

КИНЕТИКА ЛАВИННОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ГРАНУЛИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ

*С. Н. Дороговцев**

*Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук
194021, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 17 сентября 1996 г.

Решена задача о лавинном перемешивании двух фракций гранулированного материала. Фракции перемешиваются в цилиндре, медленно вращающемся вокруг своей продольной оси, расположенной горизонтально. Цилиндр заполнен не полностью, и в каждый момент времени перемешивание происходит лишь в поверхностном слое гранул. Показано, что в зависимости от соотношения между объемами фракций и объемом пустого пространства перемешивание может происходить медленно — за большое число оборотов — в режиме диффузии с конвекцией или быстро — уже при повороте цилиндра на небольшой угол. Процесс перемешивания описан аналитически в рамках чисто геометрического подхода и в ряде ситуаций может быть сведен к последовательности дискретных отображений. Найдены характерные времена перемешивания, в том числе времена, через которые в областях, прилегающих к поверхности цилиндра, не останется той или иной чистой фракции. Построены их зависимости от степени заполнения цилиндра и соотношения между объемами фракций.

1. ВВЕДЕНИЕ

Новый всплеск интереса к задачам, связанным с пересыпанием и перемешиванием гранулированных материалов во вращающемся цилиндре [1–11], начался после появления пионерских работ по самоорганизованной критичности [12–14]. Задачи эти также связаны с интенсивно изучаемой проблемой рассыпания кучи песка. Из-за сложности рассматриваемых систем подавляющая часть появляющихся работ по данной тематике относится к экспериментальным исследованиям и трудоемкому компьютерному моделированию. Вообще, физика процесса перемешивания оказалась весьма нетривиальной, а возникающие в эксперименте картины часто выглядят столь эффектно, что иллюстрация к работе [10] попала на обложку мартовского (1995) номера Nature. По сути дела, именно этой иллюстрацией и инициирована настоящая публикация.

О каких же, собственно, системах пойдет речь? Во вращающийся вокруг своей продольной оси, расположенной горизонтально, цилиндр засыпан гранулированный материал. Цилиндр находится в поле тяготения и заполнен не до конца, так что сверху остается свободное пространство (см. рис. 1а). Вопросы о том, как будет пересыпаться материал, как будут перемещаться гранулы, перемешиваться разные фракции материала, если таковые имеются, действительно очень сложны и в случае непосредственного компьютерного моделирования требуют тысяч часов счета на больших машинах (см., например, [2]). В самом деле, задача трехмерная, гранулы могут перемещаться и вдоль

*e-mail: sn@dor.ioffe.rssi.ru

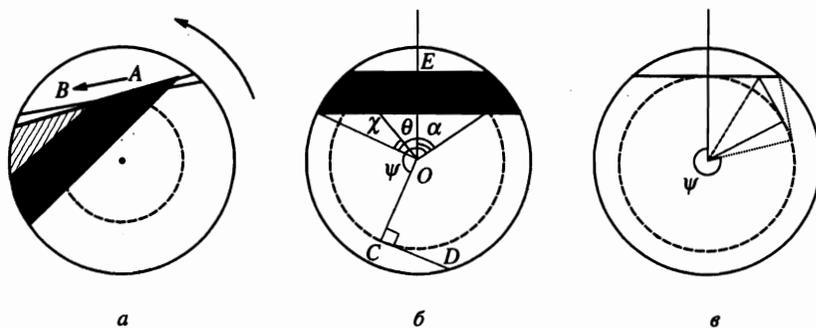


Рис. 1. *а* — Схема лавинного перемешивания. При бесконечно малом повороте барабана гранулы разных фракций из сектора *A*, перемешиваясь, пересыпаются в сектор *B*. Свободная поверхность гранулированного материала располагается под углом трения к горизонтали. Защирихована область с перемешанным материалом. Здесь и далее на рисунках разные степени перемешивания не показаны. *б* — Расположение фракций до начала вращения цилиндра. Положение касательной *CD* фиксируется углом ψ . *в* — Одна из касательных пересекает свободную поверхность материала. $2\pi - 2\theta < \psi < 2\pi$. Случай более чем половинного заполнения

продольной оси цилиндра, форма поверхности не обязательно является плоской, ответы зависят от скорости вращения цилиндра, от характеристик гранул и т. д.

Эксперимент [10] замечателен тем, что предложенная в нем система позволяет выделить сущность процесса перемешивания во вращающемся цилиндре. Более того, как мы покажем ниже, природу перемешивания в этой системе удастся объяснить аналитически [11], не прибегая к какой-либо микроскопике и используя, по сути дела, чисто геометрический подход! На введенной в [10] конфигурации мы и будем основывать дальнейшее рассмотрение.

Цилиндр (или барабан) у нас будет плоский, так что это, скорее, диск, и вопроса о перемещениях гранул вдоль продольной оси цилиндра здесь не существует. Цилиндр вращается адиабатически медленно, и свободная поверхность гранулированного материала, как и в эксперименте [10], плоская и все время находится под углом трения к горизонтали. (В реальном эксперименте угол наклона поверхности слегка флуктуирует с течением времени, но, оказывается, эти вариации невелики [10], и мы ими пренебрежем.) Для определенности будем считать, что направление вращения цилиндра — против часовой стрелки (см. рис. 1*а*).

Будем считать, что пока гранулы находятся внутри объема материала, они не могут ни перемещаться друг относительно друга, ни проскальзывать относительно стенок цилиндра. Пересыпаться они могут, только когда выходят на свободную поверхность материала. Перемешивание разных фракций материала, таким образом, происходит в непрерывно сходящихся по свободной поверхности лавинах. Поэтому такое перемешивание и было названо лавинным (avalanche mixing) [10], хотя точнее его было бы называть перемешиванием в лавинах. Поскольку гранулы пересыпаются лишь на свободной поверхности, во внутреннем круге радиуса равного нормали, опущенной из центра на свободную поверхность (радиус-вектор *OE* на рис. 1*б*), материал вращается вместе с цилиндром как целое, не перемешиваясь. Таким образом, нам надо будет исследовать только процессы, происходящие в материале во внешнем кольце, примыкающем к стенкам цилиндра. При менее чем половинном заполнении барабана материал, конечно,

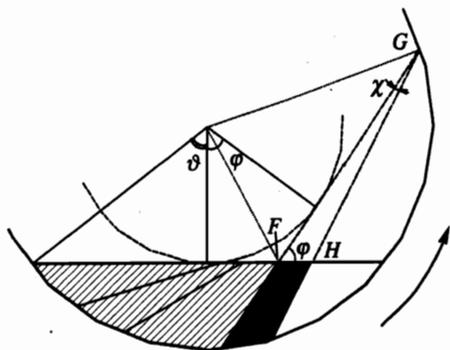


Рис. 2. Один из моментов перемешивания $\chi < t < 2\vartheta - \chi$ ($\vartheta \equiv \pi - \theta$) при менее чем половинном заполнении цилиндра

перемешивается весь.

Будем считать, что гранулы малы, и можно ввести понятие концентрации той или иной фракции в данной точке барабана. Гранулы разных фракций будут различаться между собой только цветом. Состояние каждой из точек материала будем описывать величиной ρ — концентрацией (долей) черного материала в данном месте (там, где весь материал черный, $\rho = 1$, где — белый, $\rho = 0$). Таким образом, нам придется исследовать величину $\rho(x, t)$ — концентрацию черной фракции в точке x в момент t .

Пусть в начальный момент времени внизу белая фракция, вверху — черная. Далее будет удобно ввести обозначения, представленные на рис. 1б. Долю незаполненного пространства в барабане и объем черной фракции будем характеризовать углами θ и χ соответственно. Не будем здесь приводить тривиальные формулы, связывающие объемы фракций и эти углы. Ниже нам также придется использовать угол α , смысл которого ясен из рис. 1б. Нетрудно убедиться, что он равен

$$\alpha = \arccos [\cos(\theta + \chi) / \cos \theta]. \quad (1)$$

Если $\chi \operatorname{tg} \theta \ll 1$, то легко проверить, что $\alpha \cong \sqrt{2\chi \operatorname{tg} \theta}$. Очевидно также, что $\alpha = \pi$ при $2\theta + \chi = \pi$, т. е. если белая фракция занимает такой же объем, что и свободное пространство.

С какой скоростью должен вращаться цилиндр, чтобы выполнялось условие адиабатичности? Пусть T_0 — период вращения цилиндра, а δ — угол трения, под которым расположена свободная поверхность гранулированного материала. Мы требуем, чтобы угол ε , на который успеет повернуться медленно вращающийся цилиндр, пока гранула скатывается с одного края свободной поверхности на другой, был много меньше угла трения δ . Это и есть условие адиабатичности в нашем случае. Пусть t_δ — время, за которое гранула скатывается с одного края свободной поверхности на другой. Тогда

$$\varepsilon = 2\pi t_\delta / T_0 \ll \delta. \quad (2)$$

Самые элементарные оценки дают

$$t_\delta \simeq 2\sqrt{\frac{R \sin \theta}{g \sin \delta}}. \quad (3)$$

Здесь R — радиус цилиндра, g — ускорение свободного падения. В итоге получается следующее условие для периода вращения цилиндра:

$$T_0 \gg 4\pi \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{R \sin \theta}{g \sin \delta}}. \quad (4)$$

(Обычно вместо (4) используют соотношение $T_0 \gg \sqrt{R/g}$, приводя в качестве обоснования соображения размерности [10].)

При условии (4) в наши ответы не будет входить скорость вращения барабана, и поэтому в дальнейшем под временем мы понимаем просто угол поворота барабана — измеряем «время» в углах. Ответ не зависит и от радиуса цилиндра, и мы положим его равным единице. Наконец, в наши ответы не войдет значение угла трения, поэтому во всех приведенных ниже схемах перемешивания, кроме рис. 1а, мы его для удобства положим равным нулю — свободная поверхность будет изображаться горизонтальной линией.

Теперь перейдем к одному из ключевых мест. Нам придется сделать сильное предположение, которое, собственно, и позволяет решить задачу, обойдясь без какого-либо микроскопического рассмотрения. Это предположение дает возможность превратить нашу модель по сути дела в задачу на окружности и свести проблему к чисто геометрической [11]. Итак, будем считать, что в лавинах материал перемешивается полностью, то есть до однородного состояния (см. рис. 1а: если выполняется сделанное предположение, материал полностью перемешивается, пересыпаясь из сектора A в сектор B). Представляется естественным выбрать такое предположение в качестве начального приближения, если не вникать в тонкости, связанные со структурой гранул (их слипанием, зацеплением и т. п.). Тогда при вращении цилиндра во всех точках левой половины свободной поверхности материала концентрация черного материала ρ одинакова. Поэтому уже после первого оборота (конечно, при более чем половинном заполнении цилиндра) мы можем для всего объема материала во внешнем кольце ввести $\rho(\psi, t)$ — плотность черной фракции в момент времени t в точках касательной типа обозначенной CD на рис. 1б (ψ — угол между соответствующим радиусом-вектором и нормалью к свободной поверхности) — основную величину, с которой будем иметь дело в дальнейшем. Если же цилиндр заполнен менее чем наполовину, $\rho(\psi, t)$ исчерпывающим образом описывает состояние системы уже при $t > 2(\pi - \theta)$.

Отметим в качестве обоснования, что компьютерное моделирование [10], в котором использовалось такое же предположение, на удивление хорошо описало реальный эксперимент.

Мы опишем эволюцию величины $\rho(\psi)$ в разд. 2 и 3. Будут выделены два режима перемешивания: медленное перемешивание при более чем половинном заполнении барабана (разд. 2) и быстрое перемешивание — при менее чем половинном заполнении (разд. 3). В первом случае найдем дискретное линейное отображение (9), которое описывает преобразование $\rho(\psi)$ после каждого нового оборота барабана. (На наш взгляд, отображение (9) — главный результат настоящей работы.) Особенно просто выглядит ответ при почти полностью заполненном цилиндре. Если перейти в систему координат, связанную с вращающимся цилиндром, то эволюция распределения $\rho(\psi)$ выглядит как диффузия с конвекцией на круге: черная фракция постепенно размывается в белой, причем максимум $\rho(\psi)$ дрейфует в направлении вращения барабана. Скорость дрейфа при этом — величина порядка θ (напомним, что время у нас измеряется в углах и безразмерно), а характерное время перемешивания — величина порядка θ^{-2} .

При менее чем половинном заполнении барабана материал перемешивается уже за время порядка $2(\pi - \theta)$. Исчерпывающее описание перемешивания здесь дают линейные

интегральные уравнения (15) и (16) для $\rho(\psi = 0, t)$. Эти уравнения удастся решить аналитически. Мы увидим, что на полученной зависимости $\rho(\psi = 0, t)$ имеются быстро затухающие осцилляции, подобные тем, что наблюдались в эксперименте [10].

Ситуация половинного заполнения ($\theta = \pi/2$) является уникальной. В этом случае, как мы увидим, полное перемешивание вообще не происходит, несмотря на то что по мере выхода на свободную поверхность пересыпается весь материал. Система быстро переходит в состояние, в котором картины распределения фракций периодически меняются во времени. Соответствующий период вдвое меньше периода обращения цилиндра. Часть черной фракции при этом остается в чистом виде, а вот чистая белая фракция исчезает.

Мы найдем еще два характерных времени рассматриваемой системы (см. разд. 4). Оказывается, для аналитического вычисления этих времен достаточно использовать предположение, существенно ослабленное по сравнению с использованным выше. Речь идет об ответах на следующие вопросы. 1) Через какое время T_w впервые станет $\rho > 0$ всюду, кроме разве что центральной области в случае $\theta < \pi/2$, т.е. когда впервые окажется «запачканным» максимально возможный объем белого материала? Или когда во внешнем кольце не останется белого материала? 2) Через какое время T_b впервые станет $\rho < 1$ всюду, кроме разве что центральной области в случае $\theta < \pi/2$, т.е. когда впервые окажется «запачканным» максимально возможный объем черного материала? Или когда во внешнем кольце не останется черного материала?

Чтобы аналитически найти T_w и T_b , нам придется ввести лишь следующее требование. Потребуем, чтобы после пересыпания гранул по свободной поверхности в каждой из точек ее левой половины материал оказался бы в смешанном состоянии, если на правой половине есть гранулы обоих сортов (см. рис. 1а). Степень перемешивания в разных точках левой половины свободной поверхности, в отличие от ранее введенного предположения, теперь может быть произвольной. Теперь после первого же оборота барабана (если, к примеру, $\theta < \pi/2$) для каждой отдельной касательной типа CD , показанной на рис. 1б, имеются всего три возможности: материал во всех точках касательной или черный, или белый, или в смешанном состоянии. Изучив эволюцию состояния всех таких касательных, мы и найдем T_w и T_b . Таким образом, мы снова свели нашу задачу к проблеме на окружности.

В разд. 4 мы построим зависимости $T_w(\theta)$ и $T_b(\theta)$, на каждой из которых обнаружится последовательность неаналитичностей — разрывов (см. выражения (32) и (35)).

2. ДИНАМИКА ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В СЛУЧАЕ БОЛЕЕ ЧЕМ ПОЛОВИННОГО ЗАПОЛНЕНИЯ ЦИЛИНДРА

Опишем кинетику лавинного перемешивания в случае, когда цилиндр заполнен более чем наполовину: $\theta < \pi/2$. Как мы уже показали, сформулированное выше предположение о полном перемешивании в лавинах позволяет после первого же оборота описать состояние системы распределением $\rho(\psi, t)$. Тогда полное количество черной фракции вне круга радиусом $1 \cdot \cos \theta$ будет

$$M = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r(\psi)} dr r \rho(\psi, t) =$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{2} \int_0^{2\pi-2\theta} d\psi \rho(\psi, t) + \frac{\cos^2 \theta}{2} \int_{2\pi-2\theta}^{2\pi} d\psi \rho(\psi, t) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{2\pi - \psi}{2} \right). \quad (5)$$

(Разумеется, M не меняется со временем.) Здесь коэффициент перед первым интегралом появился из-за интегрирования вдоль касательной

$$\int_0^{\sin \theta} dr r$$

в области углов ψ радиуса-вектора в интервале $(0, 2\pi - 2\theta)$. Когда же эти углы оказываются между $2\pi - 2\theta$ и 2π , касательная обрезается свободной поверхностью (см. рис. 1б), ее длина $r(\psi)$ становится равной, как легко убедиться, $\cos \theta \operatorname{tg}[(2\pi - \psi)/2]$, и мы получаем второй интеграл из (5).

Так как перемешивание происходит только на свободной поверхности и гранулы во внутреннем объеме материала вращаются вместе с барабаном, то при $0 \leq \varphi < 2\pi$ и $t \geq \varphi$ имеем

$$\rho(\varphi, t) = \rho(0, t - \varphi). \quad (6)$$

После подстановки этого соотношения в (5) и замены переменных $\epsilon = t - \psi$ получим

$$\frac{2M}{\sin^2 \theta} = \int_{t-2\pi+2\theta}^t d\epsilon \rho(0, \epsilon) + \operatorname{ctg}^2 \theta \int_{t-2\pi}^{t-2\pi+2\theta} d\epsilon \rho(0, \epsilon) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{2\pi + \epsilon - t}{2} \right). \quad (7)$$

Продифференцируем обе части (7) по времени и используем постоянство M . Тогда

$$0 = \rho(0, t) - \rho(0, t - 2\pi + 2\theta) + \operatorname{ctg}^2 \theta \left\{ \rho(0, t - 2\pi + 2\theta) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{2\theta}{2} \right) - \int_{t-2\pi}^{t-2\pi+2\theta} d\epsilon \rho(0, \epsilon) \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi + \epsilon - t}{2} \right) \cos^{-2} \left(\frac{2\pi + \epsilon - t}{2} \right) \right\}. \quad (8)$$

После сокращения второго и третьего членов в правой части (7) получим уравнение, которое показывает, как $\rho(\varphi)$ преобразуется за оборот:

$$\rho(\varphi, t + 2\pi) = \operatorname{ctg}^2 \theta \int_0^{2\theta} d\zeta \rho(\varphi - \zeta, t) \frac{\sin(\zeta/2)}{\cos^3(\zeta/2)} \quad (9)$$

— дискретное линейное отображение. В качестве начального условия для (9) выберем, например, распределение $\rho(\varphi, t = 2\pi)$, получающееся после первого оборота барабана. (При произвольном χ описывать состояния системы с помощью распределения $\rho(\varphi, t)$ вообще имеет смысл лишь при $t \geq 2\pi - 2\theta - \chi$!) Нахождение распределения $\rho(\varphi, t = 2\pi)$ по заданному $\rho(\varphi, t = 0)$ (см. рис. 1б) — совсем нетрудная задача. (Нам, однако, не придется ею заниматься, поскольку ниже мы ограничимся рассмотрением частного случая малого количества черной фракции $\chi \rightarrow 0$, для которого $\rho(\varphi)$ можно уже задать в начальный момент времени $t = 0$.)

Дискретное линейное отображение (9) вместе с таким начальным условием полностью описывает процесс лавинного перемешивания при более чем половинном заполнении барабана. В принципе, (9) и есть главный результат работы.

Самое простое описание процесса перемешивания удастся дать в случае почти полностью заполненного цилиндра, т. е. для $\theta \ll \pi/2$. При этом можно разложить правую часть по θ , и введя для удобства «дискретное» время $\tilde{t} \equiv 2\pi[t/(2\pi)]$ (мы описываем медленное изменение $\rho(\varphi)$, наблюдая это распределение в моменты времени, отделенные друг от друга целыми периодами), получим следующее уравнение:

$$2\pi \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{t}} = -\frac{4}{3}\theta \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \theta^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2}. \quad (10)$$

(С тем же успехом мы могли бы перейти во вращающуюся вместе с цилиндром систему координат.) Чтобы получить (10), мы разложили подынтегральное выражение в (9) в ряд по ζ . Уравнение это справедливо при $\tilde{t} \gg 2\pi$. Таким образом, в рассматриваемом режиме лавинное перемешивание сводится к процессу диффузии с конвекцией на окружности $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Если для простоты положить, что черного материала мало ($\chi \ll \theta$), то сначала весь он будет сосредоточен на малых углах. Рассмотрение этого предельного случая позволяет продемонстрировать принципиальные особенности кинетики перемешивания при $\theta \ll \pi/2$. В качестве начального условия можно принять: $\rho(\varphi, 0) = 4\chi\delta(\varphi)$. Действительно, интеграл

$$\int_0^{\sin \theta} dr r \int d\varphi 4\chi\delta(\varphi) \cong 2\chi\theta^2$$

дает правильное полное количество черной фракции в области внешнего кольца (при $\chi \ll \theta \ll \pi/2$ оно равно произведению длины свободной поверхности 2θ на толщину слоя черной фракции в начальный момент $\chi\theta$, см. рис. 1б). Тогда получим решение (10) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho(\varphi, \tilde{t}) &= 4\chi \left\{ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n^2 \frac{\theta^2}{2\pi} \tilde{t}\right) \cos \left[n \left(\varphi - \frac{2}{3\pi} \theta \tilde{t} \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{4\chi}{2\pi} \theta_0 \left(\frac{\varphi - 2\theta\tilde{t}/3\pi}{2\pi}, \frac{\theta^2}{2\pi^3} \tilde{t} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где θ_0 — этта-функция [15]. В области больших времен $\tilde{t} \gg \pi^3/\theta^2$ происходит экспоненциальная релаксация с характерным временем $t_e = 2\pi/\theta^2$ к однородному распределению $\rho_\infty = 2\chi\theta^2/\pi\theta^2 = 2\chi/\pi$. (Здесь $2\pi [1 - (1 - \theta^2/2)] \cong \pi\theta^2$ — количество материала во внешнем кольце при $\chi \ll \theta \ll \pi/2$.) На меньших же временах получаем

$$\rho(\varphi, \tilde{t}) = \frac{4\chi}{\theta\sqrt{2\tilde{t}}} \exp \left\{ -\frac{\pi}{2\theta^2\tilde{t}} \left(\varphi - \frac{2\theta\tilde{t}}{3\pi} \right)^2 \right\} \quad (12)$$

— стандартный ответ для линейной диффузии с конвекцией на бесконечном интервале, где центр распределения дрейфует со скоростью $2\theta/3\pi$ (напомним, что время у нас измеряется в радианах).

Сделаем еще одно замечание. Положение отдельной гранулы во внешнем кольце можно описывать координатами (r, φ) — линейной координатой на касательной типа CD на рис. 1а и соответствующим углом. Тогда гранула, скатываясь по свободной поверхности, изменяет свой «угол» на 2θ . Средняя скорость изменения этого угла, таким образом, равна $2\theta/2\pi$. Скорость дрейфа максимума распределения, полученная выше, близка к этой величине.

3. ПРОЦЕСС ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ПРИ МЕНЕЕ ЧЕМ ПОЛОВИННОМ ЗАПОЛНЕНИИ ЦИЛИНДРА

Обсудим теперь случай $\pi/2 < \theta < \pi$ — цилиндр заполнен менее чем наполовину (рис. 2), перемешивание происходит уже во всем объеме и намного быстрее, чем в случае, рассмотренном в разд. 2. Снова используем предположение о полном перемешивании в лавинах (см. разд. 1), так что при $t > 2(\pi - \theta)$ вдоль всех касательных, показанных на рис. 2, $\rho = \text{const}$. Теперь, в отличие от рассмотренного выше случая, все эти касательные пересекают свободную поверхность. Поэтому нам удобно использовать для описания развития процесса перемешивания во времени величину $\rho(0, t)$ — долю черного материала в точках касательной, которая в момент времени t совпадает со свободной поверхностью. Обозначим $\vartheta \equiv \pi - \theta$ (см. рис. 2).

Сначала найдем, как преобразуется $\rho(0, t)$ в ситуации, когда состояние любой точки материала исчерпывающим образом описывает $\rho(\zeta, t)$ (угол ζ характеризует положение соответствующей касательной, см. рис. 2), т. е. когда $t > 2\vartheta - \chi$. В этом случае полное количество черной фракции в барабане есть

$$M = \int_0^{2\vartheta} d\zeta \int_{r(\zeta)}^{\sin \vartheta} dr r \rho(\zeta, t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\vartheta} d\zeta \rho(\zeta, t) \left(\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta \operatorname{tg}^2 \frac{\zeta}{2} \right), \quad (13)$$

где $\sin \vartheta$ — полная длина касательной (от точки касания до пересечения с поверхностью барабана), $r(\zeta) = \cos \vartheta \operatorname{tg}(\zeta/2)$ — расстояние между точкой касания и точкой пересечения со свободной поверхностью для касательной, характеризующейся углом ζ ($\cos \vartheta$ — длина нормали, опущенной из центра барабана на свободную поверхность, см. рис. 2). Воспользовавшись уравнением (6) и сделав замену переменной $\epsilon = t - \zeta$, перепишем соотношение (13) в виде

$$\frac{2M}{\sin^2 \vartheta} = - \int_t^{t-2\vartheta} d\epsilon \rho(0, \epsilon) \left[1 - \operatorname{ctg}^2 \vartheta \operatorname{tg}^2 \left(\frac{t - \epsilon}{2} \right) \right] \quad (14)$$

и продифференцируем по t . С учетом постоянства M получим уравнение для $\rho(0, t)$ при $t > 2\vartheta - \chi$:

$$\rho(0, t) = \operatorname{ctg}^2 \vartheta \int_0^{2\vartheta} d\zeta \rho(0, t - \zeta) \frac{\sin(\zeta/2)}{\cos^3(\zeta/2)}. \quad (15)$$

Очевидно, что при $0 \leq t \leq \chi$ имеем $\rho(0, t) = 1$. Если же $\chi < t < 2\vartheta - \chi$, в правую часть уравнения, кроме интеграла по области, которую удается описать с помощью $\rho(\zeta, t)$,

следует ввести дополнительное слагаемое, учитывающее сброс гранул «чисто черной» фракции (см. сектор черной фракции, обрезаемый свободной поверхностью материала на рис. 2):

$$\rho(0, t) = \operatorname{ctg}^2 \vartheta \int_0^{t-\chi} d\zeta \rho(0, t-\zeta) \frac{\sin(\zeta/2)}{\cos^3(\zeta/2)} + \frac{2}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial S(t-\chi)}{\partial t}, \quad (16)$$

где $\partial S(\varphi)/\partial \varphi$ — производная площади треугольника FGH (показанного штриховыми линиями на рис. 2), характеризующая дополнительный вклад в лавины от гранул из черного сектора. Смысл угла φ ясен из рис. 2. При $t = \chi$ угол φ обращается в нуль, так что понятно, почему в (16) содержится комбинация $t - \chi$.

Чтобы получить выражение для $S(\varphi)$, приходится решить некоторую «школьную» геометрическую задачу (см. Приложение А). Здесь мы ограничимся рассмотрением простейшего и наиболее поучительного случая $\chi \ll \vartheta \ll \pi/2$ (т. е. черной фракции много меньше, чем белой, а барабан почти пуст). В Приложении А показано, каким образом в этом пределе можно найти следующее выражение для этой производной:

$$\frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \chi \left(\vartheta + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (17)$$

(Вывод соотношения (17) не вполне тривиален, и из содержания Приложения А можно понять, почему в (17) мы предпочли разделить множители $1/2$ и $4/3$.) В результате при $\chi \ll \vartheta \ll \pi/2$ имеем

$$\begin{aligned} \rho(0, t) &= \frac{1}{\vartheta^2} \int_0^t d\zeta \frac{\zeta}{2} \rho(0, t-\zeta) + \frac{4}{3} \frac{\chi}{\vartheta^2} \left(\vartheta + \frac{t}{2} \right), & 0 < t < 2\vartheta, \\ \rho(0, t) &= \frac{1}{\vartheta^2} \int_0^{2\vartheta} d\zeta \frac{\zeta}{2} \rho(0, t-\zeta), & t > 2\vartheta. \end{aligned} \quad (18)$$

Теперь, введя «безразмерные» величины $\tau \equiv t/2\vartheta$ и $\nu(\tau) \equiv \rho(0, t)/(4\chi/3\vartheta)$, получим

$$\begin{aligned} \nu(\tau) &= 2 \int_0^\tau d\epsilon (\tau - \epsilon) \nu(\epsilon) + 1 + \tau, & 0 < \tau < 1, \\ \nu(\tau) &= 2 \int_{\tau-1}^\tau d\epsilon (\tau - \epsilon) \nu(\epsilon), & \tau > 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь решение первого уравнения системы играет роль начального условия для второго. Сразу же отметим, что в уравнения (19) не входят в явном виде никакие параметры системы — все они скрыты в переменной τ и величине ν . Первое уравнение приводит к значению $\nu(0) = 1$ в начальный момент. После почленного дифференцирования (19) находим

$$\nu'(\tau) = 2 \int_0^{\tau} d\epsilon \nu(\epsilon) + 1, \quad 0 < \tau < 1, \quad (20)$$

$$\nu'(\tau) = 2 \int_{\tau-1}^{\tau} d\epsilon \nu(\epsilon) - 2\nu(\tau-1), \quad \tau > 1,$$

где $(\dots)' \equiv d/d\tau$. Из первого уравнения системы (20) немедленно следует $\nu'(0) = 1$. Продифференцировав (19) два раза, получим дифференциально-разностные уравнения:

$$\nu''(\tau) = 2\nu(\tau), \quad 0 < \tau < 1, \quad (21)$$

$$\nu''(\tau) = 2\nu(\tau) - 2\nu(\tau-1) - 2\nu'(\tau-1), \quad \tau > 1,$$

где в начальный момент $\nu(0) = \nu'(0) = 1$. Подобным уравнениям посвящены книги [16–18].

Из вида уравнений (19)–(21) и уравнений для следующих производных более высокого порядка непосредственно может быть получено следующее утверждение. В точке $\tau = 1$ решение $\nu(\tau)$ имеет разрыв значения и разрывы всех производных, в точке $\tau = 2$ имеются разрывы всех производных (само решение здесь непрерывно), в точке $\tau = 3$ имеют место разрывы всех производных решения, начиная со второй (само решение и его первая производная непрерывны), и так далее. Например, из уравнения (19) следует, что $\nu(1+0) - \nu(1-0) = -2$, из (20) следует $\nu'(2+0) - \nu'(2-0) = 2[\nu(1-0) - \nu(1+0)] = 4$ и т. д.

Теперь осталось решить уравнения (19) (или, например, (21)). Решение первого из уравнений (21) имеет вид

$$\nu(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(\sqrt{2} + 1) \exp(\sqrt{2}\tau) + (\sqrt{2} - 1) \exp(-\sqrt{2}\tau) \right], \quad (22)$$

так что $\nu(1-0) = 3.546$, $\nu'(1-0) = 4.915$. Вторые же уравнения из (19) или (21) могут быть решены с помощью преобразования Лапласа [19]. В Приложении Б показано, как можно найти решение

$$\nu(\tau) = \frac{9}{4} + \sum_j \frac{2(z_j+1)}{z_j^2(z_j+2)} \exp[z_j(\tau-1)] \int_0^1 d\epsilon \nu(\epsilon) [1+z_j(1-\epsilon) - (1+z_j)\exp(-z_j\epsilon)]. \quad (23)$$

Суммирование здесь проводится по всем корням (кроме нулевых) характеристического уравнения $z^2 - 2 + 2(z+1)\exp(-z) = 0$ [16]. Корни эти расположены следующим образом. Имеется трехкратно вырожденный нулевой корень, который приводит к появлению слагаемого $9/4$, что отвечает равномерному перемешиванию с плотностью $\rho_\infty = 3\chi/\vartheta$ на больших временах. Действительно, полное количество черной фракции в данном случае равно $2\vartheta \cdot \chi\vartheta$, а всего материала —

$$\vartheta - \frac{1}{2} \sin(2\vartheta) \cong \frac{2}{3}\vartheta^3,$$

так что

$$\rho_\infty = \frac{2\chi\vartheta^2}{2\vartheta^3/3} = \frac{3\chi}{\vartheta}.$$

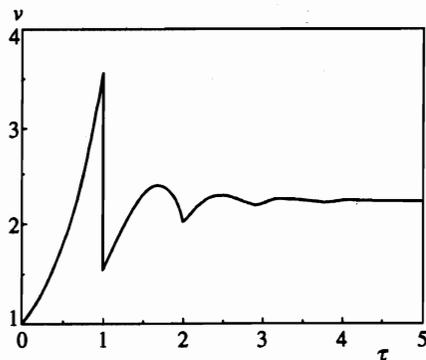


Рис. 3. Зависимость плотности черной фракции на левой половине свободной поверхности (см. рис. 2) от времени в случае, когда полный объем материала мал по сравнению с объемом пустого пространства, а объем черной фракции мал по сравнению с объемом белой; $\tau \equiv t/(2\vartheta)$, $\nu(\tau) \equiv \rho(0, t)/(4\chi/(3\vartheta))$. Узкий пик в точке $\tau = 0$ не показан (см. текст)

Есть также набор комплексно-сопряженных корней с асимптотическими значениями

$$z_{\pm p} = -\ln(p\pi) \pm (2p - 3/2)\pi i + O(\ln p/p),$$

p — положительное целое число, большее единицы. При всех $p \geq 2$ эти значения легко уточнить, последовательно итерируя соотношение: $z = \ln [2(z + 1)/(2 - z^2)]$. Проведя суммирование в (23), получим зависимость, показанную на рис. 3. Осцилляции, подобные полученным, наблюдались на эксперименте [10]. На рис. 3 видны разрывы $\nu(\tau)$ и производных при целочисленных значениях τ , о которых мы говорили выше.

Начиная с $\tau \approx 2.5$ зависимость $\nu(\tau)$ прекрасно описывается при учете уже двух нижних ненулевых ($p = 2$) корней характеристического уравнения: $z_{\pm 2} = -1.392 \pm 7.553 i$. Это выражение выглядит весьма компактно, если его написать прямо с численными коэффициентами:

$$\nu(\tau) = 9/4 + 0.496 \exp[-1.392(\tau - 1)] \cos [7.553(\tau - 1) - 1.336]. \quad (24)$$

Обратим внимание на то, что период осцилляций косинуса оказался здесь меньше единицы. В области же $1 < \tau < 2$ ответ удастся свернуть в следующее аналитическое выражение (см. Приложение В):

$$\begin{aligned} \nu(\tau) = & [\nu(1 - 0) - 2 - 3(\tau - 1)/2] \operatorname{ch} [\sqrt{2}(\tau - 1)] + \\ & + [\nu'(1 - 0) - 3/2]/\sqrt{2} - \sqrt{2}(\tau - 1) \operatorname{sh} [\sqrt{2}(\tau - 1)], \end{aligned} \quad (25)$$

численные значения $\nu(1 - 0)$ и $\nu'(1 - 0)$ уже приводились после формулы (22).

Пока речь шла лишь о менее чем половинном заполнении цилиндра. Нетрудно видеть, однако, что соотношение (16) можно использовать и для описания случая, в котором цилиндр заполнен в точности наполовину. Случай этот уникален тем, что полного перемешивания в этой ситуации вообще не происходит! Это можно пояснить следующим образом. При половинном заполнении касательные, о которых шла речь выше, превращаются в радиусы-векторы цилиндра. Поэтому, если во всех точках какого-либо радиуса-вектора концентрация $\rho = \text{const}$, то и после пересыпания на всей левой половине свободной поверхности снова окажется то же самое значение концентрации ρ . При этом ясно, что картины распределения фракций будут повторяться с периодом π ,

т. е. с периодом, равным половине периода обращения барабана. Из двух чистых фракций «выживает» только черная, так как чистая белая фракция исчезает уже в момент $t = \pi - \chi$. (Хотя мы не приводим схемы перемешивания специально для такого случая, из рис. 2 нетрудно понять, каким образом начинает перемешиваться материал и в этой ситуации.)

Нетрудно видеть, что на левой половине свободной поверхности будет

$$\rho(0, 0 \leq t \leq \chi) = \rho(0, \pi - \chi \leq t \leq \pi) = 1. \quad (26)$$

На временах же $\chi \leq t \leq \pi - \chi$ плотность $\rho(0, t)$ описывается уравнением (16), первый член в правой части которого исчезает, так как $\theta = \pi/2$:

$$\rho(0, t) = 2 \frac{\partial S(t - \chi)}{\partial t} = \frac{\sin^2 \chi}{\sin^2 t}. \quad (27)$$

Мы использовали здесь выражение для площади

$$S(\varphi) = \frac{1}{2} \frac{\sin \varphi \sin \chi}{\sin(\varphi + \chi)},$$

следующее из соотношения (А.1) Приложения А. Этот набор значений $\rho(0, t)$ вместе с условием периодичности $\rho(0, t + \pi) = \rho(0, t)$ описывает исчерпывающим образом процесс перемешивания при половинном заполнении цилиндра.

4. ВРЕМЕНА ИСЧЕЗНОВЕНИЯ ЧИСТЫХ ФРАКЦИЙ

Теперь определим, когда во внешнем кольце (т. е. вне круга радиусом $\cos \theta$) первые не останется той или иной чистой фракции. Время исчезновения белой фракции обозначим через T_w , время исчезновения черной — через T_b . Продемонстрируем на рисунках, как получаются выражения для этих времен.

Как уже отмечалось, в этом разделе нам уже не потребуется вводить предположение о полном перемешивании фракций в лавинах, которое пришлось использовать ранее (см. разд. 2 и 3). Достаточно будет считать, что если на правой половине свободной поверхности (т. е. в секторе A на рис. 1а) оказались гранулы обоих сортов, то в каждой точке левой поверхности (т. е. в каждой точке сектора B на рис. 1а) фракции будут только в смешанном состоянии. При этом степень перемешивания фракций в разных местах сектора B может быть совершенно различной, но в чистом виде фракций нигде в секторе B уже быть не должно (если только в секторе A не одна чистая фракция).

Снова, как и в предыдущих разделах, материал внутри окружности, показанной штриховой линией на рис. 1, 2, 4, 5, вращается вместе с барабаном, не перемешиваясь. Что же касается области вне круга радиусом $\cos \theta$, то вследствие сделанного выше предположения после первого же оборота барабана (здесь имеется в виду случай $\theta < \pi/2$) для каждой из касательных типа обозначенной CD на рис. 1б справедливо следующее утверждение: или все точки этой касательной находятся в смешанном состоянии, или во всех ее точках чистый материал (белый или черный). Чтобы найти T_b или T_w , нужно знать, находится ли материал в данной точке в чистом состоянии или в смешанном. Степень перемешивания материала в данном месте для нас сейчас несущественна, и поэтому неважно, как меняется степень перемешивания вдоль введенных касательных.

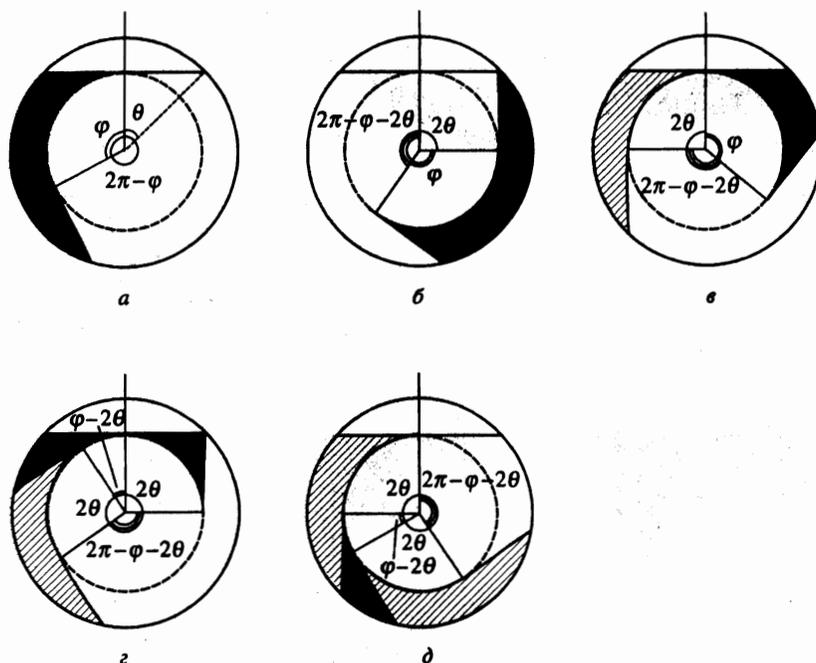


Рис. 4. Схемы распределения фракций в цилиндре в отдельные моменты времени, если в момент времени t_0 фракции расположены так, как показано на схеме a : $a - t = t_0$, $б - t = t_0 + 2\pi - 2\theta - \varphi$, $в - t = t_0 + 2\pi - \varphi$, $г - t = t_0 + 2\pi - 2\theta$, $д - t = t_0 + 2\pi$

Важно лишь, на какой из касательных находится данная точка. В результате для наших целей каждой точке материала во внешнем кольце снова достаточно сопоставить только угол между соответствующим радиусом-вектором типа OC и нормалью к свободной поверхности OE (см. рис. 1б) — угол COE . Размеры же областей во внешнем кольце, занимаемых разными фракциями, можно измерять соответствующими углами раствора.

Нам потребуется провести некоторое предварительное рассмотрение. Пусть, например, в момент времени t_0 имеет место ситуация, представленная на рис. 4а (черный материал во внутренней области цилиндра не показан, а «угол», занимаемый черным материалом во внешнем кольце φ). Рисунки 4б-д демонстрируют, как будут дальше развиваться события.

Сравнивая рис. 4а и рис. 4г, нетрудно видеть, что чистый черный материал во внешнем кольце исчезнет в момент

$$T_b = t_0 + (2\pi - 2\theta) \left[\frac{\varphi}{2\theta} \right] + 2\pi, \tag{28}$$

т. е. при каждом повороте на угол $2\pi - 2\theta$ исчезает 2θ черного материала, а чтобы во внешнем кольце пропал остаток черного материала, меньший 2θ , требуется еще один полный оборот цилиндра (здесь [...] — обозначение целой части). Заметим, что вместо белой фракции на рис. 4а мог бы быть и смешанный материал или любая комбинация белой фракции и смешанного материала — все равно ответ (28) для T_b остается неизменным.

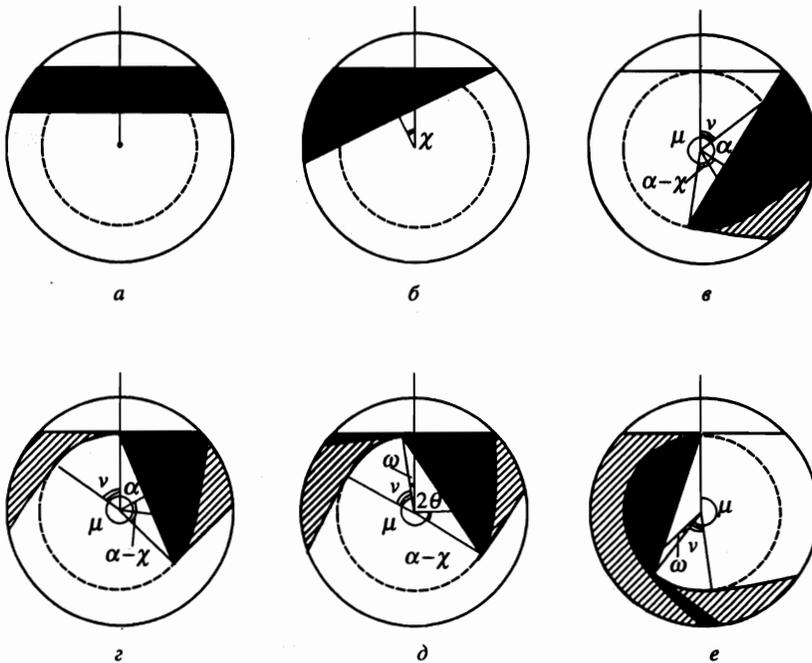


Рис. 5. Вид перемешиваемого материала в некоторые моменты времени при условии $\theta < (\pi - \chi)/2$: $a - t = 0$, $b - t = \chi$, $e - t = 2(\pi - \theta) - \chi$, $z - t = 2\pi - \alpha$, $d - t = 2(\pi - \theta) + \chi$, $e - t = 2\pi + \alpha$

Сравнивая рис. 4а и рис. 4д, видим, что чистый белый материал во внешнем кольце исчезнет в момент

$$T_w = t_0 + 2\pi \left[\frac{2\pi - \varphi}{2\theta} \right] + (2\pi - \varphi) - 2\theta \left[\frac{2\pi - \varphi}{2\theta} \right]. \tag{29}$$

В данном случае при каждом полном обороте цилиндра исчезает 2θ белого материала, который на рис. 4а занимает угол $2\pi - \varphi$. Второе слагаемое в правой части соотношения (29) соответствует максимальному числу полных оборотов барабана, при котором во внешнем кольце еще сохраняется белая фракция. Два последних слагаемых в правой части (29) отвечают углу (меньшему 2θ), на который нужно еще довернуть барабан, чтобы во внешнем кольце исчезли последние остатки белой фракции. Соотношение (29) не изменится, если вместо черной фракции на рис. 4а будет перемешанный материал или любая комбинация черной фракции и смеси.

Теперь с помощью соотношений (28) и (29) мы можем найти окончательные ответы для времени исчезновения чистых фракций во внешнем кольце. Определим время исчезновения белой фракции T_w . Нам будет удобно начать с простейшего предельного случая $\chi \rightarrow 0$, т.е. доля черного материала ничтожно мала. В начальный момент времени $t = 0$ фракции располагаются, как показано на рис. 5а. Очевидно, что при $\pi/2 < \theta < \pi$, т.е. когда барабан заполнен менее чем наполовину, $T_w = 2(\pi - \theta)$. Если же барабан заполнен более чем наполовину ($\theta < \pi/2$), можно в соотношении (29)

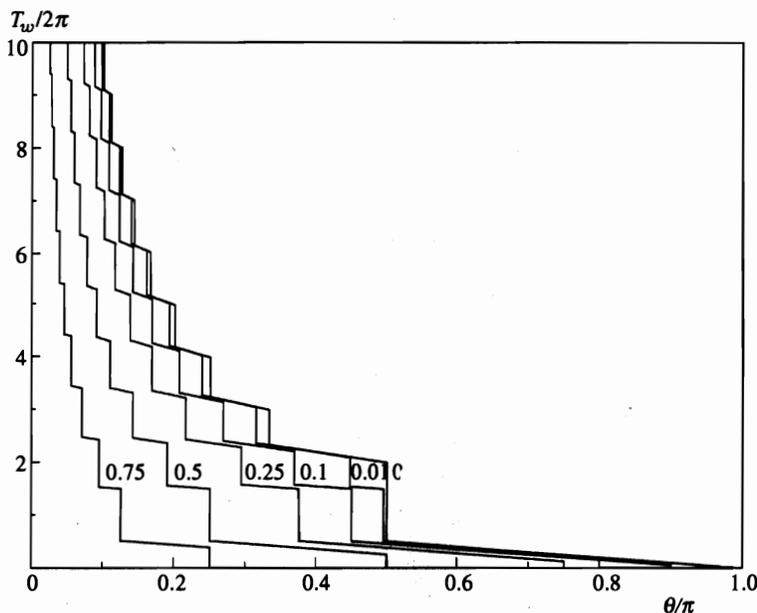


Рис. 6. Время, через которое нигде в барабане (кроме разве что в центральной области при более чем половинном заполнении) не останется чистой белой фракции, как функция степени заполнения барабана. Показаны кривые для следующих значений параметра χ/π , характеризующего объем черной фракции: 0, 0.01, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75

просто положить $\varphi \rightarrow 0$ и $t_0 = 0$ (см. рис. 4а при $\varphi \rightarrow 0$) и в итоге

$$\frac{T_w}{2\pi} = 1 + \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) \left[\frac{\pi}{\theta}\right] \quad (30)$$

— зависимость, на которой имеется последовательность скачков (см. рис. 6).

Перейдем к рассмотрению общего случая произвольного χ , т. е. произвольной толщины черного слоя. Прежде всего, очевидно, должно быть $\theta < \pi - \chi$. Далее, если $\theta > (\pi - \chi)/2$ (т. е. если черного материала в верхней половине барабана больше, чем в нижней), то, как легко видеть, $T_w = 2\pi - 2\theta - \chi$. Если же $\theta < (\pi - \chi)/2$, то зависимость $T_w(\theta)$ становится нетривиальной. Некоторые последовательные моменты начальной стадии перемешивания в этой ситуации показаны на рис. 5. В момент времени $2\pi + \alpha$, показанный на рис. 5е, белый материал в цилиндре расположен таким же образом, как и на рис. 4а (угол α введен на рис. 1б). Поэтому мы можем воспользоваться соотношением (29), если положим в нем $t_0 = 2\pi + \alpha$ и «угол» белого материала $2\pi - \varphi = 2\pi - (2\theta + \alpha + \chi)$. В итоге

$$T_w = \alpha + 2\pi + 2\pi \left[\frac{2\pi - (2\theta + \alpha + \chi)}{2\theta}\right] + 2\pi - (2\theta + \alpha + \chi) - 2\theta \left[\frac{2\pi - (2\theta + \alpha + \chi)}{2\theta}\right]. \quad (31)$$

Следовательно,

$$\frac{T_w}{2\pi} = 1 - \frac{\chi}{2\pi} + \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) \left[\frac{\pi - (\chi + \alpha)/2}{\theta}\right], \quad (32)$$

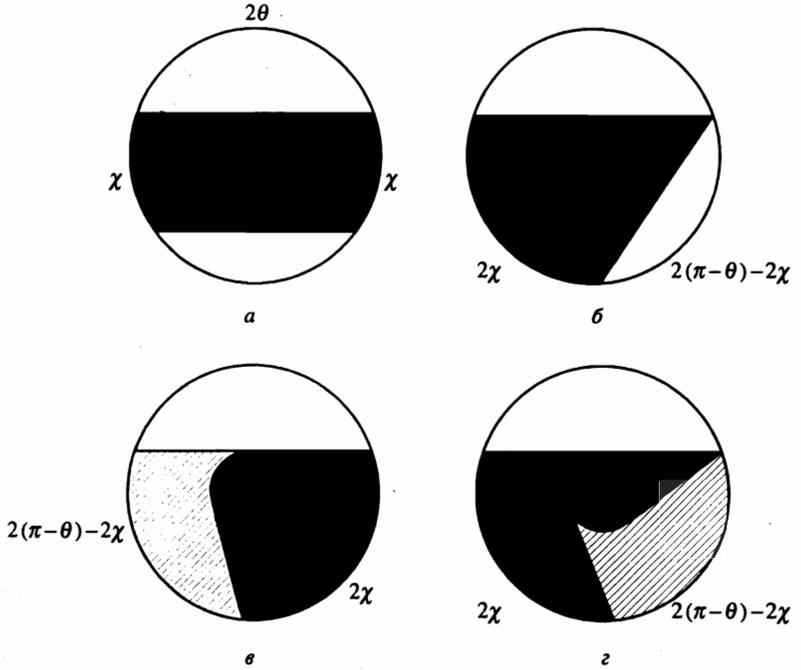


Рис. 7. Некоторые моменты перемешивания в случае $\pi/2 - \chi/2 \leq \theta < \pi/2$:
 $a - t = 0$, $б - t = \chi$, $в - t = 2(\pi - \theta) - \chi$, $г - t = 2(\pi - \theta) + \chi$

где угол α выражается через θ и χ с помощью (1). Поскольку при $\chi \rightarrow 0$ всюду, кроме $\theta = \pi/2$, также имеет место $\alpha \rightarrow 0$ (см. рис. 1б или соотношение (1)), то в этом пределе (32) переходит в (30). Набор полученных кривых показан на рис. 6.

Обратим внимание на дополнительный скачок к $T_w = 3\pi$, имеющий место при $\chi \neq 0$ (ср. с кривой для $\chi = 0$ на рис. 6). Скачок этот имеет место при $\theta = \pi/2 - \chi/2$, т. е. когда штриховая окружность на рис. 1б касается и верхней, и нижней границ черной фракции. При этом угол α оказывается равным $\pi/2$, а значит, как легко убедиться, $T_w(\theta = \pi/2 - \chi/2) = 3\pi$.

Теперь мы можем обратиться к вопросу о том, когда всюду, кроме внутреннего круга, исчезнет черная фракция? Легко проверить, что при $\theta > \pi/2$, т. е. при менее чем половинном заполнении барабана,

$$T_b = 2\pi - 2\theta + \chi. \tag{33}$$

Пусть теперь $\pi/2 - \chi/2 \leq \theta < \pi/2$ (см. рис. 7). Как видно из рис. 7г, в момент времени $2(\pi - \theta) + \chi$ фракции оказываются расположены таким образом, что можно воспользоваться соотношением (29), положив в нем $t_0 = 2(\pi - \theta) + \chi$ и $\varphi = 2\chi$ (ср. с рис. 4а). В результате для таких θ

$$\frac{T_b}{2\pi} = 2 - \frac{\theta}{\pi} - \frac{\chi}{2\pi} + \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) \left[\frac{\chi}{\theta}\right]. \tag{34}$$

Наконец, обратимся к случаю $\theta \leq \pi/2 - \chi/2$ (см. рис. 5). Сопоставив рис. 5д и

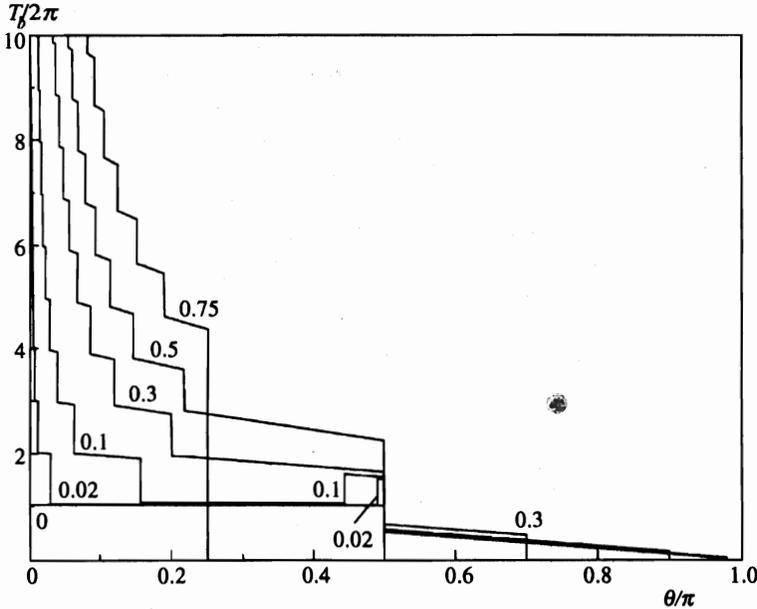


Рис. 8. Время, через которое нигде в барабане (кроме разве что в центральной области при более чем половинном заполнении) не останется чистой черной фракции, как функция степени заполнения барабана. Приведены кривые для следующих значений параметра χ/π , характеризующего объем черной фракции: 0, 0.02, 0.1, 0.3, 0.5, 0.75. Не показано значение $T_b(\theta = \pi/2) = \infty$.

4а, мы видим, что снова можно воспользоваться соотношением (29), положив в нем $t_0 = 2(\pi - \theta) + \chi$ и $\varphi = \chi + \alpha - 2\theta$. Таким образом,

$$\frac{T_b}{2\pi} = 2 - \frac{\theta}{\pi} - \frac{\chi}{2\pi} + \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) \left[\frac{\chi + \alpha - 2\theta}{2\theta}\right]. \quad (35)$$

Соотношения (34) и (35) согласуются друг с другом в точке $\theta = \pi/2 - \chi/2$. Действительно, в этой точке $\alpha = \pi$, и, следовательно, (35) переходит в (34).

Соотношения (33)–(35) вместе с (1) описывают набор кривых, представленных на рис. 8. В пределе $\chi \rightarrow 0$ формула (35) переходит в $T_b = 2\pi$ для углов $\theta < \pi/2$, поскольку при этом $\alpha \rightarrow 0$. В этом же пределе (34) приводит к $T_b = 3\pi$ для $\theta = \pi/2 - 0$. Мы видим, таким образом, что зависимости $T_b(\theta)$ при небольших χ имеют минимум (см. рис. 8). Можно проверить, что этот минимум имеет место при $\chi < \pi/6$. Он исчезает при $\chi = \pi/6$ в точке $\theta = \pi/3$. Формула (35) не описывает уникальный случай в точности половинного заполнения. Случай этот, в котором полного перемешивания материала, не происходит, требует особого рассмотрения. Он был описан в конце предыдущего раздела.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы объяснили природу лавинного перемешивания. Для аналитического описания использованной модели оказалось достаточно применить простой в

сущности геометрический подход. Оказалось, что в ряде случаев процесс перемешивания может быть описан как последовательность дискретных линейных отображений. Мы показали, что задача имеет весьма нетривиальное решение, хотя в ней и не приходится иметь дело со сложными нелинейными отображениями (см., например, [20, 21]). Было описано два режима лавинного перемешивания: режим диффузии с конвекцией при более чем половинном заполнении цилиндра, и режим быстрого перемешивания при менее чем половинном заполнении.

Мы вычислили характерные времена перемешивания, в том числе и времена, за которые в областях, прилегающих к поверхности цилиндра, исчезают чистые фракции. На построенных зависимостях этих времен от степени заполнения цилиндра имеются неаналитичности — набор скачков. Подобные особенности вообще характерны для широчайшего круга систем с центрами проскальзывания фазы, к которым относятся, в частности, джозефсоновские структуры, тонкие пленки сверхпроводников второго рода и т. п. (см., например, [22–24]). Для рассмотренной системы также можно ввести это понятие. Для описания расположения гранул мы фактически использовали только одну величину — угол между радиусом-вектором соответствующей касательной и нормалью к свободной поверхности (см. рис. 1б). Этот угол — «фаза» гранул — скачком меняется на 2ϑ всякий раз, когда они скатываются по свободной поверхности. Поэтому в нашей задаче роль своеобразного «центра проскальзывания фазы» играет свободная поверхность гранулированного материала.

Автор благодарен Е. Н. Антонову, В. В. Брыксину, С. А. Ктиторову, Е. К. Кудинову, А. М. Монахову, А. Н. Самухину и Ю. А. Фирсову за многочисленные и полезные обсуждения. Часть представленных результатов была получена во время пребывания автора на школе «Проблемы самоорганизованной критичности» в Турине, финансируемой в рамках программы INTAS.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вид источника в уравнении (16)

Найдем производную $\partial S(\varphi)/\partial\varphi$, которая фигурирует в левой части уравнения (16). Здесь $S(\varphi)$ — площадь треугольника FGH , показанного штриховой линией на рис. 2. Из этого рисунка также ясен смысл угла $\varphi = t - \chi$.

Очевидно, что сторона треугольника $FG = \sin\vartheta + \operatorname{tg}(\varphi/2) \cos\vartheta$. Воспользовавшись стандартными формулами для площадей треугольников, получим

$$S(\varphi) = \frac{1}{2} \frac{\sin\varphi (FG)^2 \sin\chi}{\sin(\pi - \varphi - \chi)} = \frac{1}{2} \left[\sin\vartheta + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cos\vartheta \right]^2 \frac{\sin\varphi \sin\chi}{\sin(\pi - \varphi - \chi)} \cong \cong \frac{1}{2} \left(\vartheta + \frac{\varphi}{2} \right)^2 \frac{\varphi\chi}{\varphi + \chi}. \quad (\text{A.1})$$

Последнее равенство получено после перехода к пределу $\chi, \varphi < \vartheta \ll 1$. В этом случае имеем

$$\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi} = \frac{\chi}{2} \frac{\vartheta + \varphi/2}{\varphi + \chi} \left[\varphi + \chi \frac{\vartheta + \varphi/2}{\varphi + \chi} \right]. \quad (\text{A.2})$$

Последняя зависимость имеет узкий (если $\chi \ll \vartheta$) пик шириной χ в точке $\varphi = 0$ (максимум $\partial S(0)/\partial\varphi = \vartheta^2/2$), минимум — в точке $\varphi = \chi$, равный $\chi\vartheta/2$, и ведет себя линейным образом как $\chi(\vartheta + \varphi/2)/2$ при $\varphi \gg \chi$.

Таким образом, если черного материала мало (т. е. если $\chi \ll \vartheta \ll 1$), то в области времен $t < 2\vartheta$ картина перемешивания выглядит следующим образом. Впереди движется «черный лидер» угловой шириной χ , за ним тянется очень темный узкий «хвост» шириной также χ , и далее следует уже гораздо менее темная область. В пределе $\chi \rightarrow 0$ мы можем присоединить узкий «хвост» к «черному лидеру» и при $\varphi > 0$ иметь дело только с линейным участком $\partial S/\partial\varphi$. При этом, чтобы получился правильный ответ для полного количества черной фракции

$$S(\varphi = 2\vartheta) = \int_0^{2\vartheta} d\varphi \frac{\partial S}{\partial\varphi} = 2\vartheta^2 \chi,$$

надо перенормировать χ на множитель $4/3$. В результате получаем формулу (17) для $\partial S(\varphi)/\partial\varphi$, справедливую при $\chi \ll \varphi < \vartheta \ll 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Решение уравнений (19)

Поскольку оказалось, что использование для таких уравнений готовых формул из классического справочного пособия Пинни [16] приводит к неверным результатам, мы вынуждены кратко описать, в общем-то, вполне обычную процедуру решения уравнений (19) методом Лапласа.

Будем решать второе уравнение системы (19) на промежутке $1 < \tau < \infty$, считая решение $\nu(\tau)$ уже известным в области $(0, 1)$ (см. (22) — получено из первого уравнения системы). Применим преобразование Лапласа

$$y(z) = \int_0^{\infty} d\gamma e^{-z\gamma} \nu(\gamma + 1) \quad (\text{Б.1})$$

к обеим частям уравнения (19):

$$\begin{aligned} \nu(\gamma + 1) = & 2 \int_{\gamma-1}^{\gamma} d\epsilon (\gamma - \epsilon) \nu(\epsilon + 1) = 2 \int_0^{\gamma} d\epsilon (\gamma - \epsilon) \nu(\epsilon + 1) - \\ & - 2 \int_0^{\gamma-1} d\epsilon (\gamma - 1 - \epsilon) \nu(\epsilon + 1) + 2 \int_0^{\gamma-1} d\epsilon \nu(\epsilon + 1), \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

где γ принадлежит промежутку $(0, \infty)$. Теперь следует воспользоваться стандартными соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{y(z)}{z} &= \int_0^{\infty} d\gamma e^{-z\gamma} \int_0^{\gamma} d\epsilon \nu(\epsilon + 1), \\ \frac{y(z)}{z^2} &= \int_0^{\infty} d\gamma e^{-z\gamma} \int_0^{\gamma} d\epsilon (\gamma - \epsilon) \nu(\epsilon + 1) \end{aligned}$$

и провести последовательное интегрирование по частям, выделяя и собирая члены с $y(z)$. В итоге получим

$$y(z) = \frac{2}{z^2 - 2 + 2(z+1)\exp(-z)} \int_0^1 d\epsilon \nu(\epsilon) [1 + z(1 - \epsilon) - (1+z)e^{-z\epsilon}] . \quad (\text{Б.3})$$

Из теоремы о предельных значениях немедленно следует, что

$$\nu(\tau \rightarrow \infty) = \lim_{z \rightarrow 0} zy(z) = 9/4.$$

Обращение преобразования Лапласа [19]

$$\nu(\tau + 1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C+i\infty}^{C-i\infty} dz e^{z\tau} y(z) = \sum_j \text{Res}_j [e^{z\tau} y(z)] \quad (\text{Б.4})$$

(суммирование вычетов проводится по всем полюсам функции (3); так как их нет в правой полуплоскости $\{z\}$, в качестве C может быть взята любая положительная вещественная константа) и последующее выделение вклада $9/4$ от полюса третьего порядка в точке $z = 0$ и приводит к итоговой формуле (23).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Аналитическое представление решения уравнений (19) в области $1 < \tau < 2$

Мы отмечали, что решение $\nu(\tau)$ уравнений удается представить в очень простом аналитическом виде на промежутке $1 < \tau < 2$. Покажем, как это можно сделать.

Вычислим все производные $\nu^{(m)}(\tau)$ в точке $\tau = 1+0$. Из уравнений (19) немедленно следует $\nu(1+0) = \nu(1-0) - 2$, из уравнений (20) следует $\nu'(1+0) = \nu'(1-0) - 2\nu(0) - 1 = \nu'(1-0) - 3$, из (21) — $\nu''(1+0) = 2[\nu(1+0) - \nu(0) - \nu'(0)] = 2[\nu(1-0) - 4]$ и так далее. Видно, что все производные $\nu^{(m)}(1+0)$ выражаются только через $\nu(0) = \nu'(0) = 1$ и также известные (см. выражение (22)) $\nu(1-0)$ и $\nu'(1-0)$. Без особого труда можно получить следующие общие ответы для производных. Для четных ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$\nu^{(2k)}(1+0) = 2^k [\nu(1-0) - 2(k+1)], \quad (\text{В.1})$$

для нечетных ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$\nu^{(2k+1)}(1+0) = 2^k [\nu'(1-0) - 3(k+1)] . \quad (\text{В.2})$$

В итоге, на промежутке $1 < \tau < 2$

$$\begin{aligned} \nu(\tau) = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2k)!} [\nu(1-0) - 2(k+1)] (\tau-1)^{2k} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!} [\nu'(1-0) - 3(k+1)] (\tau-1)^{2k+1}. \end{aligned} \quad (\text{В.3})$$

Эти ряды сразу сворачиваются в итоговое аналитическое выражение (25) с sh и ch .

Литература

1. J. Rajchenbach, Phys. Rev. Lett. **65**, 2221 (1990).
2. V. Buchholtz, Th. Pöschel, and H.-J. Tillemans, Physica A **216**, 199 (1995).
3. G. H. Ristow, Europhys. Lett. **28**, 97 (1994).
4. G. A. Kohring, J. de Phys. I (France) **5**, 1551 (1995).
5. G. Baumann, I. M. Jánosi, and D. E. Wolf, Phys. Rev. E **51**, 1879 (1995).
6. F. Cantelaube, Y. Limon-Duparcmeur, D. Bideau, and G. H. Ristow, J. de Phys. I (France) **5**, 581 (1995).
7. O. Zik, D. Levine, S. G. Lipson, S. Shrikman, and J. Stavans, Phys. Rev. Lett. **73**, 644 (1994).
8. K. M. Hill and J. Kakalios, Phys. Rev. E **49**, R3610 (1994).
9. Th. Pöschel and V. Buchholtz, Phys. Rev. Lett. **71**, 3963 (1993).
10. G. Metcalfe, T. Shinbrot, J. J. McCarthy, and J. M. Ottino, Nature **374**, 39 (1995).
11. С. Н. Дороговцев, Письма в ЖЭТФ **62**, 246 (1995).
12. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).
13. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A **38**, 364 (1988).
14. C. Tang and P. Bak, Phys. Rev. Lett. **60**, 2347 (1988).
15. Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, Москва (1970).
16. Э. Пинни, *Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения*, Изд-во иностр. лит., Москва (1961).
17. А. А. Миролюбов, М. А. Солдатов, *Линейные однородные разностные уравнения*, Наука, Москва (1981).
18. А. А. Миролюбов, М. А. Солдатов, *Линейные неоднородные разностные уравнения*, Наука, Москва (1986).
19. В. А. Диткин, А. П. Прудников, *Интегральные преобразования и операционное исчисление*, Наука, Москва (1974).
20. J. D. Meiss, Rev. Mod. Phys. **64**, 795 (1992).
21. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).
22. А. А. Абrikосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
23. В. В. Брыксин, А. В. Гольцев, С. Н. Дороговцев, Письма в ЖЭТФ **49**, 440 (1989).
24. V. V. Bryksin, A. V. Goltsev, and S. N. Dorogovtsev, Physica C **160**, 103 (1989).