

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОННЫХ СПЕКТРОВ В МОНОКРИСТАЛЛАХ

И. А. Дынников^{а*}, А. Я. Мальцев^{б†}

^а *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119899, Москва, Россия*

^б *Институт теоретической физики им. Ландау
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 27 декабря 1996 г.

В работе рассматриваются топологические характеристики дисперсионных законов $\epsilon_s(\mathbf{p})$ разрешенных энергетических зон в монокристаллах, связанные с поведением квазиклассических электронных траекторий в сильных однородных магнитных полях. А именно, описываются топологические свойства незамкнутых в \mathbf{p} -пространстве траекторий, лежащих на разных энергетических уровнях в пределах одной зоны, а также связанные с ними физические эффекты.

Данная работа является продолжением работы [1] и посвящена рассмотрению физических эффектов, связанных с результатами, недавно полученными в трехмерной топологии. Первоначальная постановка вопроса была связана с физическими эффектами, обусловленными возможностью наличия незамкнутых квазиклассических электронных траекторий в металлических монокристаллах в однородном магнитном поле. Опишем кратко возникающую при этом ситуацию.

В рамках одночастичного приближения можно (при условии применимости квазиклассики) ввести одночастичную функцию распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ электронов по координатам и квазиимпульсам (в пределах одной энергетической зоны), удовлетворяющую уравнению Больцмана:

$$f_t + v_{gr}^i(\mathbf{p}) \frac{\partial f}{\partial x^i} + F^i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \frac{\partial f}{\partial p_i} = I[f](\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (1)$$

где $I[f]$ — интеграл столкновений.

Групповая скорость $\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p})$ есть градиент закона дисперсии $\epsilon_s(\mathbf{p})$ данной энергетической зоны, представляющего собой 3-периодическую в \mathbf{p} -пространстве функцию, с периодами равными векторам обратной решетки. Нас будет интересовать случай, когда

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p}) \mathbf{B}] + \bar{F}(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

и магнитное поле \mathbf{B} велико (критерием этого в данном случае будет являться условие $\omega_B \gg \tau^{-1}$, где τ — время свободного пробега электронов). В этом случае движение электронов в пространстве квазиимпульсов в главном по B порядке будет задаваться системой

* E-mail: dynnikov@nw.math.msu.su

† E-mail: maltsev@itp.ac.ru

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\nabla \epsilon_s(\mathbf{p}) \mathbf{V}]. \quad (3)$$

Интегральные траектории системы (3) задаются пересечениями плоскостей, перпендикулярных магнитному полю \mathbf{V} , с поверхностями уровня $\epsilon_s(\mathbf{p}) = \text{const}$. Важную роль при этом играют открытые (т. е. незамкнутые) траектории, лежащие (в плоскости, перпендикулярной магнитному полю) в прямой полосе конечной ширины и проходящие ее насквозь. Исключительная роль таких траекторий была подробно описана в работах [2–4]. В этих работах, посвященных рассмотрению электропроводности металлов в сильных однородных магнитных полях, определяемой свойствами стационарных решений (1) в случае, когда \vec{E} есть слабое однородное электрическое поле, были рассмотрены замечательные примеры появления траекторий такого типа и выделен исчезающий при $V \rightarrow \infty$ вклад таких траекторий в тензор электропроводности, приводящий к наличию конечной проводимости не только в направлении вдоль поля \mathbf{V} , но и во всех направлениях, перпендикулярных среднему направлению таких траекторий (обозначим его η), при сколь угодно больших полях. Основную роль при этом играют энергетические уровни вблизи уровня Ферми и, таким образом, все определяется топологией траекторий, лежащих на ферми-поверхности. Это свойство было использовано для экспериментального исследования формы ферми-поверхности металла, мы сошлемся здесь на работы [5–8], подробная информация имеется также в [9].

В работах [10–13] была поставлена топологическая проблема классификации всевозможных открытых траекторий, получаемых пересечением поверхностей уровня произвольной 3-периодической функции некоторой плоскостью в \mathcal{R}^3 , и, в частности, выдвинута гипотеза о том, что любая незамкнутая траектория лежит при этом в прямой полосе конечной ширины, проходя ее насквозь. Исследованию этих вопросов были посвящены работы [14–20]. В работах [14], а также [15–19] были получены результаты, дающие полное описание возникающей в общем случае ситуации, которое мы сейчас и приведем.

Пусть имеется произвольная 3-периодическая функция $\epsilon(\mathbf{p})$ с периодами, равными векторам обратной решетки, принимающая значения на отрезке $\epsilon_{\min} \leq \epsilon(\mathbf{p}) \leq \epsilon_{\max}$. Тогда (см. [16, 18]) для магнитного поля общего положения (т. е. когда плоскость $\Pi(\mathbf{V})$, перпендикулярная магнитному полю, не содержит векторов обратной решетки) незамкнутые траектории существуют либо на энергетических уровнях, принадлежащих некоторому связному энергетическому интервалу $\epsilon_1 \leq \epsilon(\mathbf{p}) \leq \epsilon_2$, где $\epsilon_1 > \epsilon_{\min}$, $\epsilon_2 < \epsilon_{\max}$, либо на единственном энергетическом уровне, соответствующем некоторому значению ϵ_0 (в частности, не может быть так, что ни на одном из уровней нет незамкнутых траекторий). При этом в первом случае все незамкнутые траектории лежат (в плоскостях, перпендикулярных \mathbf{V}) в прямых полосах конечной ширины, проходя их насквозь. Направление η этих полос одно и то же (на всех энергетических уровнях) для всех открытых орбит и задается пересечением плоскости $\Pi(\mathbf{V})$ с некоторой (априори неизвестной) целочисленной (т. е. порожденной двумя векторами обратной решетки) плоскостью Γ . Кроме того, около направления \mathbf{V} при этом имеется зона устойчивости, представляющая собой область конечной меры с кусочно-гладкой границей на единичной сфере S^2 , такая что для направлений \mathbf{V} (общего положения) из этой области наблюдается та же ситуация, при этом плоскость Γ остается неподвижной, хотя направление η , а также значения ϵ_1 , ϵ_2 и мера открытых траекторий на каждом уровне, вообще говоря, меняются. На границах зоны устойчивости (обозначим ее Ω) значения ϵ_1 и ϵ_2 совпадают, но открытые траектории тем не менее лежат в полосах конечной ширины, направление которых как

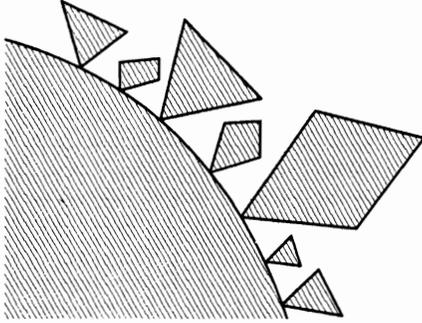


Рис. 1. Изображение границы зоны устойчивости с примыкающими к ней более мелкими зонами

и прежде задается пересечением $\Pi(\mathbf{V})$ с целочисленной плоскостью Γ .

Однако, вообще говоря, во втором случае, т. е. когда открытые траектории существуют на единственном энергетическом уровне, они могут и не лежать в полосе конечной ширины (направление магнитного поля при этом не лежит на границе ни одной из зон устойчивости), и, более того, для направлений поля \mathbf{V} иррациональности 3 ($\Pi(\mathbf{V})$ не содержит векторов обратной решетки) они в этом случае не имеют асимптотического направления и среднее значение проекции на $\Pi(\mathbf{V})$ групповой скорости $v_{gr}(\mathbf{p})$ на каждой из связанных компонент замыкания всех таких траекторий равно нулю.

Единичная сфера S^2 , параметризующая направления магнитного поля \mathbf{V} , может либо быть целиком одной зоной устойчивости, либо содержать бесконечное число таких зон, причем во втором случае две любые зоны устойчивости могут иметь не более одной общей граничной точки. Асимптотическое направление η открытых траекторий при таком направлении магнитного поля должно принадлежать при этом обоим целочисленным плоскостям Γ_1 и Γ_2 , относящимся к этим зонам, являясь, таким образом, их пересечением. Направление магнитного поля \mathbf{V} , являющееся общей граничной точкой двух зон устойчивости (Ω_1 и Ω_2), таким образом, всегда таково, что $\Pi(\mathbf{V})$ содержит целочисленный вектор $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Возникающая при этом общая картина довольно нетривиальна, а именно, на единичной сфере S^2 имеется бесконечно много зон с кусочно-гладкими границами, причем к границе каждой зоны примыкает в бесконечном числе точек бесконечное число более мелких зон ([19], см. рис. 1).

Объединение всех зон всюду плотно заполняет сферу S^2 , однако до сих пор неизвестно, равна ли их общая мера мере S^2 . Дополнение к объединению зон на сфере представляет собой нигде не плотное множество, мера которого пока не установлена. Для направлений \mathbf{V} общего положения, принадлежащих этому множеству, имеет место вторая из описанных выше ситуаций.

Описанная картина дает полное представление о поведении незамкнутых траекторий для направлений поля иррациональности 3. Укажем теперь дополнительные эффекты, возникающие в случаях, когда направление магнитного поля таково, что $\Pi(\mathbf{V})$ содержит векторы обратной решетки. Здесь возможны две различных ситуации, а именно:

- а) $\Pi(\mathbf{V})$ порождена двумя векторами обратной решетки (случай степени иррациональности 1);
- б) $\Pi(\mathbf{V})$ содержит один (с точностью до целочисленного множителя) вектор обратной решетки (случай степени иррациональности 2).

В случае (а) любая открытая траектория является периодической (независимо от

того, лежит ли направление \mathbf{B} в какой-либо из зон устойчивости или нет) и, таким образом, всегда лежит в полосе конечной ширины с некоторым целочисленным направлением η , проходя ее насквозь. Если при этом направление \mathbf{B} лежит внутри какой-то зоны устойчивости, то описанные ранее траектории «общего положения» сохраняются, однако могут появиться дополнительные открытые траектории, направленные вдоль целочисленных векторов, лежащих в $\Pi(\mathbf{B})$, и обладающие тем свойством, что каждая из них сохраняется при вариациях \mathbf{B} , перпендикулярных соответствующему ей целочисленному вектору η_α (так что $\Pi(\mathbf{B} + \delta\mathbf{B})$ содержит η_α), и исчезает при всех других вариациях направления \mathbf{B} (в то время как вклад траекторий общего положения сохраняется при любых малых вариациях направления поля).

Из топологического рассмотрения вытекает при этом, что направления η_α появляющихся «дополнительных» траекторий при этом также принадлежат соответствующей целочисленной плоскости Γ и, таким образом, если $\Pi(\mathbf{B})$ не совпадает с Γ , то направления η_α совпадают с направлением траекторий общего положения, являясь пересечением Γ и $\Pi(\mathbf{B})$. Как и траектории общего положения, «дополнительные» траектории занимают конечный фазовый объем, и их вклад в транспортные эффекты может быть выделен экспериментально в силу описанного выше поведения при вариациях \mathbf{B} . Если же, что представляет собой исключительный случай, $\Pi(\mathbf{B})$ совпадает с Γ (корректно определенной в целом для данной зоны устойчивости), то направления η_α могут задаваться любыми целочисленными векторами, лежащими в $\Pi(\mathbf{B})$. Если при этом таких направлений несколько (больше одного), то наблюдается исключительная ситуация, а именно: проводимость по всем трем осям при данном направлении магнитного поля остается конечной при $B \rightarrow \infty$ (это свойство разрушается при любых вариациях направления \mathbf{B}). Добавим также, что такая ситуация может наблюдаться в случае магнитного поля рационального направления, не лежащего ни в одной из зон устойчивости¹⁾.

В работе [14] (см. также [15]) было доказано утверждение, что для энергетического уровня общего положения для любого рационального направления \mathbf{B} существует такая его окрестность, что для направлений \mathbf{B} из этой окрестности все открытые траектории, расположенные на данном уровне (если они есть), лежат в полосе конечной ширины, проходя их насквозь.

В случае (б), если направление \mathbf{B} принадлежит одной из зон устойчивости, также могут возникать периодические открытые орбиты, совершенно идентичные описанным выше, направленные вдоль целочисленного вектора, содержащегося в $\Pi(\mathbf{B})$ и совпадающего с направлением траекторий общего положения; они обладают теми же свойствами, и ничего нового по сравнению со случаем (а) не возникает, за исключением того, что здесь $\Pi(\mathbf{B})$ уже не может совпадать с целочисленной плоскостью Γ . Вообще же в случае (б), если \mathbf{B} не принадлежит ни одной из зон устойчивости, открытые траектории могут и не лежать в прямой полосе конечной ширины [20]. В этом случае они также лежат на единственном энергетическом уровне. Мы отметим, однако, что в случае (б) у таких траекторий, тем не менее, всегда имеется асимптотическое направление (см. [18]), определяемое как

¹⁾ В работе [1] по вине второго автора была допущена ошибка, а именно, было сделано утверждение о том, что число описанных выше направлений η_α — конечно и не превосходит рода g рассматриваемой поверхности. Это утверждение верно лишь при фиксированном направлении \mathbf{B} , но для всевозможных направлений \mathbf{B} количество таких векторов в \mathcal{R}^3 может оказаться бесконечным. Эта неточность, однако, не затрагивает основных результатов работы [1].

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{\mathbf{p}(T) - \mathbf{p}(0)}{|\mathbf{p}(T) - \mathbf{p}(0)|},$$

где $\mathbf{p}(t)$ — радиус-вектор траектории в \mathbf{p} -пространстве.

Опишем теперь более подробно топологическую ситуацию в случае, когда \mathbf{B} принадлежит какой-нибудь зоне устойчивости. Функцию $\epsilon(\mathbf{p})$ можно считать заданной на трехмерном торе $\mathcal{B} = \mathcal{T}^3$ (в первой зоне Бриллюэна), получаемом факторизацией евклидова пространства $\mathcal{E} = \mathcal{R}^3$ по векторам обратной решетки. При этом интегральные траектории потока, порождаемого в пространстве квазимульсов наличием однородного магнитного поля $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$, задаются на каждом энергетическом уровне поверхностями уровня формы

$$\omega = B_1 dp_x + B_2 dp_y + B_3 dp_z,$$

ограниченной на этот уровень из трехмерного тора \mathcal{T}^3 . Для полей \mathbf{B} иррационального направления (направления иррациональности 3) замкнутым и открытым траекториям в \mathcal{T}^3 будут соответствовать соответственно замкнутые и открытые траектории в \mathcal{R}^3 , если же $\Pi(\mathbf{B})$ содержит векторы обратной решетки, то в \mathcal{R}^3 могут появляться периодические открытые траектории, которым соответствуют замкнутые в \mathcal{T}^3 . При фиксированном направлении магнитного поля удалим из каждого энергетического уровня в \mathcal{B} те его части, которые состоят из несингулярных замкнутых в \mathcal{E} траекторий. Границей полученного многообразия будут являться замкнутые в \mathcal{E} сингулярные орбиты, которые можно заклеить в \mathcal{B} дисками, лежащими в плоскости $\Pi(\mathbf{B})$. Существует нетривиальная топологическая теорема (см. [16, 17]), утверждающая, что для направлений \mathbf{B} , лежащих в зоне устойчивости или на ее границе, полученное многообразие является несвязным объединением непересекающихся двумерных торов в \mathcal{B} ; двумерные торы, лежащие на разных энергетических уровнях, также не пересекают друг друга.

При этом могут появляться два типа двумерных торов. Простейший есть «игла» или тор N -типа, ограничивающий область в \mathcal{B} и топологически гомологичный нулю в \mathcal{B} . Погружение такого тора в \mathcal{B} напоминает цилиндр или трубу и может быть непрерывно деформировано в замкнутую кривую в \mathcal{B} . В расширенной зоне \mathcal{E} накрытие такого тора представляет собой бесконечный периодически деформированный («гофрированный») цилиндр, определяющий некоторый вектор η_α обратной решетки. Продольные сечения этого цилиндра плоскостью $\Pi(\mathbf{B})$ дают открытые в \mathcal{E} траектории. Ясно, что торы такого типа могут возникать только в том случае, если $\Pi(\mathbf{B})$ содержит векторы обратной решетки, и исчезают при вариациях \mathbf{B} , нарушающих это свойство.

Другая возможность — «мембрана» или тор M -типа, который не гомологичен нулю в \mathcal{B} (т. е. не ограничивает в \mathcal{B} никакую область). В расширенной зоне Бриллюэна его накрытие представляет собой периодически деформированную целочисленную плоскость («гофрированную плоскость»), пересечение с которой плоскости $\Pi(\mathbf{B})$ дает описанные выше открытые траектории «общего положения». Все такие плоскости, отвечающие всем торам M -типа, параллельны в \mathcal{E} , так как они не пересекают друг друга, и их общий гомологический класс и есть описанная ранее целочисленная плоскость $\Gamma(\mathbf{B}_0)$. Замыкание открытой траектории, лежащей на одном из торов M -типа в \mathcal{B} покрывает этот тор, кроме первоначальных отверстий, с числом вращения $\alpha(\mathbf{B})$. Таким образом, такую траекторию можно рассматривать как квазипериодическую, и, следовательно, для направлений \mathbf{B} , лежащих в зоне устойчивости, любая открытая траектория является либо периодической, либо квазипериодической. Количество торов M -типа на данном энергетическом уровне четно, так что их суммарный гомологический класс

равен нулю, и они (для внутренних точек зоны) локально устойчивы при вариациях направления поля \mathbf{B} .

Описанная выше топологическая картина позволяет легко произвести исследование общих свойств решений уравнения (1) в пределе сильных однородных магнитных полей \mathbf{B} (с направлением, лежащим в зоне устойчивости). Действительно, в пределе сильных полей, удовлетворяющих указанному ранее условию $\omega_B \gg \tau^{-1}$, эволюция одночастичной функции распределения будет в главном порядке по B определяться движением электронов по описанным выше квазиклассическим траекториям (заметим, что поток, порождаемый магнитным полем в пространстве квазипульсов, сохраняет элемент объема d^3p). При этом при измерении величин, усредненных по некоторому интервалу времени T (будем обозначать их посредством $\langle \dots \rangle_T$), с точностью до малых в пределе сильных полей поправок $\sim 1/\omega_B T$, мы будем получать значения, вычисленные с помощью функции распределения, усредненной (по времени) на каждой из траекторий, т. е. функции распределения, постоянной на траекториях (в случае, когда траектория образует иррациональную обмотку тора с отверстиями, это означает постоянство на этом торе). При этом проекция на плоскость $\Pi(\mathbf{B})$ среднего значения $\langle \mathbf{v}_{gr} \rangle$ групповой скорости $\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p})$ по времени, как легко видеть из (3), равна нулю на замкнутых траекториях и отлична от нуля на открытых траекториях, лежащих в прямых полосах конечной ширины и проходящих их насквозь. Во втором случае значение $\langle \mathbf{v}_{gr} \rangle$ перпендикулярно направлению траектории (хотя, вообще говоря, $\langle \mathbf{v}_{gr} \rangle$ не лежит в плоскости, перпендикулярной \mathbf{B}). Проекция на $\Pi(\mathbf{B})$ среднего значения скорости на траекториях, не лежащих в полосе конечной ширины, но имеющих асимптотическое направление η (что возможно для направлений \mathbf{B} иррациональности 2, не лежащих ни в одной из зон устойчивости), также отлична от нуля и перпендикулярна η . Проекция на $\Pi(\mathbf{B})$ значения скорости, усредненного по любой связанной компоненте замыкания траекторий, не имеющих асимптотического направления (при направлениях \mathbf{B} иррациональности 3, не лежащих ни в одной из зон устойчивости), как следует из топологического рассмотрения, всегда равна нулю.

Таким образом, нетрудно видеть, что каждый из описанных выше торов с отверстиями (для \mathbf{B} из зон устойчивости) дает в случае функций распределения, постоянных на траекториях, ненулевой вклад в значение перпендикулярной к \mathbf{B} составляющей тока $\mathbf{j}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ электронов. При этом всегда $\mathbf{j}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \perp \eta$, что позволяет измерить асимптотическое направление траекторий экспериментально как векторное произведение $[\mathbf{j}\mathbf{B}]$. Заметим, что для функций распределения, постоянных на каждом энергетическом уровне, как, например, в случае теплового равновесия в отсутствие силы $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$ (см. (2)), суммарный вклад в $\mathbf{j}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ всех таких торов в любом энергетическом интервале $(\epsilon, \epsilon + d\epsilon)$ равен нулю, что является следствием гомологичности нулю в \mathcal{S}^3 каждого из энергетических уровней (нетрудно получить, что среднее от компонент групповой скорости $\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p}) = \nabla \epsilon(\mathbf{p})$ по области $\epsilon \leq \epsilon(\mathbf{p}) \leq \epsilon + d\epsilon$ ($d\epsilon$ мало) сводится в этом случае, с точностью до множителя, к значениям базисных 2-форм в двумерных кохомологиях тора \mathcal{S}^3 ($dp_y \wedge dp_z, dp_z \wedge dp_x, dp_x \wedge dp_y$) на поверхности уровня $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon$). Так, например, если в отсутствие внешней силы $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$, $f_0(\mathbf{p})$ — фермиевское распределение электронов в металле, и мы ищем стационарные распределения, устанавливающиеся при наложении слабого однородного электрического поля \mathbf{E} (см. [2–4]), то можно говорить об отклике системы на внешнее воздействие в линейном приближении, т. е. о тензоре проводимости. В этом случае при включении электрического поля на половине торов на каждом энергетическом уровне частицы начинают приобретать энергию ($\langle \mathbf{v}_{gr} \rangle \mathbf{E} > 0$) и уходить

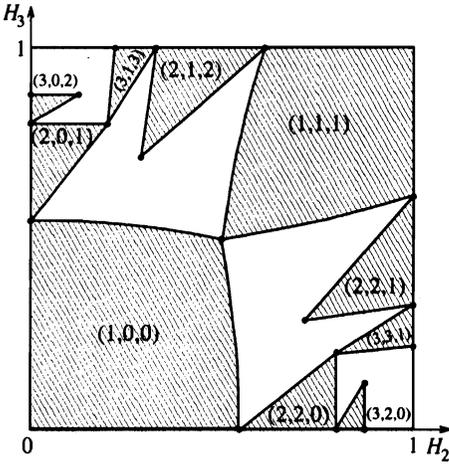


Рис. 2. Наиболее крупные зоны для поверхности $\cos 2\pi x_1 + \cos 2\pi x_2 + \cos 2\pi x_3 = 0$, полученные с помощью численных методов. В скобках указаны коэффициенты, задающие целочисленную плоскость Γ

на более высокие уровни, а на их место приходят частицы с более заполненных нижних уровней, в то время как на второй половине торов ($\langle \mathbf{v}_{gr} \mathbf{E} \rangle < 0$) частицы теряют энергию и на их место приходят частицы с менее заполненных высокоэнергетических уровней. В результате образуется новое статистическое распределение с большей концентрацией частиц на первых торах и меньшей на вторых, в котором описанный выше процесс компенсируется ненулевым интегралом столкновений. Равновесное значение тока \mathbf{j} характеризует отклик на внешнее поле, причем в нулевом приближении по $1/B$ при $B \rightarrow \infty$, в котором функция распределения постоянна на траекториях, всегда $\mathbf{j} \perp \boldsymbol{\eta}$, и отклик отсутствует, если $\mathbf{E} \parallel \boldsymbol{\eta}$ ($\langle \mathbf{v}_{gr} \mathbf{E} \rangle \equiv 0$).

Подробному рассмотрению ситуации, возникающей при исследовании электропроводности в металлах исходя из описанной выше топологической картины, была посвящена работа [1]. Мы здесь отметим лишь, что при исследовании проводимости в металлах играют роль лишь энергетические уровни вблизи уровня Ферми, и, таким образом, мы можем наблюдать лишь вклад в транспортные эффекты траекторий, лежащих вблизи ферми-поверхности. В частности, обнаружить экспериментально можно лишь те зоны устойчивости, вернее те их области, у которых энергетические интервалы $[\epsilon_1(\mathbf{B}), \epsilon_2(\mathbf{B})]$ (внутри которых имеются открытые траектории при данном направлении \mathbf{B}) содержат значение энергии Ферми ϵ_F . Наблюдаемые при этом зоны (вместе с соответствующими им целочисленными плоскостями Γ) являются топологическими характеристиками ферми-поверхности, а не дисперсионного закона в целом; их границы, вообще говоря, не совпадают с границами зон устойчивости для дисперсионного закона (поскольку вблизи границы зоны устойчивости ϵ_F может «выпасть» из интервала $[\epsilon_1(\mathbf{B}), \epsilon_2(\mathbf{B})]$), и они, вообще говоря, не образуют всюду плотного множества на единичной сфере S^2 , в остальном ситуация описывается рассмотренной выше топологической картиной. На рис. 2 показана часть единичной сферы с наиболее крупными зонами для поверхности

$$\cos 2\pi x_1 + \cos 2\pi x_2 + \cos 2\pi x_3 = 0,$$

полученными с помощью численных методов.

Для исследования топологических характеристик дисперсионного закона в целом необходимо, таким образом, создание в пределах одной зоны более общих, вообще говоря, термодинамически неравновесных, распределений электронов по квазиимпульсам. При этом исследование может проводиться, например, в полупроводниках, где

в пустую зону может быть поставлено некоторое количество электронов (или изъято из заполненной зоны с образованием дырок), имеющих определенное распределение по квазиимпульсам. Измерение определенных выше величин типа $(\mathbf{j}(\mathbf{x}))_T$ в пределе $B \rightarrow \infty$ позволит при этом установить описанные выше характеристики спектра, а именно:

1) зоны устойчивости Ω_α с кусочно-гладкими границами и соответствующие им целочисленные плоскости Γ_α ;

2) целочисленные направления η_α , вдоль которых могут возникать описанные ранее «дополнительные» траектории, лежащие в полосе с направлением η_α и проходящие ее насквозь.

Если при этом имеется возможность создания распределений, занимающих узкие энергетические интервалы $(\epsilon, \epsilon + d\epsilon)$, где $d\epsilon$ — мало, то для крупных зон устойчивости, для которых разность $\epsilon_2(\mathbf{B}) - \epsilon_1(\mathbf{B})$ в среднем по порядку величины много больше $d\epsilon$, в пределах этой точности можно определить также функции $\epsilon_1(\mathbf{B})$ и $\epsilon_2(\mathbf{B})$, определяющие при заданном направлении магнитного поля энергетический интервал, в котором имеются открытые траектории.

В заключение авторы благодарят С. П. Новикова за постановку задачи и внимание к работе.

Первый автор (И. А. Д.) благодарит Российский фонд фундаментальных исследований за материальную поддержку (проект 96-01-0104). Второй автор (А. Я. М.) благодарит за материальную поддержку Российский фонд фундаментальных исследований (проект 96-01-01623) и KFA Forschungszentrum Jülich GmbH.

Литература

1. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, Письма в ЖЭТФ 63, 809 (1996).
2. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, ЖЭТФ 31, 63 (1956).
3. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 35, 1251 (1958).
4. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 38, 188 (1960).
5. Н. Е. Алексеевский, Ю. П. Гайдуков, ЖЭТФ 35, 554 (1958).
6. Н. Е. Алексеевский, Ю. П. Гайдуков, ЖЭТФ 36, 447 (1959).
7. Н. Е. Алексеевский, Ю. П. Гайдуков, ЖЭТФ 37, 672 (1959).
8. Ю. П. Гайдуков, ЖЭТФ 37, 1281 (1959).
9. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
10. С. П. Новиков, Успехи мат. наук 37, 3 (1982).
11. С. П. Новиков, Труды МИАН 166, 201 (1984).
12. S. P. Novikov, in *Proc. Conf. «Topological Methods in Mathematics»*, dedicated to the 60th birthday of J. Milnor, June 15–22 (1991), S. U. N. Y. Stony Brook, 1993.
13. S. P. Novikov, in *Proc. Conf. of Geometry*, December 15–26 (1993), Tel Aviv University (1995).
14. А. В. Зорич, Успехи мат. наук 39, 235 (1984).
15. И. А. Дынников, Успехи мат. наук 47, 161 (1992).
16. И. А. Дынников, Успехи мат. наук 48, 179 (1993).
17. И. А. Дынников, Мат. заметки 53, 57 (1993).
18. I. A. Dynnikov, submitted to *Advances in Soviet Math.* (1997).
19. I. A. Dynnikov, *Surfaces in 3-Torus: Geometry of plane sections*, Proc. of ECM2, BuDA (1996).
20. С. П. Царев, Частное сообщение (1992–93).