

## НАРУШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО РЕЖИМА ПРОТЕКАНИЯ ТОКА В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

А. М. Сатанин\*, В. В. Скузоваткин<sup>а</sup>, С. В. Хорьков

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского*  
603600, Нижний Новгород, Россия

<sup>а</sup> *Институт физики микроструктур Российской академии наук*  
603600, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 31 декабря 1996 г.

Изучается влияние слабой нелинейности сред на линейный режим протекания тока в двумерных периодических структурах половинного состава. Показано, что асимптотическое поведение электрического поля и тока в зависимости от расстояния вблизи углов в гетерогенных средах определяется параметром  $h = \sigma_2/\sigma_1$  ( $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — линейные проводимости ячеек) и внешним магнитным полем  $B$ . Такая зависимость приводит к расходимости высших моментов поля и тока при некоторых критических значениях  $h_c$  и  $B_c$  и расходимости функций отклика, связанных с высшими моментами. В случае квадратных ячеек эффективная нелинейная проводимость расходится при  $h \leq h_c$ ,  $h_c = (\sqrt{2} - 1)^2$ . Для структур общего вида найдена зависимость  $h_c$  от углов и внешнего магнитного поля. Изучены зависимости критического тока и критического поля от параметров системы. Показано, что при заданной структуре система может быть переведена в нелинейный режим обратимым образом путем изменения магнитного поля. Критическое поле  $B_c$  приближенно определяется условием  $\omega_c \tau \sim 1$  ( $\omega_c$  и  $\tau^{-1}$  — соответственно циклотронная частота и частота столкновений). Обсуждается возможность экспериментального обнаружения предсказанных эффектов.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучению электропроводности случайных сред и периодических структур посвящено большое число теоретических и экспериментальных работ [1]. Ввиду особой роли дуальной симметрии [2] оказываются выделенными двумерные системы. Неоднократно отмечалась глубокая аналогия между двумерными случайными системами и периодическими решетками [2–4], позволяющая отнести их к одному классу универсальности в критической области, т. е. вблизи перехода металл–диэлектрик. Двумерные системы привлекательны и с точки зрения экспериментальной реализации, так как методы современной нанотехнологии позволяют создавать пленки заданного состава и пленки с заданной текстурой.

Эффективную электропроводность  $\sigma^{eff}$  двухкомпонентной пленки с проводимостями компонент  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  и концентрациями  $p$  и  $1 - p$  соответственно, можно представить в виде  $\sigma^{eff} = \sigma_1 f(p, h)$ , где  $h = \sigma_2/\sigma_1$ , а  $f$  — функция, имеющая универсальное поведение в критической области [2, 5]. Если  $h = 0$ , то существует критическая концентрация  $p_c$ , при которой происходит переход металл–диэлектрик и проводимость  $\sigma^{eff}$  обращается в нуль. Для двумерной случайной среды  $p_c = 0.5$ . При такой концентрации кор-

\* E-mail: satanin@phys.unn.runnet.ru

реляционный радиус, характеризующий связанную область проводящей компоненты, обращается в бесконечность.

Имеются периодические структуры половинного состава, которые ведут себя подобно неупорядоченным пленкам. Простейший пример — это периодические решетки с чередующимися в шахматном порядке ячейками; проводимости ячеек  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Поскольку концентрации компонент равны, система находится в критической области, т. е. на пороге фазового перехода металл–диэлектрик. Эффективная проводимость неупорядоченной пленки и текстуры при  $p = p_c$  зависит от параметра  $h$ , причем для рассматриваемых систем эта зависимость имеет вид  $\sigma^{eff} = \sigma_1 \sqrt{h}$  [2]. Такая зависимость позволяет отнести указанные системы к одному классу универсальности. Другое важное свойство таких систем связано с распределением в них электрических полей и токов. В работе Дыхне [2] было показано, что усредненные по площади неупорядоченной пленки одноточечные корреляторы поля ( $e^2$ ) и тока ( $j^2$ ) расходятся при малых  $h$ . Аналогичное свойство имеет место и для периодических структур [4].

Представляется важным обобщение полученных результатов на случай нелинейных случайных сред и периодических структур. То, что нелинейные эффекты велики в критической области, было продемонстрировано экспериментально в работе [6], где было обнаружено аномальное поведение критического тока и критического поля нелинейности в неупорядоченных пленках Au вблизи перехода металл–диэлектрик как функций параметра  $p$ . В работах [7–11] изучались нелинейные эффекты в зависимости от  $p$ . Как оказалось, богатая информация о микроструктуре гетерогенных сред может быть извлечена из высших корреляторов электрического поля и тока [7, 8]. Эффективная нелинейная проводимость, коэффициент  $1/f$ -шума и амплитуда третьей гармоники были выражены через корреляторы ( $e^4$ ) и ( $j^4$ ) [8–10]. В работах [12, 13] обсуждалось аномальное поведение нелинейной проводимости в неупорядоченных пленках половинного состава в критической области и было показано, что нелинейная проводимость и связанные с ней корреляторы ( $e^4$ ) и ( $j^4$ ) расходятся при малых  $h$ . Критические свойства текстур до последнего времени не изучались.

В данной работе показано, что в текстурах типа «шахматная доска» режим протекания тока принципиально отличается от случая случайной среды. Как оказалось, ввиду особенностей тока и поля вблизи углов, линейный режим протекания тока разрушается при конечном значении параметра  $h$ . Это критическое значение зависит от геометрии текстуры и внешнего магнитного поля. Изучена зависимость критического поля нелинейности и критического тока от параметров системы. Некоторые результаты данной статьи изложены в кратком сообщении [14].

Статья построена следующим образом. Раздел 2 посвящен формулировке основных уравнений и обобщению соотношения Ахарони–Строуда–Хью для нелинейной проводимости на случай локально-анизотропных сред. В разд. 3 обсуждается точное решение уравнений для электрического поля линейной задачи в случае структуры типа «шахматная доска»; анализируется характер особенностей поля и возможные следствия для нелинейной проблемы. В разд. 4 выполнен расчет эффективной нелинейной проводимости и показано, что нелинейная проводимость расходится при конечном отношении линейных проводимостей компонент. Полученный результат обобщается на случай коугольных решеток в разд. 5, а в разд. 6 изучено поведение системы во внешнем магнитном поле. В разд. 7 обсуждается роль особенностей в текстурах при формировании функций отклика и неуниверсальность критического поведения высших моментов поля и тока, а также возможность наблюдения предсказанной неустойчивости. В При-

ложении А изложены некоторые детали расчета нелинейной проводимости. Задача о вычислении электрического поля вблизи угла косоугольной решетки приведена в Приложении Б.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Геометрия рассматриваемой структуры представлена на рисунке. Темным участкам сопоставляется проводимость  $\sigma_1$  (металл), а светлым —  $\sigma_2$  (диэлектрик). В линейном приближении ток в ячейках описывается выражением

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}, \quad (1)$$

где  $\sigma$  — периодическая функция, принимающая значения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Ток и поле подчиняются уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{e} = 0 \quad (2)$$

и условиям на границах ячеек

$$(\mathbf{j}\mathbf{n})_1 = (\mathbf{j}\mathbf{n})_2, \quad (\mathbf{e}\boldsymbol{\tau})_1 = (\mathbf{e}\boldsymbol{\tau})_2, \quad (3)$$

где  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  соответственно нормальный и касательный векторы к границе раздела сред. Внешнее поле или внешний ток можно задать либо на поверхности макроскопического образца, либо на границах ячеек. Электрическое поле и ток неоднородны в ячейках, поэтому удобно ввести средние по площади системы или по площади двух смежных ячеек:

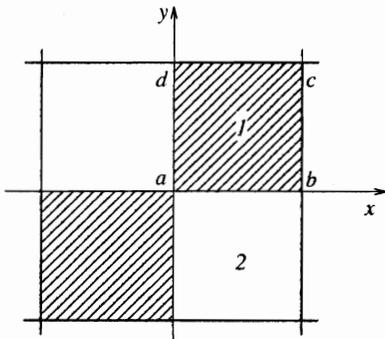
$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{e} \rangle, \quad \mathbf{J} = \langle \mathbf{j} \rangle, \quad (4)$$

и эффективную проводимость  $\sigma^{eff}$ , которую определим соотношением

$$\mathbf{J} = \sigma^{eff} \mathbf{E}, \quad (5)$$

или

$$\sigma^{eff} \mathbf{E}^2 = \langle \sigma \mathbf{e}^2 \rangle. \quad (6)$$



Фрагмент двумерной периодической структуры с проводимостями ячеек  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$

Для макроскопических систем эти определения эквивалентны [10].

Поскольку вблизи углов текстуры поле и ток могут иметь особенности (см. ниже), необходимо с самого начала учесть нелинейные эффекты. Физические механизмы нелинейности существенно зависят от материала, из которого изготовлены ячейки. Если ячейки представляют собой «чистый» металл и «грязный» металл (проводимости ячеек  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ), то можно воспользоваться приближением электронной температуры [15]. Если же, например, ячейки с проводимостью  $\sigma_2$  — широкозонный диэлектрик или легированный полупроводник, то следует принять во внимание активационный механизм зависимости тока от поля [16] в этих ячейках. В данной работе мы ограничимся приближением слабой нелинейности. В этом случае каждая из указанных выше моделей сводится к учету кубического члена в разложении тока по полю:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} + \chi \mathbf{e}^2 \mathbf{e}. \tag{7}$$

Например, в приближении электронной температуры

$$\chi = \frac{\partial \sigma(T)}{\partial T} \frac{\sigma}{\Lambda}, \tag{8}$$

где  $\Lambda$  — коэффициент теплопередачи от электронов к решетке. Чтобы рассмотреть периодические решетки более общего вида, введем эффективные нелинейные проводимости таких сред. Анизотропия граничных условий приводит к анизотропии решений уравнений (3), и эффективные нелинейные характеристики среды приобретают тензорный характер

$$J_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}^{eff} E_\beta + \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{eff} E_\beta E_\gamma E_\delta. \tag{9}$$

Число независимых компонент тензора нелинейной проводимости определяется симметрией решетки. Так, в случае квадратной решетки таких компонент четыре:  $\chi_{xxxx}^{eff} = \chi_{yyyy}^{eff}$ ,  $\chi_{xxyy}^{eff} = \chi_{yyxx}^{eff}$ ,  $\chi_{xyxy}^{eff} = \chi_{yxyx}^{eff}$  и  $\chi_{xyyx}^{eff} = \chi_{yxxy}^{eff}$ , а в случае гексагональной решетки и изотропной среды их три, поскольку для этих сред имеется дополнительная связь  $\chi_{xxxx}^{eff} = \chi_{xxyy}^{eff} + \chi_{xyxy}^{eff} + \chi_{xyyx}^{eff}$ .

Для вычисления эффективной нелинейной проводимости необходимо решить уравнения (2) с использованием (3) и (7) и вычислить компоненты среднего тока, интегрируя локальное выражение по паре соседних ячеек. В случае изотропной среды эффективная нелинейная проводимость в первом порядке по степеням нелинейной проводимости компонент может быть определена только по известному линейному полю в эквивалентной линейной среде [9, 10]. Для анизотропной среды проведем обобщение соотношения Ахарони–Строуда–Хью [9, 10] и покажем, как из этого соотношения получить некоторые компоненты тензора эффективной нелинейной проводимости. Записывая выражение для локальной диссипации энергии и используя теорему Телледжена (см. [10]), получим

$$\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{eff} E_\alpha E_\beta E_\gamma E_\delta = \langle \chi \mathbf{e}^4 \rangle, \tag{10}$$

где локальное электрическое поле  $\mathbf{e}$  определяется из решения линейных уравнений. Для квадратной решетки из (10) следует, что

$$\chi_{xxxx}^{eff} (E_x^4 + E_y^4) + 2(\chi_{xxyy}^{eff} + \chi_{xyxy}^{eff} + \chi_{xyyx}^{eff}) E_x^2 E_y^2 = \langle \chi \mathbf{e}^4 \rangle, \tag{11}$$

т. е. таким способом можно определить только компоненту  $\chi_{xxxx}^{eff}$  и комбинацию компонент при  $E_x^2 E_y^2$ .

Рассмотрим простейший случай, когда решение обладает максимальной симметрией (при этом внешнее поле направлено по диагоналям квадратов, а решения в смежных ячейках связаны дуальным преобразованием [4]). Пусть система координат ориентирована вдоль диагоналей квадратов. Тогда в выражении (11) остается только одна компонента тензора нелинейной проводимости, которую обозначим  $\chi^{eff} = \chi_{xxxx}^{eff}$ . Для нее имеем

$$\chi^{eff} = \frac{\langle \chi e^4 \rangle}{\langle e \rangle^4}. \quad (12)$$

Таким образом, для вычисления нелинейной проводимости необходимо решить уравнения (2) с учетом (1) и вычислить коррелятор (12). Нелинейные эффекты в среде будут существенны, если в выражении

$$\mathbf{J} = (\sigma^{eff} + \chi^{eff} \mathbf{E}^2) \mathbf{E} \quad (13)$$

слагаемые в скобках станут одного порядка. Для направления внешнего поля вдоль диагоналей квадратов определим, следуя [11], критическое поле нелинейности выражением

$$E_c = \sqrt{\frac{\sigma^{eff}}{\chi^{eff}}}, \quad (14)$$

а критический ток

$$J_c = \sigma^{eff} E_c. \quad (15)$$

Критическое поле и критический ток зависят от эффективных характеристик системы  $\sigma^{eff}$  и  $\chi^{eff}$ . Важно отметить, что согласно (12)  $\chi^{eff}$  определяется двумя факторами. Перепишем (12) в виде суммы средних по компонентам:

$$\chi^{eff} = \frac{\chi_1 \langle e^4 \rangle_1 + \chi_2 \langle e^4 \rangle_2}{2E^4}. \quad (16)$$

Из этого выражения следует, что если, например, как это видно из (8), коэффициент теплопередачи  $\Lambda$  достаточно велик, то коэффициенты  $\chi_1$  и  $\chi_2$  можно сделать малыми. Однако корреляторы полей  $\langle e^4 \rangle_1$  и  $\langle e^4 \rangle_2$  при некоторых значениях параметра  $h$  (или других параметров системы) могут иметь особенности. Рост корреляторов полей и является причиной аномального роста эффективной нелинейности структуры. Аномальный рост нелинейной проводимости означает, что система переходит в нелинейный режим протекания. Такой результат можно получить и из решения точных уравнений для тока (2), (3) и (7).

### 3. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ

Как уже было сказано, величина  $\chi^{eff}$  выражается через решение линейной задачи. Линейная задача о распределении поля и тока в плоской периодической структуре типа «шахматная доска» исследовалась в работе [4]. Точное решение было получено с привлечением методов теории краевых задач аналитических функций. В силу двумерности задачи исходная система уравнений (1)–(3) допускает комплексное представление.

С учетом периодической и инверсной симметрии задача об определении тока (или поля) сводится к однородной задаче Маркушевича [17] для двух аналитических функций,  $e_1(z)$  и  $e_2(z)$  (здесь  $z = x + iy$ ), в смежных ячейках. Отображая смежные квадраты с помощью функции Вейерштрасса на верхнюю и нижнюю полуплоскости, имеем задачу для двух функций, аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях с краевыми условиями на действительной оси. Как показано в работе [4], в случае квадратной решетки такая задача сводится к другой эквивалентной задаче Римана для двух пар аналитических функций, допускающей полное решение. Приведем выражение для электрического поля:

$$e_1 = c_1(h)X(z) + c_2(h)X^{-1}(z), \tag{17}$$

$$e_2 = c_3(h)X(z) + c_4(h)X^{-1}(z), \tag{18}$$

где

$$X(z) = \left[ \frac{\operatorname{cn}(Kz/L, k)}{\operatorname{sn}(Kz/L, k) \operatorname{dn}(Kz/L, k)} \right]^{2\gamma}; \tag{19}$$

$\operatorname{sn} x$ ,  $\operatorname{cn} x$ ,  $\operatorname{dn} x$  — эллиптические функции Якоби;  $K$  — полный эллиптический интеграл с модулем  $k$  (для квадрата имеем  $k = 1/\sqrt{2}$ ,  $K = 1.8541$ );  $L$  — длина стороны квадратной ячейки;  $c_i(h)$  — функции, не имеющие особенностей. Параметр  $\gamma$  связан с  $h$  уравнением

$$\operatorname{tg}(\pi\gamma) = \frac{1-h}{2\sqrt{h}}, \quad 0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}. \tag{20}$$

Проанализируем общее решение. Первое и второе слагаемые в (17) и (18) представляют собой частные решения, которые соответствуют направлениям внешнего поля по диагоналям соответственно  $ac$  и  $bd$  (см. рисунок). Функция  $X(z)$  вблизи вершин  $a$  и  $c$  имеет особенности в поведении:

$$X(z) \propto \frac{1}{z^{2\gamma}}, \tag{21}$$

а в смежных углах  $b$  и  $d$

$$X(z) \propto z^{2\gamma}. \tag{22}$$

Понятно, что для функции  $X^{-1}(z)$ , соответствующей направлению внешнего поля по диагонали  $bd$ , особыми являются углы  $d$  и  $b$ . Таким образом, при произвольном направлении внешнего поля общее решение имеет особенности во всех углах решетки. Расходимости типа (21) в окрестности особого угла будут играть важную роль в формировании нелинейного режима протекания тока.

Качественное объяснение асимптотик (21), (22) состоит в следующем. На расстояниях вблизи угла, много меньших размера ячейки, в рассматриваемой системе отсутствуют характерные пространственные масштабы. Поэтому решение уравнения Лапласа в этой области масштабов имеет степенной вид. Показатель степени зависит от распределения зарядов на границах областей с разной проводимостью и, тем самым, от параметра  $h$ .

Отметим, что точные выражения для поля и тока нетрудно найти в случае, когда решетка помещена во внешнее магнитное поле, перпендикулярное ее поверхности (см. разд. 4). Изменению подвергаются только фазы функций (17), (18), и от магнитного поля будет зависеть показатель  $\gamma$ . Метод сведения к задаче Римана позволяет найти точное распределение полей в двумерных системах определенного класса [17–19].

#### 4. РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПРОВОДИМОСТИ И ПОЛЯ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Приступим к непосредственному вычислению указанных выше величин на примере плоской периодической структуры типа «шахматная доска». Для простоты ограничимся случаем, когда внешнее поле  $\mathbf{E}$  направлено вдоль одной из диагоналей квадратов, например вдоль  $ac$  (см. рисунок). При таком выборе направления поля в выражениях (17), (18) константы  $c_2$  и  $c_4$  обращаются в нуль. В этом случае комплексные поля в смежных ячейках связаны дуальным преобразованием [4]

$$e_2(z) = \frac{i}{\sqrt{h}} e_1^*(z^*). \quad (23)$$

Выражая константы  $c_1$  и  $c_3$  через среднее поле  $\mathbf{E}$ , запишем абсолютную величину электрического поля в квадрате с проводимостью  $\sigma_1$  в виде

$$|e_1(z)| = \frac{1}{I} \sqrt{\frac{(1+h)}{2}} |X(z)| |\mathbf{E}|, \quad (24)$$

где

$$I(\gamma) = \frac{\pi^{3/2}}{2K \cos(\pi\gamma)} \left[ \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \right]^{-1}, \quad (25)$$

$\Gamma(x)$  — гамма-функция. Используя (23), (24) и (16), получим выражение для нелинейной проводимости, удобное для анализа

$$\chi^{eff} = \frac{(h^2\chi_1 + \chi_2)(h+1)^2}{8I^4 h^2} \langle |X(z)|^4 \rangle. \quad (26)$$

Как уже отмечалось в разд. 3, функция  $X(z)$  имеет особенность и при некоторых значениях параметра  $\gamma$  ( $\gamma \geq 1/4$ ) интеграл по  $z$  в выражении для  $\langle |X(z)|^4 \rangle$  может расходиться. Общий анализ выражения для  $\chi^{eff}$  показывает (см. Приложение А), что величина нелинейной проводимости увеличивается с уменьшением  $h$  и при стремлении  $h$  к некоторому пороговому значению  $h_c$  ведет себя как

$$\chi^{eff} = \frac{C}{h - h_c}, \quad h > h_c, \quad (27)$$

где

$$C = \frac{\pi^2 (h_c^2 \chi_1 + \chi_2) (h_c + 1)}{8I_c^4 K^2 \sqrt{h_c}}, \quad I_c = I(\gamma_c). \quad (28)$$

Из (20) для квадратной решетки получаем  $h_c = (\sqrt{2} - 1)^2$ . При значениях  $h \leq h_c$  интеграл для  $\chi^{eff}$  расходится. Поясним природу расходимости. Из общего выражения для  $\chi^{eff}$  (16) нетрудно заметить, что аномальный рост нелинейной проводимости связан с ростом корреляторов  $\langle |e|^4 \rangle_{1,2}$ , так как все остальные множители в формуле конечны. Основной вклад в интеграл для  $\langle |e|^4 \rangle_{1,2}$  дают области вблизи особых углов с асимптотическим поведением решения  $\propto z^{-2\gamma}$ . Поэтому для оценки коррелятора при  $h \rightarrow h_c$  достаточно рассмотреть малые окрестности этих точек, а точнее, окрестность одного особого угла в элементарной ячейке. При любом направлении внешнего поля решение в этой области имеет вид (21). На основе этих рассуждений получим

$$\langle |e|^4 \rangle_{1,2} \sim \iint |z|^{-8\gamma} dx dy \sim \int r^{-8\gamma+1} dr. \tag{29}$$

Интеграл (29) расходится при  $\gamma \geq 1/4$ . Из соотношения (20) нетрудно получить соответствующий интервал по  $h$ :  $h \leq h_c$ . Для определения степени расходимости по  $h - h_c$  разложим величину  $\gamma$  в показателе подынтегральной функции (29) в ряд по малому параметру  $h - h_c$  и получим

$$\langle |e|^4 \rangle_{1,2} \sim \int r^{-1+\text{const}\cdot(h-h_c)} dr \sim \frac{1}{h - h_c}. \tag{30}$$

При стремлении  $h$  к  $h_c$  расходится лишь нелинейная проводимость, поэтому из формул для  $E_c$  и  $J_c$  видно, что зависимость критического поля и критического тока нелинейности вблизи  $h_c$  будет полностью определяться поведением  $\chi^{eff}$ , т. е.

$$E_c, J_c \propto \sqrt{h - h_c}. \tag{31}$$

Следует отметить, что для неупорядоченной пленки критическое поле и критический ток обращаются в нуль только при  $h \rightarrow 0$  и имеют разные критические индексы [13].

Таким образом, при  $h \leq h_c$  система находится в нелинейном режиме протекания. Покажем, что этот же результат можно получить путем непосредственного решения нелинейных уравнений (2), (3) и (7). Для этого вычислим первую поправку  $\tilde{e}$  к электрическому полю вблизи особого угла, учитывая нелинейное слагаемое в (7) по теории возмущений. Выберем направление внешнего тока по диагонали  $ac$ . В линейном приближении асимптотическое выражение для потенциала в окрестности угла  $a$  может быть получено из (17) и (18). В цилиндрических координатах потенциал записывается в виде

$$\varphi^{(1)} = r^\lambda A_1 \sin [\lambda(\theta - \pi/4)], \quad \varphi^{(2)} = -r^\lambda A_2 \cos [\lambda(\theta + \pi/4)], \tag{32}$$

где  $\varphi^{(1)}$  и  $\varphi^{(2)}$  — решения соответственно для областей  $0 < \theta < \pi/2$  и  $-\pi/2 < \theta < 0$ ,  $A_1 = (E\sqrt{1+h}/\sqrt{2}I\lambda) (K/L)^{\lambda-1}$ ,  $A_2 = \sqrt{h} A_1$ ,  $E$  — напряженность внешнего поля. В первом порядке по нелинейности, уравнение для потенциала  $\tilde{\varphi}$  соответствующего полю  $\tilde{e}$ , имеет вид

$$\Delta \tilde{\varphi}(r, \theta) = \frac{\chi}{\sigma} (\mathbf{e}, \text{grad } \mathbf{e}^2), \tag{33}$$

где  $\mathbf{e}$  — поле линейной задачи для квадратной решетки в малой окрестности угла, потенциал которого имеет вид (32). Правая часть в (33) зависит от координаты  $r$  как  $r^{-1-6\gamma}$ ,

поэтому решение для  $\tilde{\varphi}$  следует искать в виде  $\tilde{\varphi}^{(k)}(r, \theta) = r^{1-6\gamma} f_k(\theta)$ . Функция  $f_k(\theta)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f_k}{d\theta^2} + \lambda_n^2 f_k = C_k \cos [\lambda(\theta + \pi/4) + \theta_k], \quad (34)$$

где  $\lambda = 1 - 2\gamma$ ,  $\lambda_n = 1 - 6\gamma$ ,  $C_k = 4\gamma(\chi_k/\sigma_k)A_k^3\lambda^3$ ,  $\theta_1 = \pi\gamma$ ,  $\theta_2 = 0$ , индекс  $k$  нумерует области (при  $k = 1$  угол  $\theta$  меняется в интервале  $0 < \theta < \pi/2$ , а при  $k = 2$  — в интервале  $-\pi/2 < \theta < 0$ ).

Решение уравнений (34) в каждой из областей ищем в виде суммы частного решения и решения однородного уравнения. Неизвестные коэффициенты при однородном решении в каждой из областей однозначно определяются граничными условиями (3) для поля  $\tilde{e}^{(k)}$  и тока  $\tilde{j}^{(k)}$ , где  $\tilde{j}^{(k)} = \sigma_k \tilde{e}^{(k)} + \chi_k (e^{(k)})^3$ . Запишем полный вид решения для  $\tilde{\varphi}^{(k)}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{(1)} &= \frac{C_1}{32\gamma(1/4 - \gamma)} r^{\lambda_n} \{ B_1 \sin [\lambda_n(\theta - \pi/4)] + \sin [\lambda(\theta - \pi/4)] \}, \\ \tilde{\varphi}^{(2)} &= \frac{C_2}{32\gamma(1/4 - \gamma)} r^{\lambda_n} \{ B_2 \cos [\lambda_n(\theta + \pi/4)] - \cos [\lambda(\theta + \pi/4)] \}, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $B_1$  и  $B_2$  — некоторые постоянные, не имеющие особенности при  $\gamma \rightarrow 1/4$ . С помощью полученного решения (35) можно понять, где находится область с нелинейным режимом протекания. Сравнивая решения (35) и (32), нетрудно заметить, что вследствие  $\lambda_n < \lambda$  с удалением от угла потенциал  $\tilde{\varphi}$  в сравнении с  $\varphi$  уменьшается, а при приближении к углу увеличивается. В области, где  $\tilde{\varphi} < \varphi$ , поля и токи приближенно можно считать линейными. В окрестности же угла, где  $\tilde{\varphi} > \varphi$ , поле является существенно нелинейным и для его описания полученного решения  $\tilde{\varphi}$  недостаточно. Из (35) видно, что при  $\gamma \rightarrow 1/4$  амплитуда  $\tilde{\varphi}$  растет как  $1/(1/4 - \gamma)$ . Этот факт легко заметить и из уравнения (34), которое напоминает по своему виду уравнение гармонического осциллятора с собственной частотой  $|\lambda_n|$  и периодической вынуждающей силой с частотой  $\lambda$ . Случай  $\gamma = 1/4$  в этом уравнении соответствует совпадению частот  $|\lambda_n|$  и  $\lambda$ , т. е. условию резонанса. Таким образом, исследование уже первой поправки к полю по нелинейности в окрестности особого угла позволяет заключить, что при некоторых значениях параметра  $h$ , а именно при  $h = h_c$ , область пространства с нелинейным режимом протекания расширяется, что, в свою очередь, может означать переход в нелинейный режим протекания всей системы как целого.

## 5. ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ КОСОУГОЛЬНЫХ РЕШЕТОК

Рассмотрим теперь, как меняется нелинейная проводимость  $\chi^{eff}$  и критическое поле  $E_c$  при изменении геометрии структуры. При вычислении  $\chi^{eff}$  основной вклад в корреляторы  $\langle e^4 \rangle_{1,2}$  дают области вблизи особых углов с асимптотическим поведением электрического поля типа (21). Поэтому достаточно выделить из всей структуры малые окрестности точек, в которых стыкуются несколько областей с разными проводимостями и в которых при заданном направлении внешнего тока корреляторы  $\langle e^4 \rangle_{1,2}$  расходятся. Внутри каждой выделенной области необходимо вычислить поле  $e$  и затем,

используя полученное решение, оценить  $\chi^{eff}$ . Таким образом, задача о вычислении  $\chi^{eff}$  для разных решеток сводится к определению электрического поля в малой окрестности особых узлов с разной геометрией неоднородностей. В качестве первого примера рассмотрим, как будут меняться результаты для  $\chi^{eff}$  и поля  $E_c$  для решетки, составленной из ромбов (с углом  $\alpha$ ) с проводимостями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Для определения поля в окрестности особого узла решим следующую задачу. Рассмотрим плоскость, разбиваемую двумя прямыми, пересекающимися под углом  $\alpha$ , на четыре области с проводимостями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , и решим задачу о протекании тока в такой неоднородной структуре. Электрическое поле определяется уравнениями (1), (2) и условием (3) на границе областей. Решение для скалярного потенциала  $\varphi(r, \theta)$  ( $r, \theta$  — цилиндрические координаты, центр системы координат выбран в точке пересечения прямых) в общем случае имеет вид

$$\varphi^{(k)} = r^\lambda A_k \cos(\lambda\theta + \theta_k), \tag{36}$$

где индекс  $k$  нумерует области, образованные пересечением прямых,  $A_k, \theta_k$  — некоторые постоянные,  $\lambda = 1 - 2\gamma$ .

Заметим, что потенциал  $\varphi(r, \theta)$  имеет вид (36) и в тех случаях, когда в центре системы координат сходится произвольное количество секторов с разной проводимостью. Степенной вид зависимости  $\varphi$  от координаты  $r$  при вычислении  $\langle e^4 \rangle_{1,2}$  приводит к тому, что для окрестности угла с любой неоднородностью указанного типа получаются значения  $\langle e^4 \rangle_{1,2}$ , аналогичные (29), но с другим  $\gamma$ . Поэтому, для того чтобы оценить вклад данной выделенной области в  $\chi^{eff}$ , необходимо найти соответствующий показатель  $\gamma$ .

Вернемся к рассмотрению поля вблизи точки соприкосновения четырех секторов. Подставляя решение (36) в граничное условие (3), получим однородную систему алгебраических уравнений (см. Приложение Б), условие разрешимости которой дает выражение, определяющее показатель  $\lambda$ . В данном случае имеются два значения  $\lambda$ . Величина  $\lambda$ , определяемая уравнением

$$\text{tg} \frac{\lambda\alpha}{2} \text{tg} \frac{\lambda(\pi - \alpha)}{2} = h, \tag{37}$$

соответствует частному решению с направлением внешнего поля вдоль биссектрисы секторов с хорошей проводимостью, когда ток «просачивается» через сужение, образованное секторами с плохой проводимостью. Разумеется, именно решение с  $\lambda$  из (37) приводит к расходимости поля  $e$  в начале координат. Частному решению с направлением внешнего поля вдоль биссектрисы секторов с плохой проводимостью соответствует значение  $\lambda$ , определяемое уравнением

$$\text{tg} \frac{\lambda\alpha}{2} \text{tg} \frac{\lambda(\pi - \alpha)}{2} = \frac{1}{h}. \tag{38}$$

Используя (37), найдем  $h_c$ , при котором корреляторы  $\langle e^4 \rangle_{1,2}$  начинают расходиться. Подставляя в (37) значение  $\lambda = 1/2$  (соответствующее  $\gamma = 1/4$ ), получаем

$$h_c = \text{tg} \left( \frac{\alpha}{4} \right) \frac{1 - \text{tg}(\alpha/4)}{1 + \text{tg}(\alpha/4)}. \tag{39}$$

Из (39) следует, что величина  $h_c$  при отклонении угла  $\alpha$  от  $\pi/2$  начинает уменьшаться и область линейного режима, характеризуемого параметром  $h$ , расширяется.

Рассмотрим теперь узел, в котором сходится  $2N$  секторов с проводимостями  $\sigma_1, \sigma_2$  и углом  $\alpha = \pi/N$ . Вычислим значение параметра  $h_c$ , при котором вклад в  $\langle e^4 \rangle_{1,2}$  от данной области приведет к расходимости. Проводя аналогичные вычисления, можно найти выражение, определяющее  $\lambda$  (см. (65) в Приложении Б), из которого при  $\lambda = 1/2$  получаем

$$h_c = S - \sqrt{S^2 - 1}, \quad S = 8 \cos^2(\pi/2N) - 1. \quad (40)$$

В частности, для шести секторов с углом  $\alpha = \pi/3$  и  $N = 3$  из (40) получаем  $h_c = 5 - 2\sqrt{6}$ . Анализируя (40), нетрудно заметить, что с увеличением числа  $N$  значение  $h_c$  уменьшается, стремясь к предельному значению  $h_c = 7 - 4\sqrt{3}$ .

Полученные результаты для  $h_c$  позволяют сделать некоторые выводы относительно того, как зависит  $h_c$  от геометрии областей, образованных секторами с двумя типами проводимости. Во-первых, из всех фигур, образованных секторами с одинаковыми углами, максимальное значение  $h_c$  получается при  $\alpha = \pi/2$ ; это видно из (40). Во-вторых, при заданном количестве секторов, наибольшее значение  $h_c$  имеет фигура, у которой углы секторов одинаковы. Этот результат следует, в частности, из (39).

## 6. КРИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕТОК В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим теперь влияние магнитного поля на нелинейные эффекты. В линейном случае в выражении для тока необходимо учесть холловское слагаемое:

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} e_\beta + \sigma^H \varepsilon_{\alpha\beta} e_\beta, \quad (41)$$

где  $\sigma^H$  — холловская проводимость,  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  — единичный антисимметричный тензор. Введем параметр Холла  $\beta = -\sigma^H/\sigma$ , который принимает значения  $\beta_1$  и  $\beta_2$  соответственно в первой и второй ячейках. В присутствии магнитного поля нелинейная проводимость становится тензором, который содержит симметричные и антисимметричные компоненты. Структуру тензора можно легко установить, используя приближение электронной температуры (см. разд. 2). В рамках этой модели симметричная часть тензора нелинейной проводимости имеет вид

$$\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{sym} = \chi_s \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta}, \quad (42)$$

где  $\chi_s$  определено выражением (8). Нетрудно показать, что для диссипативной части эффективной нелинейной проводимости имеет место соотношение

$$\chi_s^{eff} = \frac{\langle \chi_s e^4 \rangle}{\langle e \rangle^4}. \quad (43)$$

Таким образом, для вычисления  $\chi_s^{eff}$  необходимо решить линейную задачу для периодической решетки в магнитном поле. Используем уже подробно разобранный задачу о плоской квадратной решетке. Точное решение для поля в линейном приближении с учетом холловского слагаемого в такой решетке может быть получено тем же методом, что и в отсутствие магнитного поля [19]. Как уже было указано, для вычисления  $E_c$  нам достаточно рассмотреть асимптотику решения вблизи одного особого угла. Магнитное поле не меняет вида асимптотик, они имеют по-прежнему степенной характер (21), (22).

При этом показатель степени  $\gamma$  зависит от магнитного поля и эта зависимость определяется выражением

$$\operatorname{tg}(\pi\gamma) = \frac{\sqrt{(1-h)^2 + (h\beta_1 - \beta_2)^2}}{2\sqrt{h}}. \quad (44)$$

Следовательно, зависимости нелинейной проводимости  $\chi^{eff}$  и критического поля  $E_c$  от  $h - h_c$  не меняют своего вида. Критическое значение  $h_c$ , соответствующее  $\gamma_c = 1/4$ , теперь будет зависеть от магнитного поля:

$$h_c = \frac{(3 + \beta_1\beta_2) - \sqrt{8 + 4\beta_1\beta_2 - (\beta_1 - \beta_2)^2}}{1 + \beta_1^2}. \quad (45)$$

Обсудим физический смысл полученных выражений и сравним с тем, что получается в двумерных случайных системах. Если двумерная неупорядоченная система помещена во внешнее магнитное поле, то в линейном приближении учет поля сводится к следующему [20, 21]. Амплитуды квадратичных флуктуаций поля и тока будут зависеть от напряженности магнитного поля  $B$ . В простейшем случае эту зависимость можно характеризовать параметром  $\omega_c\tau$ , где  $\omega_c$  — циклотронная частота,  $\tau$  — среднее время между столкновениями. В случае слабого поля ( $\omega_c\tau \ll 1$ ) появляется квадратичная поправка к амплитуде флуктуаций, а в пределе сильного поля ( $\omega_c\tau \gg 1$ ) амплитуда растет пропорционально полю  $B$  [20, 21]. При этом магнитное поле качественно не влияет на асимптотики эффективной линейной проводимости и корреляторов при малых  $h$ : эффективная проводимость убывает как  $\sqrt{h}$ , а корреляторы полей расходятся как  $1/\sqrt{h}$  [20, 21]. Для квадратной решетки эффективная проводимость и корреляционные функции в точности совпадают с соответствующими величинами для случайной системы половинного состава [22, 19].

Как показано выше, диссипативная нелинейная проводимость и корреляторы  $\langle e^4 \rangle_{1,2}$  расходятся при конечных значениях параметра  $h_c$ , которое зависит от магнитного поля согласно (45). В слабом поле имеется квадратичный рост  $h_c$  с полем, а при сильных полях  $h_c$  приближается к единице. Интересно отметить, что при заданном конечном значении  $h = \sigma_2/\sigma_1$ ,  $h > h_c$  существует такое критическое значение поля  $B_c$ , при котором нелинейная проводимость и корреляторы  $\langle e^4 \rangle_{1,2}$  расходятся. Для случая  $\sigma_2/\sigma_1 \neq \beta_2/\beta_1$  из (45) следует, что критическое значение магнитного поля соответствует случаю, когда параметр  $\omega_c\tau \sim 1$  при  $\beta_1 \sim \beta_2$ . Как известно, такое значение параметра соответствует переходу от классически слабого поля к классически сильному. Критическое поле  $B_c$  для соответствующего материала можно оценить из условия  $\omega_c\tau \sim 1$ . Нетрудно получить выражение для  $B_c$  в случае произвольного угла  $\alpha$ , образованного пересечением двух прямых, если решить задачу о протекании тока в такой геометрии с учетом магнитного поля. Действуя подобно тому, как описано в Приложении Б, найдем

$$B_c = \sqrt{\frac{(1+c^2)h - (1+h^2)c}{c(hr_1 - r_2)^2}}, \quad (46)$$

где

$$c = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi - \alpha}{4}, \quad r_1 = \frac{\beta_1}{B}, \quad r_2 = \frac{\beta_2}{B}.$$

При получении (46) предполагалось, что параметры  $r_1$  и  $r_2$  слабо зависят от магнитного поля. Суммируя сказанное, приходим к выводу, что при заданных значениях параметра  $h$  и угла  $\alpha$  существует критическое магнитное поле, при котором происходит обратимый переход в нелинейный режим протекания.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, периодическая решетка типа «шахматная доска» замечательна тем, что для нее удастся в общем случае установить характер особенностей и проанализировать их роль в явлениях токопереноса. Как видно из точного решения, особенности высших моментов поля определяются асимптотическим поведением решений вблизи углов. Это свойство позволило нам обобщить результаты на случай решеток более общего вида.

На существенную роль особенностей в случайных средах и периодических решетках указывалось в работах Дрейзина и Дыхне [23], Бергмана [24], Дубсона и др. [8] и Дыхне, Зосимова и Рыбака [25]. В работе Балагурова [5] отмечалось, что в квадратной решетке эффективная проводимость имеет логарифмическую особенность в зависимости от концентрации компонент. Как показано выше, особенности электрического поля и тока зависят от параметров решетки, отношения проводимостей и внешнего магнитного поля. Критические индексы проводимости и квадратичных корреляторов решетки и двумерной случайной среды совпадают. По этому признаку системы можно было бы отнести к одному классу универсальности.

В настоящей работе обнаружено новое свойство двумерных решеток. Показано, что линейный режим протекания тока неустойчив при некотором критическом значении параметра  $h_c$ , т. е. рассмотрение таких систем при  $h \leq h_c$  в линейном приближении не оправдано. Этот эффект связан с особенностями поля и расходимостями высших моментов поля [8, 24]. В настоящей работе вычислено критическое значение  $h_c$ , критические значения угловых параметров и магнитного поля для разных типов решеток. Можно полагать, что существует и другой класс точно решаемых двумерных решеток, в которых особенности могут быть изучены точно. Классификация такого рода особенностей в решетках, видимо, еще не проводилась.

Область параметров  $h \leq h_c$  и  $B \geq B_c$  осталась за пределами нашего рассмотрения. В окрестностях особых углов структуры, где нарушается линейный режим протекания тока, для нахождения полей необходимо решать нелинейные уравнения.

Следует отметить, что экспериментальное изучение нелинейных эффектов в неупорядоченных и периодических структурах в зависимости от отношения линейных проводимостей и магнитного поля может оказаться проще, чем изучение концентрационной зависимости [6]. Действительно, изменение параметров  $h$  и  $B$  нетрудно осуществить на одном образце. Например, в качестве плохо проводящей компоненты может быть использован полупроводник, обладающий большой фоточувствительностью. Тогда параметр  $h$  можно менять, поскольку он будет пропорционален интенсивности света. Особенно просто осуществить переход в нелинейный режим путем изменения магнитного поля. Как показано в работе, для этого не требуется сверхсильных полей. Нелинейные эффекты удобно наблюдать по генерации высших гармоник, которые пропорциональны высшим моментам электрического тока [8, 26].

Особенности, подобные исследованным в данной работе, будут иметь место и для других явлений, например, тепловых и шумовых процессов [25].

Один из авторов (А. М. С.) весьма признателен А. М. Дыхне, А. А. Снарскому и П. М. Хью за полезные замечания. Работа поддержана грантом Госкомвуза №95-0-7.4-173. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №97-02-16923а).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Для оценки величины  $\langle |X(z)|^4 \rangle$  запишем ее в виде

$$\langle |X(z)|^4 \rangle = \frac{1}{2} \iint |X(z)|^4 \frac{dz dz^*}{L^2}, \tag{47}$$

где интегрирование проводится по области, на которую отображается квадрат  $abcd$ . Этот интеграл удобно анализировать, если выразить  $X(z)$  (см. (19)) через функцию Вейерштрасса:

$$X(z) = \wp(z)^{-\gamma} [\wp(z)^2 - \wp_L^2]^\gamma, \tag{48}$$

где  $\wp_L = \wp(L)$ . В интеграле (47) можно перейти к новым переменным  $\wp$  и  $\bar{\wp}$ . Якобиан преобразования имеет вид

$$\left| \frac{dz}{d\wp} \right|^2 = \frac{L^2}{4K^2} |\wp(\wp^2 - \wp_L^2)|^{-1}. \tag{49}$$

После этого выражение (47) запишется как

$$\langle |X(z)|^4 \rangle = \frac{1}{8K^2} \iint |\wp|^{-(1+4\gamma)} |\wp^2 - \wp_L^2|^{-(1-4\gamma)} d\wp d\bar{\wp}. \tag{50}$$

Интеграл (50) берется по всей верхней полуплоскости переменной  $\wp$ . Делая замену  $\wp/\wp_L = \sqrt{x} \exp(i\theta/2)$ , имеем

$$\langle |X(z)|^4 \rangle = \frac{\wp_L^{4\gamma-1}}{16K^2} \int_0^\infty x^{-(1+4\gamma)/2} f(x) dx, \tag{51}$$

где

$$f(x) = \int_0^{2\pi} (1 - 2x \cos \theta + x^2)^{(4\gamma-1)/2} d\theta. \tag{52}$$

Функция  $f(x)$  обладает свойством  $f(1/x) = x^{1-4\gamma} f(x)$ , которое позволяет свести интегрирование по  $x$  к интервалу  $[0, 1]$ , т. е.

$$\langle |X(z)|^4 \rangle = \frac{\wp_L^{4\gamma-1}}{8K^2} \int_0^1 f(x) x^{-(4\gamma+1)/2} dx. \tag{53}$$

Функция  $f(x)$  выражается через гипергеометрическую функцию [27], что позволяет записать (53) в виде

$$\langle |X(z)|^4 \rangle = \frac{\pi \varrho L^{4\gamma-1}}{4K^2} \int_0^1 x^{-(4\gamma+1)/2} F\left(\frac{1-4\gamma}{2}, \frac{1-4\gamma}{2}, 1, x^2\right) dx. \quad (54)$$

Если разложить гипергеометрическую функцию в подынтегральном выражении по степеням  $x$ , то первое слагаемое ведет себя как  $x^{-(4\gamma+1)/2}$ , и при некоторых значениях параметра  $\gamma$  интеграл (54) может расходиться. Нетрудно видеть, что интеграл будет расходиться при  $\gamma \geq \gamma_c$ , где  $\gamma_c = 1/4$ . При  $\gamma < \gamma_c$  и  $\gamma_c - \gamma \ll 1$  поправка к расходящемуся слагаемому порядка  $(\gamma_c - \gamma)^2$ . Таким образом, вблизи  $\gamma_c$  выражение (54) имеет вид

$$\langle |X(z)|^4 \rangle \simeq \frac{\pi}{8K^2} \left\{ \frac{1}{\gamma_c - \gamma} + 4\zeta(3)(\gamma_c - \gamma)^2 + \dots \right\}, \quad (55)$$

где  $\zeta(x)$  — дзета-функция Римана. Разность  $\gamma_c - \gamma$  связана с разностью  $h - h_c$  соотношением

$$\gamma_c - \gamma = (h - h_c) \frac{h_c + 1}{8\pi} h_c^{-3/2}, \quad (56)$$

которое следует из (20). Подставляя (56) в (55), а затем в (26), окончательно получаем (27).

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Найдем электрическое поле в плоской среде, разделенной лучами на  $M$  секторов. Пусть величина угла сектора с номером  $k$  равна  $\alpha_k$ , а проводимость  $\sigma_k$ . Электрическое поле удобно искать в виде

$$e_r = \lambda r^{\lambda-1} f(\theta), \quad e_\theta = r^{\lambda-1} f'(\theta), \quad (57)$$

где функция  $f_k$  в каждом секторе подчиняется уравнению

$$f_k'' + \lambda^2 f_k = 0 \quad (58)$$

и следующим условиям на границе  $\theta = \phi_k$  между секторами  $k$  и  $k+1$ :

$$f_k(\phi_k) = f_{k+1}(\phi_k), \quad \sigma_k f_k'(\phi_k) = \sigma_{k+1} f_{k+1}'(\phi_k). \quad (59)$$

Если представить решение уравнения (58) в секторе с номером  $k$  в виде  $f_k = a_k \cos(\lambda\theta) + b_k \sin(\lambda\theta)$ , то условие (59) приводит к связи между коэффициентами  $a_k, b_k$  в соседних секторах

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Omega_k \mathbf{x}_k, \quad \Omega_k = T^{-1}(\lambda\phi_k) H(1/h_k) T(\lambda\phi_k), \quad (60)$$

где  $\mathbf{x}_k$  — вектор-столбец с компонентами  $a_k, b_k$ ;  $T(\theta)$  — матрица двумерного поворота на угол  $\theta$ ;  $H(h)$  — диагональная матрица с элементами на диагонали 1 и  $h$ ;  $h_k = \sigma_{k+1}/\sigma_k$ . Записывая условие  $\mathbf{x}_{M+1} = \mathbf{x}_1$  с использованием (60), получим уравнение  $\left( \prod_{i=1}^M \Omega_i - I \right) \mathbf{x}_1 = 0$ , которое имеет ненулевое решение только при

$$\det \left( \prod_{i=1}^M \Omega_i - I \right) = 0, \quad (61)$$

причем  $\det \prod_{i=1}^M \Omega_i = 1$ . Выражение (61) определяет  $\lambda$ .

Вычислим показатель  $\lambda$  для некоторых случаев. Пусть  $N$  прямых пересекаются в одной точке (начале координат) и делят плоскость на  $2N$  секторов с величиной угла  $\alpha = \pi/N$ , и проводимостями двух типов,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . При такой геометрии произведение матриц  $\Omega_i$  в (61) можно представить в виде

$$\prod_{i=1}^{2N} \Omega_i = U^N, \tag{62}$$

где  $U = H(h)T(\lambda\alpha)H(1/h)T(\lambda\alpha)$ ,  $h \doteq \sigma_2/\sigma_1$ . Матрица  $U$  имеет собственные значения  $\exp(i\psi)$  и  $\exp(-i\psi)$ , а  $\psi$  определяется уравнением

$$\cos \psi = \cos^2(\lambda\alpha) - \frac{1+h^2}{2h} \sin^2(\lambda\alpha). \tag{63}$$

Из (61) и (62) следует, что величина  $\lambda$  находится из условия равенства единице одного из собственных значений матрицы  $U^N$ , т.е. из условия  $\pm\psi N = 2\pi$ , или

$$\cos \psi = \cos(2\pi/N). \tag{64}$$

Подставляя в (64) выражение (63), получим уравнение для определения  $\lambda$ :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi\lambda}{N} = \frac{2h [1 - \cos(2\pi/N)]}{1 + 2h \cos(2\pi/N) + h^2}. \tag{65}$$

Значения  $\lambda$  должны стремиться к единице при  $h \rightarrow 1$ . Для случая четырех секторов ( $N = 2$ ) из (65) получается два значения  $\lambda$ , которые можно представить в виде  $1 + 2\gamma$  и  $1 - 2\gamma$  с  $\gamma$  из (20). При  $N > 2$  имеется только одно значение для  $\lambda$ .

Рассмотрим теперь другую структуру, составленную из четырех секторов с проводимостями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Секторы образованы пересечением двух прямых с углом  $\alpha$  между ними. Значение  $\lambda$  можно получить аналогично тому, как это делалось выше, учитывая, что имеет место соотношение (62) с  $N = 2$  и  $U = H(h)T(\lambda(\pi - \alpha))H(1/h)T(\lambda\alpha)$ . Однако в данном случае наиболее просто вычисляется  $\lambda$  другим способом. Дело в том, что структура имеет две оси симметрии, проходящие вдоль биссектрисы секторов с разными проводимостями. Направляя внешний ток вдоль одной из осей, замечаем, что потенциал электрического поля симметричен относительно этой оси и антисимметричен относительно другой. Такая симметрия позволяет однозначно определить значения фаз в каждом секторе. Кроме того, рассматриваемая задача обладает симметрией инверсии,  $\mathbf{e}(-\mathbf{r}) = \mathbf{e}(\mathbf{r})$ , что в итоге позволяет свести полную систему граничных условий (при любом направлении внешнего тока) к граничным условиям только между двумя соседними секторами. Выбирая систему координат с началом в точке пересечения прямых, направляя ось  $x$  и внешний ток вдоль биссектрисы сектора с углом  $\alpha$  и проводимостью  $\sigma_1$  получим потенциал электрического поля в виде

$$\varphi^{(1)} = r^\lambda A_1 \cos(\lambda\theta), \quad \varphi^{(2)} = -r^\lambda A_2 \sin [\lambda(\theta - \pi/2)],$$

где  $k = 1$  соответствует области  $-\alpha/2 < \theta < \alpha/2$ , а при  $k = 2$  угол  $\theta$  меняется в интервале  $\alpha/2 < \theta < \pi - \alpha/2$ . При указанном направлении внешнего тока достаточно рассмотреть граничное условие лишь на одной границе между секторами, например

$\theta = \alpha/2$ . Подставляя  $\varphi^{(1)}$ ,  $\varphi^{(2)}$  в граничное условие (3) получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} A_1 \cos \frac{\lambda\alpha}{2} + A_2 \sin \frac{\lambda(\alpha - \pi)}{2} &= 0, \\ A_1 \sigma_1 \sin \frac{\lambda\alpha}{2} - A_2 \sigma_2 \cos \frac{\lambda(\alpha - \pi)}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (66)$$

Ненулевое решение существует только тогда, когда определитель системы (66) равен нулю, т.е. когда выполняется условие (37). Уравнение (37) определяет значение  $\lambda$ , а одно из уравнений системы (66) (при вычисленном  $\lambda$ ) дает величину  $A_1/A_2$ . В частном случае  $\alpha = \pi/2$  полученный результат согласуется с формулой (20), если положить  $\lambda = 1 - 2\gamma$ . Найдем теперь второе частное решение с направлением внешнего тока по оси  $y$ . Рассуждая аналогичным образом, приходим к следующему выражению для потенциала в первой и второй областях:

$$\varphi^{(1)} = -r^\lambda B_1 \sin(\lambda\theta), \quad \varphi^{(2)} = r^\lambda B_2 \cos[\lambda(\theta - \pi/2)],$$

где величина  $\lambda$  теперь будет определяться уравнением (38).

## Литература

1. *Proceedings of the Third International Conference on Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media*, Physica A **207**, (1994).
2. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
3. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **79**, 1560 (1980).
4. Ю. П. Емец, ЖЭТФ **96**, 701 (1989).
5. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **88**, 1664 (1985).
6. Y. Gefen, W. H. Shih, R. B. Laibowitz, and J. M. Viggiano, Phys. Rev. Lett. **57**, 3097 (1986).
7. L. de Arcangeles, S. Reeder, and A. Coniglio, Phys. Rev. B **34**, 4656 (1986).
8. M. A. Dubson, Y. C. Hui, M. B. Weissman, and J. C. Garland, Phys. Rev. B **39**, 6807 (1989).
9. A. Aharony, Phys. Rev. Lett. **58**, 2726 (1987).
10. D. Stroud and P. M. Hui, Phys. Rev. B **37**, 8719 (1988).
11. R. Blumenfeld and D. J. Bergman, Phys. Rev. B **43**, 13682 (1994).
12. А. М. Сатанин, С. В. Хорьков, А. Ю. Угольников, Письма в ЖЭТФ **62**, 301 (1995).
13. А. М. Сатанин, Письма в ЖТФ **21**, 44 (1995).
14. А. М. Сатанин, В. В. Скузоваткин, С. В. Хорьков, Письма в ЖЭТФ **64**, 495 (1996).
15. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, *Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда*, Наука, Москва (1975).
16. И. Е. Гольдман, А. Г. Ждан, ФТП **10**, 1839 (1976).
17. Л. В. Горожда, Ю. П. Емец, Н. И. Жуков, Э. И. Зверович, ЖТФ **49**, 1577 (1979).
18. Ю. М. Васецкий, Л. В. Горожда, Ю. П. Емец, ЖТФ **52**, 601 (1982).
19. Ю. П. Емец, *Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой*, Наукова думка, Киев (1986).
20. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 641 (1970).
21. Б. Я. Балагуров, ФТТ **20**, 3332 (1978).
22. Ю. М. Васецкий, Ю. П. Емец, ПМТФ **5**, 117 (1979).

23. Ю. А. Дрейзин, А. М. Дыхне, ЖЭТФ **84**, 1756 (1983).
24. D. J. Bergman, Phys. Rev. B **39**, 4598 (1989).
25. А. М. Дыхне, В. В. Зосимов, С. А. Рыбак, ДАН **345**, 467 (1995).
26. А. А. Снарский, Письма в ЖТФ **21**, 3 (1995).
27. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).