно-звуковой ветвей колебаний диска. Нас интересует только последняя, так как именно она является обобщением джинсовской ветви для радиальных возмущений, изучавшейся Тоомре (см. Введение); ей отвечают решения (33), подчиняющиеся уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dq^2} + B \right) \Phi_q = 0, \tag{34}$$

где

$$B(q) = 1 - \frac{2\alpha^2}{q^2 + k^2} + \frac{3k^2}{(q^2 + k^2)^2} - \frac{2}{c}\sqrt{q^2 + k^2} \left(1 - a\sqrt{q^2 + k^2} \right). \tag{35}$$

Уравнение (34) можно рассматривать как уравнение Шредингера с потенциальной энергией $U(q) = -B(q)$ и энергией $E = 0$. Легко видеть, что поведение функции $U(q)$ таково, что «хорошие» решения этого уравнения, удовлетворяющие естественным условиям убывания при $|q| \rightarrow \infty$, не существуют (ввиду отсутствия ямы); исключением является лишь малоинтересный случай холодного диска ($c_s = 0$). Поэтому мы вернемся к рассмотрению задачи (в духе подхода Голдрейха и Линден-Белла) об эволюции возмущения вида (8). Такой переход осуществляется подстановкой

$$k_r \Delta = q = -k_\varphi \Delta \tau, \tag{36}$$

где $k_\varphi = m/r$, $\tau = r\Omega'_0 t - k_{r0}/k_{\varphi 0}$ (эта подстановка уже встречалась ранее, см. (9)). Уравнение (34) принимает вид

$$\frac{d^2 \Phi}{d\tau^2} + \left[k_\varphi^2 \Delta^2 - \frac{2\alpha^2}{1 + \tau^2} + \frac{3}{(1 + \tau^2)^2} - \frac{2\sqrt{1 + \tau^2} (k_\varphi \Delta)^3}{c} \left(1 - a\sqrt{1 + \tau^2} k_\varphi \Delta \right) \right] \Phi = 0. \tag{37}$$

Заметим, что это уравнение можно было бы вывести и методом, использованным Голдрейхом и Линден-Беллом; фактически выше предложен альтернативный способ вывода. Первые три члена в квадратных скобках совпадают с соответствующими членами в уравнении (17), полученном Голдрейхом и Линден-Беллом [14] для задачи Коши об эволюции возмущения вида $\exp(-ik_\varphi \tau x + ik_\varphi y)$ (в локальной декартовой системе координат). Это совпадение не является, конечно, случайным. То, что задача может быть сведена в рассматриваемом приближении к уравнению для одной q -гармоники (34), само по себе уже означает необходимость такого совпадения. Последние два члена в уравнении (37) отличаются от соответствующих им в уравнении Голдрейха и Линден-Белла (17), поскольку они специфичны именно для модели бесконечно тонкого диска. Уравнение (37) может быть переписано как

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} + 4A^2 B(q(t)) \Phi = 0, \quad A = \frac{r_0}{2} |\Omega'_0|. \tag{38}$$

Как мы видим, поведение решения соответствует знаку B : оно осциллирует (устойчиво) при $B > 0$ и имеет нарастающую моду (неустойчиво) при $B < 0$. Подстановка

$$\frac{d^2}{dt^2} \rightarrow -\omega_*^2 = -(\omega - m\Omega_0)^2$$

в уравнение (38) приводит к локальному дисперсионному соотношению, а уравнение $B(q) = 0$ представляет собой условие отсутствия квазиэкспоненциально растущих возмущений; это условие может быть записано в виде

$$Q^2 = 4 \left(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}^2 + g^2 \bar{\lambda}^4 - \frac{3k^2}{4\alpha^4} g^4 \bar{\lambda}^6 \right), \tag{39}$$

где $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_c$, $\lambda = 2\pi/\sqrt{k_\varphi^2 + k_r^2}$, $\lambda_c = 4\pi^2 G\sigma_0/\kappa^2$ — тоомревская критическая длина волны, $g^2 = 8\alpha^2/c^2 = 8r_0 |(\Omega'_0)'| k_\varphi^2 (\pi G\sigma_0)^2 / \kappa_0^6$ (отметим здесь, что $g^2 \sim m^2$). Уравнение (39) определяет при заданном α^2 (т. е. фиксированной кривой вращения $\Omega = \Omega(r)$) функцию $Q^2(\bar{\lambda}, g)$. Графики зависимости $Q^2(\bar{\lambda})$ при $\alpha^2 = 2$ и нескольких значениях параметра g (с помощью которого учитывается неаксиальность возмущения, если $k_\varphi = m/r \neq 0$) приведены на рис. 5б; при $g = 0$ мы имеем маргинальную кривую для аксиально-симметричных возмущений диска. Все эти кривые имеют максимумы при $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_m$ для всех α^2 и g^2 . Более того, при данном α^2 максимумы сначала увеличиваются с ростом g^2 , а затем уменьшаются (рис. 5б). Следовательно, функция $Q_{\alpha^2}^2(\bar{\lambda}, g^2)$ имеет (единственный) максимум как функция двух переменных, $\bar{\lambda}$ и g ($\bar{\lambda} > 0, g > 0$). Из уравнения $\partial Q^2/\partial g^2 = 0$ следует $g^2 \bar{\lambda}^2 = 2\alpha^4/3k^2$. Подставляя это выражение в (39), получим

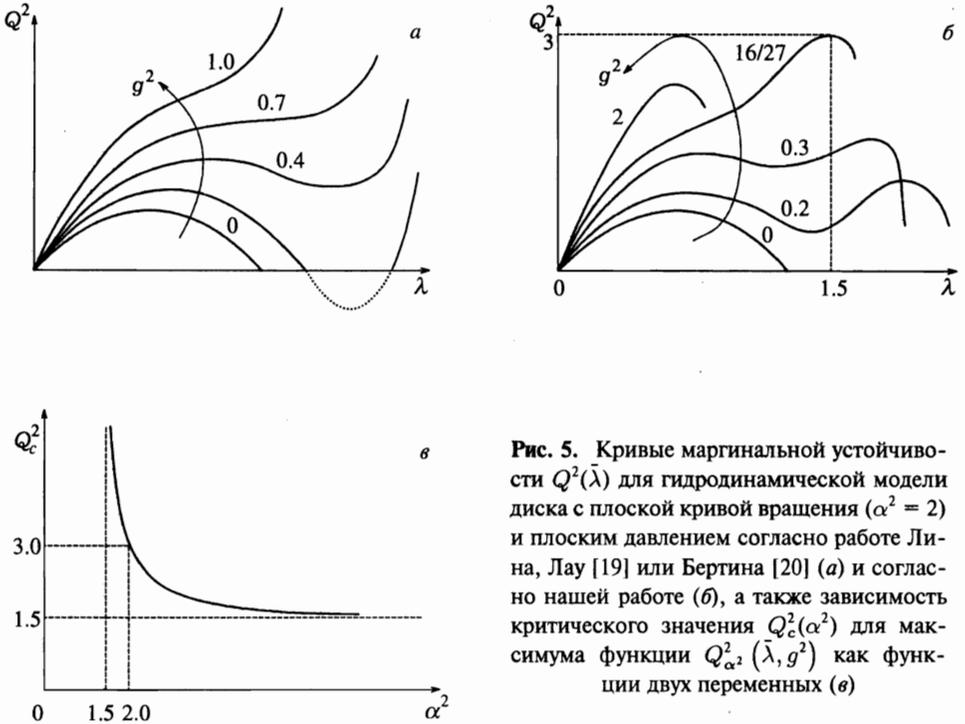


Рис. 5. Кривые маргинальной устойчивости $Q^2(\bar{\lambda})$ для гидродинамической модели диска с плоской кривой вращения ($\alpha^2 = 2$) и плоским давлением согласно работе Лина, Лау [19] или Бертина [20] (а) и согласно нашей работе (б), а также зависимость критического значения $Q_c^2(\alpha^2)$ для максимума функции $Q_{\alpha^2}^2(\bar{\lambda}, g^2)$ как функции двух переменных (в)

$$Q^2 = 4 \left[\bar{\lambda} + \left(\frac{1}{3} \frac{\alpha^4}{k^2} - 1 \right) \bar{\lambda}^2 \right]. \tag{40}$$

Дифференцируя последнее уравнение по $\bar{\lambda}$ и приравнивая производную нулю, находим критическое значение

$$\bar{\lambda}_c = \frac{1}{2 - 2\alpha^4/3k^2} = \frac{3}{4} \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - 3/2},$$

которому соответствует максимум

$$Q^2(\alpha^2) = \frac{3}{2} \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - 3/2}. \tag{41}$$

В частности, когда $\alpha^2 = 2$ (что соответствует плоской кривой вращения), $Q_c^2 = 3$; этот максимум достигается при $g^2 = 16/27$, $\bar{\lambda} = 1.5$, т.е. при $m = 2\nu_0/3c_s$. Зависимость $Q_c^2(\alpha^2)$ показана на рис. 5в.

Заметим, что попытки получения общего критерия устойчивости для дисков с плоским давлением неоднократно предпринимались и ранее [19–21]. Это делалось, однако, в рамках традиционного для всех таких исследований приближения туго закрученных спиралей, $s = k_\varphi/k_r \ll 1$. Недостаточность такого подхода можно усмотреть исходя уже из результатов самой этой теории. Получающийся в ней критерий устойчивости можно записать, например, в виде

$$c_s^2 > c_0^2 [1 - 2s^2\tau(\Omega^2)'/\kappa^2], \tag{42}$$

где $c_0 = \text{const}$. Из этой формулы видно, что при увеличении s^2 для подавления неустойчивости требуются большие c_s . В этой ситуации очевидно, что ответ на главный для теории вопрос — об условиях существования полностью устойчивого диска — лежит за рамками такой теории. Конечно, можно заранее ожидать, что возмущения с $s \gg 1$ ($k_\varphi \gg k_r$) устойчивы, а наиболее неустойчивыми являются возмущения с $s \approx 1$.

Уравнение (39) можно сравнить с аналогичным уравнением Лина и Лау [19], полученным также в приближении тугой закрутки, $g^2 \ll 1$:

$$Q^2 = 4 \left[\bar{\lambda} - \bar{\lambda}^2 / (1 + g^2 \bar{\lambda}^2) \right]. \quad (43)$$

Хотя это уравнение было выведено при $g^2 \ll 1$, оно использовалось его авторами и при $g^2 \approx 1$. Как и следовало ожидать, уравнение (39) и уравнение, получающееся из (43) при малых $g^2 \bar{\lambda}^2 \ll 1$, совпадают, но они не имеют ничего общего при $g^2 \bar{\lambda}^2 \approx 1$. Заимствованные из работы Лина и Лау [19] графики зависимости $Q^2(\bar{\lambda})$ при некоторых значениях g приведены на рис. 5а. Видно, что описываемые формулой (43) функции $Q_g^2(\bar{\lambda})$ монотонны и уже по этой причине некорректны. Нужно также иметь в виду, что в действительности эволюция каждого возмущения в любой момент происходит в соответствии с мгновенным значением радиального волнового числа q , которое меняется линейно со временем. Время пересечения области неустойчивых значений q , как и степень усиления, ограничены (и малы вблизи $Q_g = Q_c$). Когда $Q_g > Q_c$, область усиления совсем исчезает; в этом случае можно гарантировать «полную устойчивость» диска в том смысле, что возмущения не нарастают (по крайней мере квазиэкспоненциально) даже в течение какого-то ограниченного промежутка времени.

3. ЗВЕЗДНЫЕ ДИСКИ

Ранее в статье Джулиана и Тоомре [15] уже решалась задача об эволюции возмущения, задаваемого в некоторый начальный момент $t = t_0$, причем использовались такие же, как и у нас ниже, основные приближения (локальная декартова система координат, линейный закон изменения угловой скорости и т. п.). В цитированной статье были получены некоторые очень интересные результаты, из которых можно особо выделить вывод об асимптотической устойчивости любых возмущений в дифференциально вращающихся звездных дисках, удовлетворяющих критерию Тоомре. Однако при принятом в работе Джулиана и Тоомре подходе нельзя было получить такого полезного инструмента исследования устойчивости как локальное дисперсионное уравнение (что сделано в настоящей статье).

Как и в п. 2.2, используем модель бесконечно тонкого диска с поверхностной плотностью $\sigma = \int f dv_r dv_\varphi$, где $f(r, \varphi, v_r, v_\varphi; t)$ — функция распределения звезд в цилиндрической системе координат (r, φ) , v_r и v_φ — компоненты скорости звезды во вращающейся с угловой скоростью $\Omega(r)$ системе отсчета. Функция f подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\Omega + \frac{v_\varphi}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \\ & \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \Omega^2 r + 2\Omega v_\varphi + \frac{v_\varphi^2}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\kappa^2}{2\Omega} v_r + \frac{v_r v_\varphi}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Считая, что равновесная функция распределения $f_0 = A \exp(-Q_0)$ ($A = \text{const}$, $Q_0 = v_r^2/2c_r^2 + v_\varphi^2/2c_\varphi^2$), линеаризуем уравнение (44), подставляя $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$ ($|\Phi_1| \ll |\Phi_0|$), $f = f_0(1 + \psi)$ ($|\psi| \ll 1$) и переходя к безразмерным скоростям ξ , η : $v_r = \xi V_1$, $v_\varphi = \eta V_2$ ($V_1 = 2\Omega V_0/\kappa$, $V_2 = V_0$, $V_0 = \Omega(r)r$):

$$-i\omega_*\psi + im\Omega\eta\psi + 2\frac{\Omega_0^2}{\kappa}r\xi\frac{\partial\psi}{\partial r} + \kappa\eta\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\kappa}{2\Omega^2r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\frac{\partial Q_0}{\partial\xi} - \kappa\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \frac{im}{\Omega r^2}\Phi_1\frac{\partial Q_0}{\partial\eta} = 0, \tag{45}$$

где оставлены только члены главного порядка по совокупности малых величин Δ/r_0 и c_s/V_0 и учтено условие равновесия $\partial\Phi_0/\partial r = \Omega^2r$; возмущения считаются пропорциональными $\exp(-i\omega t + im\varphi)$.

Переходя в локальную декартову систему координат вблизи радиуса коротации $r = r_0$ ($\Omega(r_0) = \Omega_p$, $x = (r - r_0)/\Delta$, $\Delta = \kappa/m|\Omega'_0|$), вводя полярные координаты τ , s в пространстве скоростей $\xi = \tau \cos s$, $\eta = \tau \sin s$ и используя обозначения п. 2.2, получим следующее уравнение для функции ψ :

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} + iz\psi - \frac{\tau}{\delta} \left[i\alpha^2 \left(\frac{1}{2}\psi + \phi\frac{\partial Q_0}{\partial\tau^2} \right) \sin s + \left(\frac{1}{2} \frac{\alpha^4}{k^2} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{d\phi}{dx} \frac{\partial Q_0}{\partial\tau^2} \right) \cos s \right] = 0, \tag{46}$$

где обозначено $\delta = \Delta/r_0$, $\phi = \Phi_1/V_0^2$. Переходим в (46) к фурье-образам ($\psi_q = \int_{-\infty}^{\infty} dx\psi(x)e^{-iqx}$); в новых переменных p , q' ($q = q'$, $s = p - q'$) уравнение (46) принимает вид

$$\frac{\partial\psi_q}{\partial q} + a_q\psi_q = -b(q), \tag{47}$$

где

$$a(q) = \nu + i\frac{\tau\alpha^2}{2\delta} [\sin(p - q) + q\alpha^2 \cos(p - q)/k^2],$$

$$b(q) = i\frac{\tau}{\delta}\phi_q\frac{\partial Q_0}{\partial\tau^2} [\alpha^2 \sin(p - q) + q \cos(p - q)].$$

Решение уравнения (47), удовлетворяющее условию $\psi_q \rightarrow 0$ при $q \rightarrow \infty$, есть

$$\psi_q = \exp[-F(q, p, \tau)] \int_q^\infty b(q') \exp[F(q', p, \tau)] dq', \tag{48}$$

где

$$F(q, p, \tau) = \nu q + i\frac{\tau\alpha^4}{2\delta k^2} [\alpha^2 \cos(p - q) - q \sin(p - q)]. \tag{49}$$

Введем переменные $\xi = \tau \cos p$ и $\eta = \tau \sin p$; очевидно, $d\xi d\eta = \tau d\tau dp = \tau d\tau ds$ при фиксированном q . В этих переменных

$$F(q, \xi, \eta) = \nu q + i\frac{\alpha^4}{2\delta k^2} (\xi f_\xi + \eta f_\eta),$$

$$f_\xi = \alpha^2 \cos q + q \sin q, \quad f_\eta = \alpha^2 \sin q - q \cos q,$$

$$b(q, \xi, \eta) = i \frac{\varphi_q}{2\delta} \left(\frac{\partial Q_0}{\partial \eta} f_\xi - \frac{\partial Q_0}{\partial \xi} f_\eta \right).$$

Поверхностная плотность $\sigma_q = V_1 V_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta f_0 \psi_q$ после элементарных вычислений получается в виде

$$\sigma_q = \frac{\sigma_0 \alpha^4}{4\delta^2 k^2} \int_q^\infty dq' \phi_{q'} h(q, q') \exp[\nu(q' - q) - xg(q, q')], \quad (50)$$

где $x = c_r^2 / 2\Delta^2 \kappa^2$, а

$$h(q, q') = f_\xi(q') f_\eta(q) - f_\eta(q') f_\xi(q),$$

$$g(q, q') = [f_\xi(q') - f_\xi(q)]^2 + [f_\eta(q') - f_\eta(q)]^2.$$

Функции h , g и σ_q можно привести к виду

$$h(q, q') = (qq' + \alpha^4) \sin(q - q') - \alpha^2(q - q') \cos(q - q'), \quad (51)$$

$$g(q, q') = q^2 + q'^2 + 2\alpha^4 - 2[(qq' + \alpha^4) \cos(q - q') + \alpha^2(q - q') \sin(q - q')], \quad (52)$$

$$\sigma_q = \frac{\sigma_0}{\kappa^2 \Delta^2} \int_q^\infty dq' \Phi_{q'} h(q, q') \exp[\nu(q' - q) - xg(q, q')]. \quad (53)$$

Последнее равенство определяет отклик плотности на возмущение потенциала. Другая связь между σ_q и Φ_q получается из уравнения Пуассона:

$$\sigma_q = -\frac{\Phi_q \sqrt{q^2 + k^2}}{2\pi G \Delta}. \quad (54)$$

Вводя обозначение $c = \kappa^2 \Delta / \pi G \sigma_0$ и приравнявая левые части равенств (53) и (54), получим интегральное уравнение типа Вольтерра для фурье-амплитуды потенциала:

$$\frac{c}{2} \Phi_q \sqrt{q^2 + k^2} = - \int_q^\infty dq' \Phi_{q'} K(q, q') \exp[\nu(q' - q)], \quad (55)$$

где ядро определяется формулой

$$K(q, q') = h(q, q') \exp[-xg(q, q')]. \quad (56)$$

Из очевидных свойств ядра (56): $K(q', q) = -K(q, q')$, $K(-q, -q') = -K(q, q')$, следует, что уравнение (55) имеет либо четные, либо нечетные решения.

Можно показать, что для $x = 0$ интегральное уравнение (55) сводится к дифференциальному уравнению, совпадающему с уравнением (34) при $a = 0$, т. е. для холодного газового диска. Для $x \neq 0$ свести интегральное уравнение (55) к дифференциальному не удастся.

Заменяя, как в (9) или (36), q на $-k_\varphi \Delta \tau$, получим эволюционное уравнение для $\Phi_\tau \equiv \Phi_q(q = -k_\varphi \Delta \tau)$:

$$\frac{c}{2} \sqrt{1 + \tau^2} \Phi_\tau + \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \Phi_{\tau'} \bar{K}(\tau, \tau') = 0, \quad (57)$$

где обозначено $\bar{K}(\tau, \tau') = K(q = -k_\varphi \Delta \tau, q' = -k_\varphi \Delta \tau')$ и опущен для краткости член, содержащий малое ν в экспоненте. Для вывода критерия устойчивости рассмотрим решения уравнения (57) вида $\exp(-i\beta\tau)$, тогда получим

$$\frac{c}{2} \sqrt{1 + \tau^2} + \int_0^{\infty} dt e^{-i\beta t} K(\tau, \tau - t) = 0, \quad (58)$$

или, снова переходя от τ к q :

$$\frac{c}{2} \sqrt{q^2 + k^2} + \int_0^{\infty} dt e^{-itz} \bar{K}(t, q) = 0, \quad (59)$$

где $\bar{K}(t, q) = K(q', q)$, $q - q' = t$. Это и есть искомое дисперсионное соотношение, в нем $z = \beta/k_\varphi \Delta$,

$$h(t, q) = \alpha^2 t \cos t - (q^2 - qt + \alpha^4) \sin t,$$

$$g(t, q) = t^2 + 2(q^2 - qt + \alpha^4)(1 - \cos t) - 2\alpha^2 t \sin t.$$

Решение уравнения (58) дает локальное (мгновенное) значение частоты β , интегральную (истинную) зависимость Φ_τ можно качественно представить в виде [22] $\Phi_\tau \approx \exp[-i \int_{\tau_0}^{\tau} \beta(\tau') d\tau']$. Заметим, что величина $x = Q_0^2 g^2 / 4\alpha^2$, где теперь $Q_0 = \kappa c_r / 2\pi G \sigma_0$.

Для удобства сравнения с результатами п. 2.2 обозначим $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_c$, $u^2 = (1 + 2/g^2 \bar{\lambda}^2)/\alpha^2$; тогда $q = \alpha^2 \sqrt{u^2 - 1}$, $q^2 + \alpha^4 = \alpha^4 u^2$. С помощью этих соотношений дисперсионное уравнение (59) можно переписать в окончательном виде:

$$1 + \bar{\lambda} g^2 R_z = 0, \quad (60)$$

где

$$R_z = \int_0^{\infty} dt e^{-itz} H(u^2, t),$$

$$H(u^2, t) = \left[\frac{1}{2}t \cos t + \left(\frac{1}{2}t\sqrt{u^2 - 1} - \frac{\alpha^2}{2}u^2 \right) \sin t \right] \times \\ \times \exp \left\{ -Q_0^2 g^2 \left[\frac{t^2}{4\alpha^2} + \left(\frac{\alpha^2}{2}u^2 - \frac{1}{2}t\sqrt{u^2 - 1} \right) (1 - \cos t) - \frac{1}{2}t \sin t \right] \right\}.$$

При $z = 0$ из уравнения (60) находим искомый критерий маргинальной устойчивости (зависимость $Q_0^2(\bar{\lambda})$):

$$f(\bar{\lambda}, Q_0^2) = 1 + \bar{\lambda}g^2 R_0 = 0, \\ R_0 = \int_0^\infty dt H(u^2, t). \quad (61)$$

Из условия $u^2 > 1$ (тогда q вещественно) следует, что $0 < \bar{\lambda} \leq \sqrt{2/g^2(\alpha^2 - 1)} \equiv \bar{\lambda}_g$; кривая маргинальной устойчивости $Q_0^2(\bar{\lambda})$ лежит в пределах $(0, \bar{\lambda}_g)$.

Покажем, что при $g \rightarrow 0$ выражение (61) совпадает (как это и должно быть) с критерием маргинальной устойчивости, выведенным Тоомре [7] для радиальных возмущений звездного диска. Обозначим $z \equiv Q_0^2/\bar{\lambda}^2$; тогда критерий маргинальной устойчивости Тоомре [7] для осесимметричных возмущений диска можно записать в виде

$$\bar{\lambda}z = 1 - e^{-z} I_0(z), \quad (62)$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя. При малых g

$$H(u^2, t) \approx -\frac{\alpha^2}{2}u^2 \sin t \exp \left[-Q_0^2 g^2 \left(\frac{t^2}{4\alpha^2} + \frac{\alpha^2 u^2 (1 - \cos t)}{2} \right) \right].$$

Так как при этом $\alpha^2 g^2 u^2 / 2 \approx \bar{\lambda}^{-2}$, то критерий устойчивости (61) можно при малых g записать в виде

$$1 - \frac{e^{-z}}{\bar{\lambda}z} \int_0^\infty dt \sin t \exp(-\varepsilon t^2 + z \cos t) = 0, \quad (63)$$

где обозначено $\varepsilon = Q_0^2 g^2 / 4\alpha^2$ ($\varepsilon \rightarrow 0$). Интегрируя (63) по частям, получим

$$\bar{\lambda}z = 1 - \exp(-z) R_\varepsilon,$$

где

$$R_\varepsilon = 2\varepsilon \int_0^\infty dt t \exp(-\varepsilon t^2 + z \cos t). \quad (64)$$

Поскольку $R_0 = I_0(z)$, мы действительно получаем при $\varepsilon \rightarrow 0$ критерий устойчивости Тоомре (62).

Решения уравнения (61) для плоской кривой вращения ($\alpha^2 = 2$) найдены численно при различных g (рис. 6а, б). Видно, что здесь также достигается при определенном

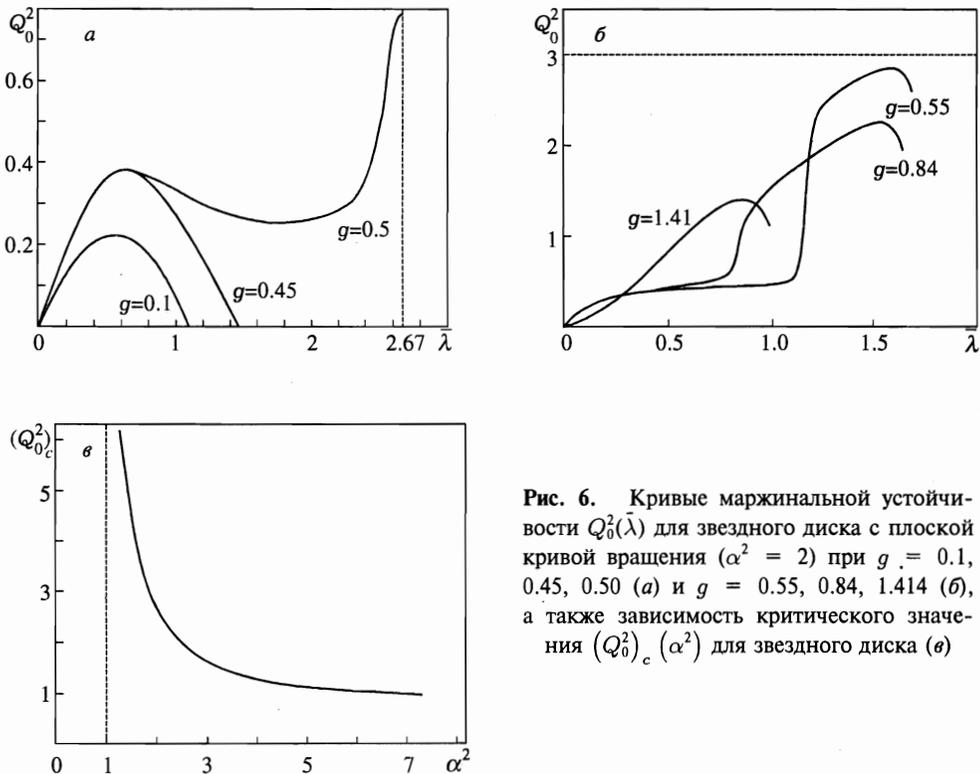


Рис. 6. Кривые маргинальной устойчивости $Q_0^2(\lambda)$ для звездного диска с плоской кривой вращения ($\alpha^2 = 2$) при $g = 0.1, 0.45, 0.50$ (а) и $g = 0.55, 0.84, 1.414$ (б), а также зависимость критического значения $(Q_0^2)_c(\alpha^2)$ для звездного диска (в)

g критическое значение $(Q_0^2)_c$, аналогично случаю газового диска. На рис. 6в приведена зависимость $(Q_0^2)_c(\alpha^2)$. Если параметры диска α^2 и Q_0^2 представляются точкой на плоскости (α^2, Q_0^2) , лежащей выше кривой $(Q_0^2)_c(\alpha^2)$, то соответствующая модель будет устойчива относительно всех малых возмущений в плоскости диска. Заметим, что для твердотельно вращающегося диска ($\alpha^2 \rightarrow \infty$) критическое значение $(Q_0^2) \rightarrow 0$ (в газовом диске соответствующее $Q_c^2 \rightarrow 3/2$); кроме того, здесь $(Q_0^2)_c \rightarrow \infty$ при $\alpha^2 \rightarrow 1$ (в то время как в газовом диске $Q_c^2 \rightarrow \infty$ при $\alpha^2 \rightarrow 3/2$).

Связь величины Q_0 с параметром неустойчивости Тоомре $Q = \kappa c_r / 3.36 G \sigma_0$ (который равен единице на границе устойчивости радиальных возмущений) имеет вид $Q = 2\pi Q_0 / 3.36$; соответственно, для плоской кривой вращения ($\alpha^2 = 2$), когда $(Q_0^2)_c \approx 2.85$, имеем $Q_c \approx 3.15$. Последнее значение находится в согласии с результатами проведенных Тоомре [23] численных (N -body) экспериментов со звездными дисками: по его данным диски становились полностью устойчивыми как раз при $Q \geq 3$.

Бросается в глаза, что значения Q_c для звездных дисков существенно выше, чем для газовых: например, в наиболее важном для галактик случае плоской кривой вращения ($\alpha^2 = 2$) эти значения Q_c равны соответственно $\sqrt{3}$ и ≈ 3 . Отметим одну, вероятно главную, причину большей неустойчивости неаксиально-симметричных возмущений у звездных систем. Она заключается в том, что звездный дифференциально вращающийся диск, в отличие от всегда изотропного газового, является в азимутальном направлении более холодным, а следовательно, и более неустойчивым «по Джинсу». Это вытекает из известного (принадлежащего еще Линдбладу [24]) соотношения между дисперсиями скоростей в радиальном (c_r) и азимутальном (c_φ) направлениях:

$$c_r = \frac{2\Omega(r)}{\kappa(r)} c_\varphi > 1 \quad (\Omega' < 0). \quad (65)$$

Проще всего в справедливости соотношения (65) можно убедиться следующим образом. Функция распределения f_0 звезд в равновесном диске должна удовлетворять кинетическому уравнению (в цилиндрических координатах)

$$v_r \frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \frac{\partial f_0}{\partial v_r} + \frac{v_\varphi^2}{r} \frac{\partial f_0}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \frac{\partial f_0}{\partial v_\varphi} = 0, \quad (66)$$

где Φ_0 — равновесный гравитационный потенциал. Функция распределения холодного диска f_0 пропорциональна $\delta(v_r)\delta(v_\varphi - \Omega r)$, где $r\Omega^2 = d\Phi_0/dr$. Представим теперь функцию распределения дисковой системы с орбитами звезд, близкими к круговым, в виде формального ряда по δ -функциям и их производным от аргументов v_r и $v_\varphi - \Omega r$ [2, 3]:

$$f_0 = a_1 \delta(v_r) \delta(v_\varphi - \Omega r) + b_1 \delta'(v_r) \delta(v_\varphi - \Omega r) + b_2 \delta(v_r) \delta'(v_\varphi - \Omega r) + \\ + c_1 \delta''(v_r) \delta(v_\varphi - \Omega r) + c_2 \delta'(v_r) \delta'(v_\varphi - \Omega r) + c_3 \delta(v_r) \delta''(v_\varphi - \Omega r). \quad (67)$$

Подставляя (67) в (66) и приравнявая нулю коэффициенты при различных комбинациях производных δ -функций, получим систему уравнений, одно из которых гласит: $c_3 = \kappa^2 c_1 / 4\Omega^2$, что равносильно (65), поскольку, очевидно, $c_1 = \sigma_0 c_r^2 / 2$, $c_3 = \sigma_0 c_\varphi^2 / 2$ (σ_0 — поверхностная плотность в точке r). Заметим, что неравенство (65) аналогично (и как бы обратно) приведенному в начале статьи равенству (2) для отношения осей эписцикла⁷⁾. Отметим также, что замечание о том, что линдбладовское соотношение между дисперсиями скоростей может быть причиной большей неустойчивости «косых» мод в дифференциально вращающихся бесстолкновительных дисках, было ранее высказано Хантером [25] (однако каких-либо общих критериев устойчивости ранее выведено не было).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, выше получены критерии локальной устойчивости возмущений в газовых и звездных дисках. Эти критерии удобно формулировать в терминах параметра устойчивости Тоомре Q , который, по определению, равен единице на границе устойчивости радиальных возмущений. Оказывается, что для стабилизации произвольных возмущений требуется, чтобы параметр Q был больше некоторого критического значения Q_c , причем Q_c существенно больше единицы, т. е., можно сказать, возмущения, нарушающие исходную аксиальную симметрию диска, более неустойчивы, чем радиальные. Кроме того, значения Q_c для звездных дисков заметно больше, чем для газовых; в конце предыдущего раздела рассмотрена одна из причин, вероятно главная, большей неустойчивости звездных систем.

Более ранние попытки [19–21] были неудачны, потому что авторы ограничивались только приближением туго закрученных спиралей ($k_r \gg k_\varphi$). Попытки распространить

⁷⁾ Противоречие между равенствами (65) и (2) кажущееся: оно связано с тем, что в первом случае отсчет возмущенной азимутальной скорости производится от величины $r\Omega(r)$ (своей в каждой точке r), а во втором — от $r_0\Omega(r_0)$, где r_0 — положение центра эписцикла.

полученные таким образом результаты на возмущения с $k_r \approx k_p$, $g^2 \approx 1$ не выдерживают критики: они приводят к выводам, которые качественно некорректны (ср. рис. 5а и 5б). Интерпретация локального дисперсионного уравнения, как и условия маргинальной устойчивости, данные нами в конце п. 2.2, конечно, отличаются от обычной интерпретации. Мы получили достаточные критерии устойчивости, которые гарантируют отсутствие любого (даже малого) промежутка времени квазиэкспоненциального нарастания возмущений. Ясно, что эти критерии устойчивости являются достаточными с некоторым запасом, так как вблизи $Q = Q_c$ возмущения практически не растут. В то же время при обычной интерпретации маргинальной кривой как границы экспоненциальной неустойчивости предполагается, что неустойчивые возмущения даже вблизи границы устойчивости могут за достаточно длительное время вырасти сколь угодно сильно.

Возвращаясь к рис. 4, который представляет решения эволюционного уравнения (37), можно заметить, что в общем случае возмущение может нарастать по двум причинам: 1) при наличии участков (τ_1, τ_2) квазиэкспоненциального роста, где отрицателен квадрат характерной частоты $\omega^2 = \beta < 0$, и 2) из-за уменьшения величины β (при $\tau < 0$). Если воспользоваться оценкой, которая является строгой при сохранении адиабатического инварианта ($I = E/\omega = \text{const}$), то изменение амплитуды a вследствие второй причины происходит по закону $a \propto 1/\sqrt{\omega}$. Этот механизм остается единственным в тех случаях, когда участок квазиэкспоненциального нарастания отсутствует (как на рис. 4в). Отметим, однако, что значительный рост амплитуды возмущения происходит лишь при наличии квазиэкспоненциального участка.

На первый взгляд кажется, что в описанной ситуации более подходящим было бы определение условий, при которых возмущения усиливаются в определенное число раз. Таким образом естественно поступать в тех случаях, когда известен уровень начальных возмущений (чаще всего — это уровень тепловых флуктуаций). В интересующих нас задачах такой определенности нет: в реальных гравитирующих системах возмущения, намного превышающие тепловые шумы, могут возникать по многим причинам (например, вследствие приливов).

Конечно, глобальные моды поддаются анализу лишь с помощью различного рода численных методов либо (аналитически) в случае очень немногих, сверхупрощенных моделей наподобие твердотельно-вращающихся дисков [2, 3]. Имея, однако, простые критерии локальной устойчивости, можно с определенной уверенностью предсказывать также и свойства глобальных мод. К сожалению, единственный систематически изученный пока тип дисков (с однородным вращением) менее всего подходит для сравнения с нашим локальным анализом (так, принятый нами характерный масштаб $\Delta \rightarrow \infty$ при $\Omega' \rightarrow 0$).

В заключение отметим, что в этой статье мы ограничились рассмотрением возмущений, симметричных относительно экваториальной плоскости диска $z = 0$ (не приводящих к ее изгибам). Именно эти возмущения связаны с такими явлениями, как, например, формирование спиральной структуры галактик. Между тем в звездных дисках может развиваться и изгибная неустойчивость, аналогичная шланговой неустойчивости в гидродинамике и плазме [26]. Она также играет важную роль. Так, эта неустойчивость накладывает весьма существенные ограничения на максимально возможную сплюснутость равновесных систем, таких как, например, эллиптические галактики. Подробно теория шланговой неустойчивости гравитирующих систем изложена в [2, 3].

Благодарим рецензента за важные замечания, позволившие нам улучшить качество статьи.

Эта работа была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 96-02-17792 и 96-02-18239).

Литература

1. В. Л. Поляченко, ЖЭТФ **101**, 1409 (1992).
2. В. Л. Поляченко, А. М. Фридман, *Равновесие и устойчивость гравитирующих систем*, Наука, Москва (1976).
3. A. M. Fridman and V. L. Polyachenko, *Physics of Gravitating Systems*, Springer-Verlag, New York (1984), Vol. 1, 2.
4. W. L. W. Sargent, P. J. Young, A. Boksenberg, K. Shortrige, C. R. Lynds, and F. D. A. Hartwick, *Astrophys. J.* **221**, 731 (1978).
5. M. J. Duncan and J. C. Wheeler, Preprint, Dept. Astron. Univ. Texas, Austin (1979).
6. A. J. Newton and J. J. Binney, *Monthly Not. R. A. S.* **210**, 711 (1984).
7. A. Toomre, *Astrophys. J.* **139**, 1217 (1984).
8. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Строение и эволюция Вселенной*, Наука, Москва (1975).
9. R. W. Miller, K. H. Prendergast, and W. J. Quirk, *Astrophys. J.* **161**, 903 (1970).
10. F. Hohl, *Astrophys. J.* **168**, 343 (1971).
11. Ц. П. Линь, *Теория гидродинамической устойчивости*, ИИЛ, Москва (1958).
12. K. M. Case, *Phys. Fluids* **3**, 149 (1960).
13. Д. Г. Ломинадзе, Г. Д. Чагелашвили, Р. Г. Чанашвили, *Письма в Астрон. журн.* **14**, 856 (1988).
14. P. Goldreich and D. Lynden-Bell, *Monthly Notices R. A. S.* **130**, 97, 125 (1965).
15. W. H. Julian and A. Toomre, *Astrophys. J.* **146**, 810 (1966).
16. А. М. Фридман, О. В. Хоружий, Приложения 1, 2 в кн. Н. Н. Горькавый, А. М. Фридман, *Физика планетных колец*, Наука, Москва (1994).
17. В. Л. Поляченко, С. М. Чурилов, И. Г. Шухман, *Астрон. журн.* **57**, 497 (1980).
18. D. Lynden-Bell and A. J. Kalnajs, *Monthly Not. R. A. S.* **157**, 1 (1972).
19. C. C. Lin and Y. Y. Lau, *Stud. Appl. Math.* **60**, 97 (1979).
20. G. Bertin and C. C. Lin, in *Evolution of Galaxies* (Proc. 10 IAU Regional Astron. Meeting), ed. by J. Palous, Publ. of Astron. Inst. Czech. Acad. Sci. (1988), p. 255.
21. А. Г. Морозов, *Астрон. журн.* **62**, 805 (1980).
22. Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, *Астрон. журн.* **47**, 942 (1970).
23. A. Toomre, in *Structure and Evolution of Normal Galaxies*, ed. by S. M. Fall, D. Lynden-Bell, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1981), p. 111.
24. V. Lindblad, *Stockholm Obs. Ann.* **20**, No. 6 (1958).
25. C. Hunter, *Astrophys. J.* **181**, 685 (1973).
26. А. Б. Михайловский, *Теория плазменных неустойчивостей*, Атомиздат, Москва (1970), т. 1, 2.