ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 1(7), стр. 128–136

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ФОТОННОЙ СТАТИСТИКИ ДВУХ СВЯЗАННЫХ МОД ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В УСЛОВИЯХ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ МОД

М. Е. Вейсман, С. Ю. Калмыков*

Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская область, Россия

Поступила в редакцию 23 декабря 1996 г.

Исследованы вероятности переходов между фоковскими состояниями двух мод электромагнитного поля под влиянием связи мод конечной длительности. Показано, что вероятность переходов является сильно осциллирующей функцией модовых чисел фотонов. В условиях, когда частота связи превышает среднее геометрическое модовых частот (сильная связь), происходит возбуждение больших чисел фотонов в моде с более низкой частотой. Возбуждение двумерного осциллятора поля излучения и «красная» асимметрия вероятностей переходов объясняются неустойчивостью классического двумерного осциллятора с сильной связью мод.

1. ВВЕДЕНИЕ

Функции распределения фотонов в неклассических состояниях света исследовались в последние годы рядом авторов [1]. Интерес к фотонной статистике неклассического света был стимулирован работой [2], в которой впервые обнаружено осциллирующее поведение функции распределения фотонов в одномодовом сжатом когерентном состоянии и предложено считать подобный характер этих функций признаком неклассической природы рассматриваемого состояния. Сжатие квантовых флуктуаций поля излучения было экспериментально получено с помощью различных квантовых оптических систем [3]. В частности, использовалось двухмодовое сжатие [4, 5]. В работах [6, 7] исследованы функции распределения фотонов в двумерном сжатом вакууме [6] и фотонная статистика в двумерном сжатом когерентном состоянии общего вида с комплексными параметрами сдвига и сжатия [7].

В предлагаемой работе найдены вероятности перехода между фоковскими состояниями двух мод электромагнитного поля с постоянными различными частотами под влиянием связи мод конечной длительности. Связь мод может возникать при распространении когерентного света в нелинейной среде с показателем преломления, зависящим от амплитуды поля. Предполагается, что «координаты» двумерного осциллятора поля связаны в течение ограниченного промежутка времени, причем частота связи является постоянной действительной величиной [8]. Данная квантовомеханическая модель двухмодового света является точно решаемой при помощи метода, использующего линейные интегралы движения [9, 10] данной квантовой системы с квадратичным нестационарным гамильтонианом.

*e-mail: bme@hedric.msk.su

Квадратичные по операторам координаты и импульса интегралы движения для одномерного квантового осциллятора с переменной частотой были найдены в работах [11]. Линейные по операторам координаты и импульса интегралы движения были получены для одномерного параметрического осциллятора в [12, 13] и для нестационарного многомерного осциллятора в [14].

Квантовые интегралы движения для рассматриваемой системы найдены в явном виде в разд. 2. Искомая вероятность переходов выражена через полином Эрмита четырех переменных с нулевыми аргументами [15]. В условиях сильной связи мод, когда частота связи превышает среднее геометрическое модовых частот, классический двумерный осциллятор является неустойчивой системой, совершающей инфинитное движение в фазовом пространстве, так как его потенциальная энергия неположительно определена. Показано, что именно сильная связь мод конечной длительности приводит к сильному возбуждению двумерного квантового осциллятора со значительной «красной» асимметрией вероятности переходов как функции модовых чисел фотонов. Характерно, что в случае слабой связи мод указанные аномалии фотонной статистики отсутствуют, несмотря на то что частота связи может быть не мала по сравнению с модовыми частотами.

2. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Для получения явного выражения для вероятностей переходов используется общая теория многомерных квантовых систем с произвольными квадратичными гамильтонианами, основанная на их динамических симметриях и линейных интегралах движения [9, 10]. Если существует унитарный оператор эволюции системы $\hat{U}(t)$, то $2N$ интегралов движения $\hat{\mathbf{p}}_0$ и $\hat{\mathbf{q}}_0$ (N — число степеней свободы системы) могут быть построены с помощью канонического преобразования операторов $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{q}}$ импульсов и координат. Интегралы движения являются начальными значениями импульсов и координат системы. Согласно теореме Стоуна–фон Неймана, операторы $\hat{\mathbf{p}}_0$ и $\hat{\mathbf{q}}_0$ образуют полный набор [9]. Пропагатор (т. е. оператор эволюции в некотором представлении) нестационарной квадратичной системы может быть в явном виде выражен через элементы матрицы канонического преобразования.

Две моды света с нестационарной связью мод описываются гамильтонианом вида

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{B}\hat{\mathbf{Q}}, \tag{1}$$

здесь $\hat{\mathbf{Q}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{q}_1, \hat{q}_2)$ — 4-столбец операторов квадратурных компонент, $\mathbf{B}(t)$ — 4×4-матрица

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \lambda(t) \\ \lambda(t) & \omega_2^2 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{I}_2$ — единичная 2×2-матрица. Коэффициент связи является кусочно-постоянной функцией, $\lambda(0 < t < T) = \omega_0^2$, $\lambda(t < 0, t > T) = 0$, T — длительность связи мод. В общем случае $\omega_1 \neq \omega_2$. Все частоты действительны, а массы осцилляторов выбраны равными единице. Введение нормальных координат канонической заменой, сохраняющей коммутационные соотношения, оказывается невозможным при $\omega_1 \neq \omega_2$, так что задача решается в исходных переменных.

Согласно [9, 10], зависящие от времени квантовые интегралы движения являются линейными суперпозициями операторов квадратур

$$\hat{\mathbf{I}}(t) = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{p}}_0(t) \\ \hat{\mathbf{q}}_0(t) \end{pmatrix} = \mathbf{\Lambda}(t)\hat{\mathbf{Q}}, \quad \mathbf{\Lambda}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_1(t) & \mathbf{\Lambda}_2(t) \\ \mathbf{\Lambda}_3(t) & \mathbf{\Lambda}_4(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Симплектическая матрица $\Lambda(t)$ не меняет коммутационных соотношений $[\hat{I}_a, \hat{I}_b] = [\hat{Q}_a, \hat{Q}_b] = -i\hbar\Sigma_{ab}$, где $a, b = 1 \div 4$, и обладает свойством $\mathbf{\Lambda}^{-1} = -\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{\Sigma}$,

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & 0 \end{pmatrix},$$

верхний индекс «T» означает транспонирование матрицы. Необходимым и достаточным условием инвариантности операторов $\hat{\mathbf{I}}(t)$ (2) является их эволюция согласно матричному уравнению

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Sigma}\mathbf{B} \tag{3}$$

с начальным условием $\Lambda(0) = \mathbf{I}_4$, где $\mathbf{I}_4$ — единичная 4×4-матрица. Решение системы (3) с кусочно-постоянным коэффициентом связи имеет вид

$$\mathbf{\Lambda}(t \le T) = \mathbf{T}_+ \otimes \mathbf{\Xi}_+ - \mathbf{T}_- \otimes \mathbf{\Xi}_-,$$

где $\otimes$ означает тензорное произведение вспомогательных матриц

$$\mathbf{T}_\pm = \begin{pmatrix} \cos(\Omega_\pm t) & \Omega_\pm \sin(\Omega_\pm t) \\ -\Omega_\pm^{-1}\sin(\Omega_\pm t) & \cos(\Omega_\pm t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Xi}_\pm = \frac{1}{a_+ - a_-}\begin{pmatrix} a_\pm & 1 \\ 1 & -a_\mp \end{pmatrix},$$

выраженных через параметры $\omega_\pm^2 = \omega_1^2 \pm \omega_2^2$, $\Omega_\pm^2 = (\omega_+^2 \pm \sqrt{\omega_-^4 + 4\omega_0^4})/2$, $a_\pm = (\Omega_\pm^2 - \omega_2^2)/\omega_0^2$, $a_+a_- = -1$. Матрицы $\mathbf{\Xi}_\pm$ удовлетворяют соотношениям $\mathbf{\Xi}_\pm\mathbf{B}_2 = \Omega_\pm^2\mathbf{\Xi}_\pm$ и обладают свойствами $\mathbf{\Xi}_\pm^2 = \pm\mathbf{\Xi}_\pm$ и $\mathbf{\Xi}_+\mathbf{\Xi}_- = 0$. Собственные значения $\Omega_\pm$ совпадают с собственными значениями уравнений Гамильтона для двумерного связанного осциллятора с гамильтонианом (1). В условиях сильной связи ($\omega_0^2 > \omega_1\omega_2$) классический двумерный связанный осциллятор имеет неположительно определенную потенциальную энергию ($\det \mathbf{B}_2 < 0$) и является неустойчивой системой. При этом собственное значение Ω_- является чисто мнимым, что обусловливает неустойчивое поведение элементов $\mathbf{\Lambda}$-матрицы канонического преобразования. В противоположном случае слабой связи классическая система совершает финитное движение, собственные значения задачи действительны, и элементы $\mathbf{\Lambda}$-матрицы ограничены.

Гамильтониан (1), выраженный в терминах лестничных операторов $\hat{a}_i = (\hat{q}_i\sqrt{\omega_i} + i\hat{p}_i/\sqrt{\omega_i})/\sqrt{2\hbar}$, $\hat{a}_i^\dagger = (\hat{q}_i\sqrt{\omega_i} - i\hat{p}_i/\sqrt{\omega_i})/\sqrt{2\hbar}$, $i = 1, 2$, имеет вид

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{D}\hat{\mathbf{a}},$$

где $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger)$ — 4-столбец, $\mathbf{D} = \mathbf{K}^T\mathbf{B}\mathbf{K}$,

$$\mathbf{K} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\begin{pmatrix} -i\mathbf{E}_\omega & i\mathbf{E}_\omega \\ \mathbf{E}_\omega^{-1} & \mathbf{E}_\omega^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_\omega = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\omega_2} \end{pmatrix}.$$

Линейные инварианты $\hat{\mathbf{b}} = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_1^\dagger, \hat{b}_2^\dagger)$ могут быть построены с помощью однородного канонического преобразования операторов рождения и уничтожения фотонов

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{\Omega}\hat{\mathbf{a}}, \tag{4}$$

где $\mathbf{\Omega} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{K}$. Уравнение $\dot{\mathbf{\Omega}} = -i\hbar^{-1}\mathbf{\Omega}\mathbf{\Sigma}\mathbf{D}$ с начальным условием $\mathbf{\Omega}(0) = \mathbf{I}_4$ является необходимым и достаточным условием инвариантности $\hat{\mathbf{b}}$ ($\Omega(0) = \mathbf{I}_4$). Матрица

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \zeta & \eta \\ \eta^* & \zeta^* \end{pmatrix} \tag{5}$$

состоит из 2×2-блоков ζ, η, имеющих вид

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_\omega^{-1}\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{E}_\omega + \mathbf{E}_\omega\mathbf{\Lambda}_4\mathbf{E}_\omega^{-1}\right) + \frac{i}{2}\left(\mathbf{E}_\omega^{-1}\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{E}_\omega^{-1} - \mathbf{E}_\omega\mathbf{\Lambda}_3\mathbf{E}_\omega\right),$$
$$\eta = \frac{1}{2}\left(-\mathbf{E}_\omega^{-1}\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{E}_\omega + \mathbf{E}_\omega\mathbf{\Lambda}_4\mathbf{E}_\omega^{-1}\right) + \frac{i}{2}\left(\mathbf{E}_\omega^{-1}\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{E}_\omega^{-1} + \mathbf{E}_\omega\mathbf{\Lambda}_3\mathbf{E}_\omega\right).$$

3. ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕХОДОВ

Преобразование (4) сохраняет бозе-коммутационные соотношения $[\hat{b}_i, \hat{b}_j] = [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j^\dagger] = 0$, $[\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера), делая $\hat{\mathbf{b}}^\dagger$ и $\hat{\mathbf{b}}$ формальными операторами рождения и уничтожения в произвольный момент времени. Собственный вектор $|\mathbf{n}, t\rangle$ формального оператора числа частиц $(\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_1, \hat{b}_2^\dagger\hat{b}_2)$ в связанных модах, удовлетворяющий соотношению $\hat{b}_i^\dagger\hat{b}_i|\mathbf{n}, t\rangle = n_i|\mathbf{n}, t\rangle$, $i = 1, 2$, является формальным двумерным фоковским состоянием двух мод с нестационарной связью. Важно отметить, что дискретный полный набор фоковских состояний для системы с нестационарным квадратичным гамильтонианом всегда возможно определить подобным образом, даже если в некоторый момент спектр энергии становится непрерывным. В частности, в двумерном потенциале классического осциллятора (1) с сильной связью мод ($\omega_0^2 > \omega_1\omega_2$) невозможно образование связанного состояния, и спектр энергии квантовой системы (1) непрерывен. Тем не менее при этом существует полный набор векторов состояния $|\mathbf{n}, t\rangle$, собственных для интегралов движения $(\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_1, \hat{b}_2^\dagger\hat{b}_2)$, обладающих всеми алгебраическими свойствами фоковских состояний. Предполагается, что состояние $|\mathbf{n}, t\rangle$ в произвольный момент времени воспроизводит временную эволюцию исходного фоковского состояния несвязанных мод $|n_1\rangle|n_2\rangle$ и совпадает с ним в начальный момент ($t = 0$):

$$|\mathbf{n}, t = 0\rangle = |n_1\rangle|n_2\rangle, \quad |n_i\rangle = \frac{\left(\hat{a}_i^\dagger\right)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}}|0_i\rangle, \tag{6}$$

где $|0_i\rangle$ есть вектор вакуумного состояния i-ой моды.

При $t < 0$ и $t \to \infty$ гамильтониан (1) перестает зависеть от времени. В этом случае существуют начальные и конечные состояния (6) стационарной системы несвязанных мод, и между ними имеют место переходы. Амплитуда перехода из начального состояния $|in\rangle$ в конечное $|f\rangle$ (в качестве которого берется (6)) дается матричным элементом $\langle f|t \to \infty\rangle$, где $|t \to \infty\rangle$ есть предел состояния $|\mathbf{n}, t\rangle$, когда $t \to \infty$.

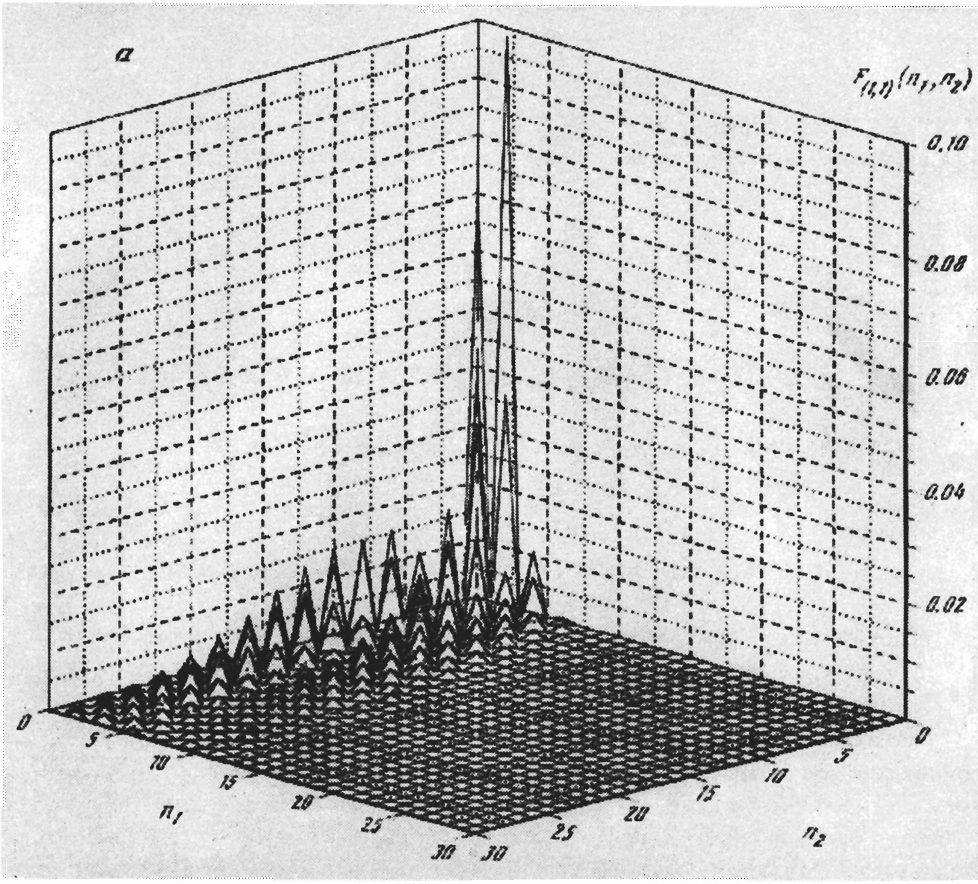

Рис. 1. Вероятность переходов $F_{\mathbf{m}}(\mathbf{n},t)$ между фоковскими состояниями мод с сильно различающимися частотами ($\omega_1/\omega_2 = 3$) в условиях сильной связи ($\omega_0/\omega_2 = 2$, длительность связи мод $T\omega_2 = \pi/2$). Имеет место «красная» асимметрия вероятностей переходов из фоковских состояний с симметричными числами заполнения: *а* — $|1,1,t\rangle$, *б* — $|5,5,t\rangle$

Амплитуда $\langle\mathbf{n}|\mathbf{m},t\rangle$, связывающая начальное фоковское состояние $|\mathbf{m},t\rangle$ с конечным фоковским состоянием $|\mathbf{n}\rangle$, есть не что иное, как функция Грина в дискретном фоковском базисе. Она представляется [10, 16] через полиномы Эрмита нескольких переменных в терминах элементов матрицы $\mathbf{\Omega}$ (5) канонического преобразования (4). Вероятность перехода между двухмодовыми фоковскими состояниями $F_{\mathbf{m}}(\mathbf{n},t) = |\langle\mathbf{n}|\mathbf{m},t\rangle|^2$ есть, по определению, двухмодовая функция распределения фотонов в фоковском состоянии связанных мод $|\mathbf{m},t\rangle$. Здесь $\mathbf{m}$ — метка состояния, а $\mathbf{n}$ — дискретная векторная переменная. Вероятность переходов имеет вид [16]

$$F_{\mathbf{m}}(\mathbf{n},t) = |\det\zeta(t)|^{-1}\,\frac{\left|H^{\{\mathrm{Y}\}}_{\mathbf{nm}}(\mathbf{0})\right|^2}{\mathbf{n}!\mathbf{m}!}, \tag{7}$$

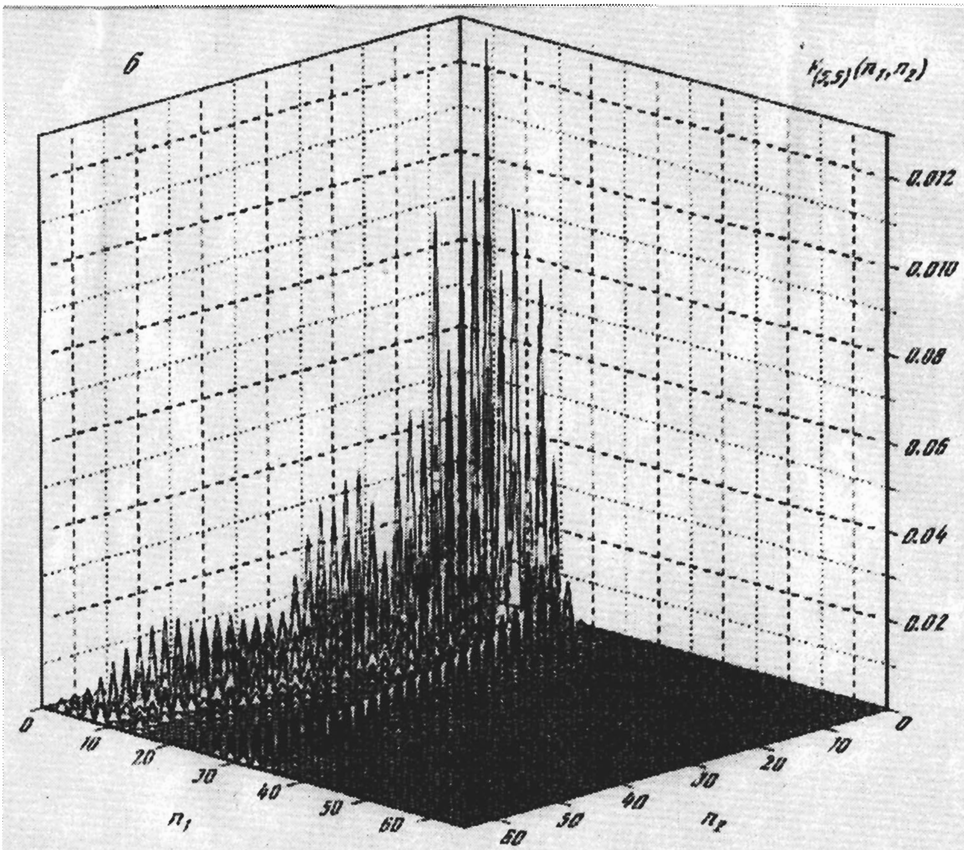

Рис. 1*б*

где $\mathbf{m}! = m_1!m_2!$, $\mathbf{n}! = n_1!n_2!$, матрица

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \zeta^{-1}\eta & -\zeta^{-1} \\ -\zeta^{T^{-1}} & -\eta^*\zeta^{-1} \end{pmatrix}$$

— блочная 4×4-матрица, 2×2-матрицы ζ, η являются блоками симплектической матрицы $\mathbf{\Omega}$.

Примеры распределений чисел фотонов, представленные ниже, получены численно с помощью известного рекуррентного соотношения для полиномов Эрмита N переменных

$$H^{\{\mathbf{R}\}}_{n_1\ldots n_i+1\ldots n_N}(\mathbf{y}) = \left(\sum_{k=1}^{N} R_{ik}y_k\right) H^{\{\mathbf{R}\}}_{n_1\ldots n_i\ldots n_N}(\mathbf{y}) - \sum_{k=1}^{N} R_{ik}n_k H^{\{\mathbf{R}\}}_{n_1\ldots n_k-1\ldots n_N}(\mathbf{y}),$$

стартующего с $H_0^{\{\mathbf{R}\}} = 1$, $H^{\{\mathbf{R}\}}_{0\ldots 1_i\ldots 0}(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{N} R_{ik}y_k$. Соотношение получено дифферен-

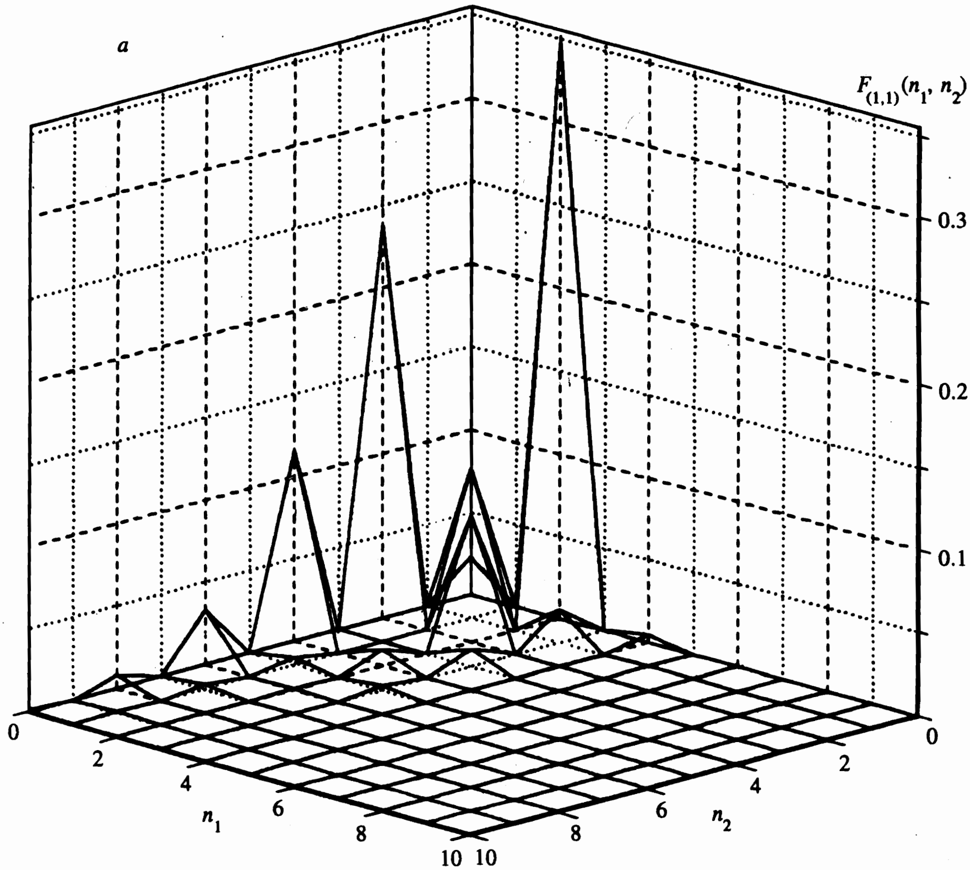

Рис. 2. То же, что рис. 1*a*, *б*, но $\omega_0/\omega_2 = 1.5$ (слабая связь). Возбуждение осцилляторов поля незначительно по сравнению со случаем сильной связи

цированием производящей функции для N-мерных полиномов Эрмита [15]

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{aRa} + \mathbf{aRy}\right) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} H_{\mathbf{n}}^{\{\mathbf{R}\}}(\mathbf{y}),$$

где $\alpha^{\mathbf{n}} = \alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2}...\alpha_N^{N}$, $\sum\limits_{\mathbf{n}=0}(\ldots) = \sum\limits_{n_1=0} \cdots \sum\limits_{n_N=0}(\ldots)$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ — N-мерный вектор с комплексными компонентами.

Гамильтониан (1) представлен в размерных переменных. Поскольку все размерные параметры входят в выражение для вероятности переходов в виде безразмерных комплексов, в качестве условной единицы частот может быть взята некоторая удобная частота (скажем, оптического диапазона: 10^{15} с$^{-1}$).

На рис. 1, 2 показаны вероятности переходов $F_{\mathbf{m}}(\mathbf{n}, t)$ (7) для $m_1 = m_2 = 1$ (рис. 1*a*, 2*a*), $m_1 = m_2 = 5$ (рис. 1*б*, 2*б*) фотонов в исходном состоянии $|\mathbf{m}, 0\rangle$. Рис. 1 соответствует сильной связи асимметричных мод ($\omega_1/\omega_2 = 3$, $\omega_0/\omega_2 = 2$, длительность связи мод $T\omega_2 = \pi/2$). Вероятность переходов носит ярко выраженный асимметричный характер,

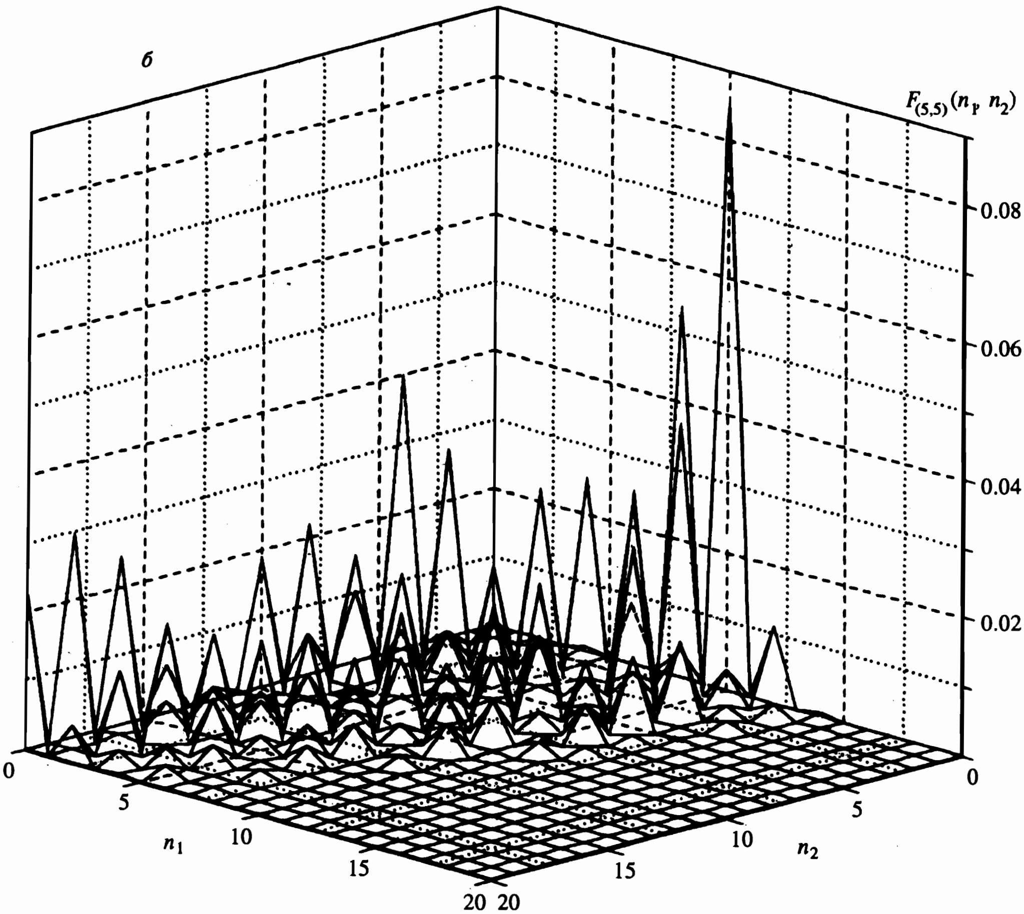

Рис. 2б

причем максимумы распределения сконцентрированы вдоль оси n_2, соответствующей низкочастотной моде. Возбуждение больших чисел фотонов в «красной» моде возникает исключительно в условиях сильной связи ($\omega_0^2 > \omega_1\omega_2$), когда матричные элементы канонического преобразования (4) возрастают экспоненциально. Эта аномалия фотонной статистики не наблюдается в условиях слабой связи, хотя частота связи может не быть мала по сравнению с модовыми частотами. Это видно на рис. 2*а*, *б*, где параметры те же, что и на рис. 1*а*, *б*, кроме $\omega_0/\omega_2 = 1.5$ (слабая связь).

Вероятность переходов (7) испытывает сильные четно-нечетные осцилляции, поскольку четномерный (в данном случае — четырехмерный) полином Эрмита с нулевым аргументом обращается в нуль для нечетной суммы своих индексов. Это правило отбора действует для произвольных квадратичных гамильтонианов вида (1) без линейных «токовых» членов (эти члены добавили бы комплексный вектор сдвига в каноническое преобразование (4), делая ненулевым аргумент полинома Эрмита). При увеличении чисел фотонов в исходном фоковском состоянии (см. рис. 1*б*) вероятность переходов приобретает медленно осциллирующую огибающую в любом сечении $F(n_1, n_2, t)$ при данном n_1 (или n_2). Это напоминает фотонную статистику в сжатом одномодовом состоянии [2] (см. также функции распределения фотонов в сжатом двухмодовом вакууме [6]).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несмотря на то что общие выражения для вероятностей переходов в многомодовых состояниях квадратичных систем известны давно [9, 10, 16], исследование фотонной статистики конкретных многомерных нестационарных систем по-прежнему представляет интерес. В настоящей работе проведено исследование вероятностей переходов между фоковскими состояниями двух мод с различными частотами под влиянием сильной связи мод, когда образование связанного состояния в двумерном потенциале осциллятора невозможно. В условиях сильной связи мод обнаружено сильное возбуждение низкочастотной моды (возрастает вероятность возбуждения больших чисел фотонов). Показан осциллирующий характер вероятности переходов как функции модовых чисел фотонов, подтверждающий сильно неклассическую природу формальных фоковских состояний связанных мод.

Авторы выражают признательность В. И. Манько за ценные обсуждения. С. Ю. К. благодарит Образовательную программу Сороса (ISSEP) за поддержку (Соросовская стипендия для аспирантов, грант № а96-1913) .

Литература

1. V. Bužek and P. L. Knight, in *Progress in Optics*, ed. by E. Wolf, Elsevier, Amsterdam (1995), Vol. XXXIV, p. 1; V. Bužek, G. Adam, and G. Drobný, Ann. Phys. **245**, 37 (1996).
2. W. Schleich and J. A. Wheeler, Nature **326**, 574 (1987); W. Schleich, J. A. Wheeler, and D. F. Walls, Phys. Rev. A **38**, 1177 (1988).
3. *Squeezed States of the Electromagnetic Field*, J. Opt. Soc. Amer. B **4**(10), (1987).
4. C. M. Caves and B. L. Schumaker, Phys. Rev. A **31**, 3068 (1985); B. L. Schumaker and C. M. Caves, Phys. Rev. A **31**, 3093 (1985).
5. S. M. Barnett and P. L. Knight, J. Opt. Soc. Amer. B **2**, 467 (1985).
6. G. Schrade, V. M. Akulin, V. I. Man'ko, and W. P. Schleich, Phys. Rev. A **48**, 2398 (1993).
7. M. Selvadoray, M. Sanjay Kumar, and R. Simon, Phys. Rev. A **49**, 4957 (1994).
8. В. В. Додонов, О. В. Манько, В. И. Манько, Труды ФИАН **191**, 224 (1989).
9. И. А. Малкин, В. И. Манько, *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем*, Наука, Москва (1979).
10. В. В. Додонов, В. И. Манько, Труды ФИАН **183**, 182 (1989).
11. H. R. Lewis, Phys. Rev. Lett. **18**, 510 (1967); H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).
12. I. A. Malkin and V. I. Man'ko, Phys. Lett. A **32**, 243 (1970).
13. I. A. Malkin, V. I. Man'ko, and D. A. Trifonov, Phys. Rev. D **2**, 1371 (1970).
14. I. A. Malkin, V. I. Man'ko, and D. A. Trifonov, J. Math. Phys. **14**, 576 (1973).
15. *Bateman Manuscript Project: Higher Transcendental Functions*, ed. by A. Erdélyi, McGraw-Hill, New York (1953); V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, J. Math. Phys. **35**, 4277 (1994).
16. V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, and V. I. Man'ko, Phys. Rev. A **50**, 813 (1994); В. В. Додонов, О. В. Манько, В. И. Манько, Кр. сообщ. физ. ФИАН (3–4), 43 (1994).