

## К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФФУЗИИ ПЛАВУЧЕЙ ПРИМЕСИ В СЛУЧАЙНОМ ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ

В. И. Кляцкин<sup>1,2</sup>, А. И. Саичев<sup>3</sup>

<sup>1)</sup> *Институт физики атмосферы Российской академии наук  
109017, Москва, Россия*

<sup>2)</sup> *Тихоокеанский океанологический институт  
Дальневосточного отделения Российской академии наук  
690041, Владивосток, Россия*

<sup>3)</sup> *Нижегородский государственный университет  
603600, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 16 июля 1996 г.

Плавающая примесь на поверхности несжимаемой жидкости ведет себя как примесь в двумерных сжимаемых потоках, характерной особенностью которых является образование кластерных структур — компактных областей повышенной плотности, окруженных обширными областями низкой плотности. Изучается динамика образования кластеров и вычисляются статистические пространственно-временные характеристики полей плотности, адекватно отражающие свойства указанных кластерных структур.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

При движении пассивной примеси в случайных несжимаемых потоках ее поле плотности, даже будучи вначале гладким в пространстве, со временем становится все более изрезанным, а линии постоянной плотности приобретают фрактальный характер [1, 2]. Этот процесс сопровождается уменьшением характерных пространственных масштабов поля плотности до тех пор, пока не становится существенным влияние молекулярной диффузии. Заметим, однако, что при усреднении плотности по ансамблю реализаций, тонкая структура реализаций поля плотности исчезает. Выявить ее удастся лишь на основе анализа вероятностных свойств поля плотности. Сказанное в еще большей степени применимо к реализациям плотности плавающей примеси. Ее главное отличие от несжимаемой примеси в том, что плавающая примесь на поверхности несжимаемой жидкости ведет себя как примесь в двумерных сжимаемых потоках. Соответственно, помимо описанных выше характерных особенностей плавающей примеси присущи качественно новые эффекты, и прежде всего, появление кластеров частиц, окруженных обширными областями низкой плотности.

Отметим, что впервые, по-видимому, кластеризация плавающей примеси была обнаружена в работах [3–5], где в рамках простейших уравнений динамики атмосферы проводилось численное моделирование так называемого Eole-эксперимента. В рамках этого глобального эксперимента предполагалось в 1970–1971 гг. запустить в Аргентине 500 баллонов постоянной плотности, которые распространились бы по всему южному полушарию на высоте примерно 12 км. Пространственное положение этих баллонов предполагалось фиксировать ежедневно с помощью системы спутников. К сожалению, этот эксперимент так и не состоялся.

Задача статистической теории диффузии плавучей примеси состоит в определении существенных качественных и количественных особенностей типичных реализаций плотности примеси по известным статистическим свойствам поля плотности или некоторых его функционалов. Эта проблема особенно актуальна для атмосферы и океана, где экспериментаторы, как правило, имеют дело не с ансамблями, а лишь с отдельными реализациями исследуемых полей. В данной работе в дельта-коррелированном приближении для случайного поля скорости исследованы вероятностные свойства поля плотности плавучей примеси, позволившие указать важные характерные особенности поведения реализаций плотности во времени и в пространстве. В идейном плане работа примыкает к работе [2] и может рассматриваться как ее продолжение. Отметим, что публикации на данную тему в научной литературе практически отсутствуют.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ

Эволюция плотности пассивной примеси, движущейся в поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , управляется уравнением

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = \mu \Delta \rho(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Его правая часть учитывает молекулярную диффузию с коэффициентом диффузии  $\mu$ , при этом общая масса примеси сохраняется в процессе эволюции, т. е.

$$M = \int \rho(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \int \rho_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \text{const.}$$

Поле скоростей полагается несжимаемым ( $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ ), статистически изотропным в пространстве и стационарным во времени случайным гауссовым полем с корреляционными и спектральными тензорами ( $\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle \equiv 0$ )

$$\langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle = B_{ij}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t'), \quad B_{ij}(r, t) = \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad (2)$$

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E(k, t) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Пусть плавучая примесь движется в плоскости  $z = 0$ , т. е. ее плотность представима в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \bar{\rho}(\mathbf{R}, t) \delta(z), \quad \mathbf{R} = (x, y), \quad \mathbf{r} = (\mathbf{R}, z). \quad (3)$$

Подставив это выражение в (1) и интегрируя его по всем  $z$ , получаем уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) \bar{\rho}(\mathbf{R}, t) + \frac{\partial U_\alpha(\mathbf{R}, t)}{\partial R_\alpha} \bar{\rho}(\mathbf{R}, t) = \mu \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} \bar{\rho}(\mathbf{R}, t). \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$  — проекция поля  $\mathbf{u}(\mathbf{R}, 0, t)$  на плоскость  $z = 0$ , а по повторяющимся индексам  $\alpha = 1, 2$  ведется суммирование. Так как мы будем изучать только свойства плавучей примеси, всюду ниже опустим тильду в обозначении ее плотности.

Очевидно, поле  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$  также гауссово, статистически изотропное в плоскости  $z = 0$  и стационарное во времени сжимаемое случайное поле с корреляционным тензором

$$\langle U_\alpha(\mathbf{R}, t) U_\beta(\mathbf{R}', t') \rangle = B_{\alpha\beta}(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|, t - t'),$$

где

$$B_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, t) = \int d\mathbf{k}_\perp \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{R}) \int_{-\infty}^{\infty} dk_z E(\mathbf{k}_\perp^2 + k_z^2, t) \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\perp\alpha} k_{\perp\beta}}{k_\perp^2 + k_z^2} \right).$$

Напомним общую формулу, связывающую корреляционный тензор с соленоидальной  $E^s(k_\perp, t)$  и потенциальной  $E^p(k_\perp, t)$  компонентами спектрального тензора произвольного сжимаемого статистически изотропного поля скоростей:

$$B_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, t) = \int d\mathbf{k}_\perp \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}) \left[ E^s(k_\perp, t) \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\perp\alpha} k_{\perp\beta}}{k_\perp^2} \right) + E^p(k_\perp, t) \frac{k_{\perp\alpha} k_{\perp\beta}}{k_\perp^2} \right].$$

Сравнив ее с предыдущим выражением, найдем, что соленоидальная и потенциальная компоненты спектрального тензора поля скорости на поверхности несжимаемой жидкости связаны со спектральным тензором самой жидкости равенствами

$$E^s(k_\perp, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z E(k_\perp^2 + k_z^2, t), \quad E^p(k_\perp, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z E(k_\perp^2 + k_z^2, t) \frac{k_z^2}{k_\perp^2 + k_z^2}.$$

В дальнейшем при расчете статистических свойств плотности плавучей примеси будем считать ее поле скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$  дельта-коррелированным во времени с корреляционным тензором

$$\langle u_\alpha(\mathbf{R}, t) u_\beta(\mathbf{R}', t') \rangle = 2B_{\alpha\beta}^{eff}(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|) \delta(t - t'), \quad (5)$$

где

$$B_{\alpha\beta}^{eff}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, t) dt = \int_0^{\infty} B_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, t) dt.$$

Обсуждение такой модели см., например, в [6, 7]. Заметим еще, что в силу статистической изотропности поля  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$  справедливы соотношения

$$B_{\alpha\beta}^{eff}(0) = \frac{1}{2} D_0 \delta_{\alpha\beta}, \quad \frac{\partial}{\partial R_\gamma} B_{\alpha\beta}^{eff}(0) = 0, \quad (6)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial R_\gamma \partial R_\delta} B_{\alpha\beta}^{eff}(0) = \frac{1}{8} D^s [3\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}] + \frac{1}{8} D^p [\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}],$$

где

$$D_0 = \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{k}_{\perp} [E^s(k_{\perp}, t) + E^p(k_{\perp}, t)] = \frac{4}{3} \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{k} E(k, t),$$

$$D^s = \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{k}_{\perp} k_{\perp}^2 E^s(k_{\perp}, t) = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{k} k^2 E(k, t), \quad (6')$$

$$D^p = \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{k}_{\perp} k_{\perp}^2 E^p(k_{\perp}, t) = \frac{2}{15} \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{k} k^2 E(k, t).$$

В этой работе мы будем пренебрегать эффектами молекулярной диффузии. Тогда уравнение (4) упрощается и принимает вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) \rho(\mathbf{R}, t) + \rho(\mathbf{R}, t) \frac{\partial U_{\alpha}(\mathbf{R}, t)}{\partial R_{\alpha}} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (7)$$

Это уравнение в частных производных 1-го порядка и может быть решено методом характеристик. Введя в рассмотрение характеристические кривые  $\mathbf{R}(t)$ , подчиняющиеся уравнению

$$\frac{d}{dt} \mathbf{R}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{R}, t), \quad \mathbf{R}(0) = \boldsymbol{\xi}, \quad (8)$$

перейдем от (7) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = - \frac{\partial U_{\alpha}(\mathbf{R}, t)}{R_{\alpha}} \rho(t), \quad \rho(0) = \rho_0(\boldsymbol{\xi}). \quad (9)$$

Решения уравнений (8), (9) имеют наглядную геометрическую интерпретацию. Они описывают эволюцию плотности в окрестности фиксированной частицы примеси, траектория которой задается равенством  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ . При этом, как видно из (9), плотность в сжимаемых потоках меняется, увеличиваясь в областях сжатия и уменьшаясь в областях разрежения среды. Решения системы (8), (9) зависят от начальной координаты частицы  $\boldsymbol{\xi}$ :

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t|\boldsymbol{\xi}), \quad \rho(t) = \rho(t|\boldsymbol{\xi}). \quad (10)$$

Компоненты вектора  $\boldsymbol{\xi}$ , однозначно определяющего положение произвольной частицы, называются ее лагранжевыми координатами. При этом уравнения (8), (9) соответствуют лагранжеву описанию эволюции поля плотности. Связь между эйлеровыми координатами  $\mathbf{R}$  частицы в неподвижной системе координат и ее лагранжевыми координатами задается равенством

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(t|\boldsymbol{\xi}). \quad (11)$$

Разрешив его относительно  $\boldsymbol{\xi}$ , получим соотношение, выражающее лагранжевы координаты через эйлеровы:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{R}). \quad (12)$$

Исключая затем с помощью (12) зависимость от  $\xi$  в последнем равенстве (10), вернемся к эйлерову описанию плотности:

$$\rho(\mathbf{R}, t) = \rho(t|\xi(t, \mathbf{R})). \quad (13)$$

### 3. УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ

Статистические свойства поля плотности удастся наиболее полно исследовать на основе уравнений Лиувилля. В данном разделе мы их выведем и обсудим структуру этих уравнений как для лагранжевых, так и эйлеровых вероятностных распределений поля плотности. Обсудим вначале лагранжево описание.

#### 3.1. Лагранжево описание

В лагранжевом представлении поведение пассивной примеси описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (8), (9). От них легко перейти к линейному уравнению Лиувилля в соответствующем фазовом пространстве. Получим его. Для этого введем в рассмотрение функцию

$$\Phi_{Lag}(t; \mathbf{R}, \rho|\xi) = \delta(\mathbf{R}(t|\xi) - \mathbf{R}) \delta(\rho(t|\xi) - \rho), \quad (14)$$

в форме записи которой явно учтено, что решение исходных динамических уравнений зависит от лагранжевых координат  $\xi$ . Дифференцируя (14) по времени и используя уравнения (8), (9), придем к эквивалентному исходной задаче уравнению в частных производных первого порядка, называемому уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{Lag}(t; \mathbf{R}, \rho|\xi) = \left[ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) + \frac{\partial U_\alpha(\mathbf{R}, t)}{\partial R_\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right] \Phi_{Lag}(t; \mathbf{R}, \rho|\xi), \quad (15)$$

$$\Phi_{Lag}(t; \mathbf{R}, \rho|\xi) = \delta(\xi - \mathbf{R}) \delta(\rho_0(\xi) - \rho). \quad (15')$$

Как известно (см., например, [6–8]), для перехода от лагранжева описания к эйлерову, необходимо ввести в рассмотрение матрицу перехода от лагранжевых к эйлеровым координатам:

$$j_{\alpha\beta}(t|\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} R_\alpha(t|\xi).$$

Дифференцируя (8) по компонентам вектора  $\xi$ , придем к уравнениям для элементов матрицы перехода:

$$\frac{d}{dt} j_{\alpha\beta}(t|\xi) = \frac{\partial U_\alpha(\mathbf{R}, t)}{\partial R_\gamma} j_{\gamma\beta}(t|\xi), \quad j_{\alpha\beta}(t=0|\xi) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Отсюда следует, что определитель  $j(t|\xi) = |j_{\alpha\beta}(t|\xi)|$  этой матрицы подчиняется уравнению

$$\frac{d}{dt} j(t|\xi) = \frac{\partial U_\alpha(\mathbf{R}, t)}{\partial R_\alpha} j(t|\xi), \quad j(t=0|\xi) = 1. \quad (16)$$

Поскольку поле  $j(t|\xi)$  является количественной мерой степени сжатия или растяжения физически бесконечно малых жидких частиц, назовем его расходимостью. Сопоставляя уравнения (9) и (16), видим, что

$$\frac{d}{dt} \{ \rho(t) j(t) \} = 0,$$

и, следовательно,

$$\rho(t|\xi) \equiv \rho_0(\xi) / j(t|\xi). \quad (17)$$

Включим в рассмотрение поле  $j(t|\xi)$ , т. е. заменим  $\Phi_{Lag}(t; \mathbf{R}, \rho|\xi)$  функцией

$$\Phi_{Lag}(t; \mathbf{R}, \rho, j|\xi) = \delta(\mathbf{R}(t|\xi) - \mathbf{R}) \delta(\rho(t|\xi) - \rho) \delta(j(t|\xi) - j). \quad (18)$$

Уравнение Лиувилля для нее очевидным образом обобщает уравнение (15):

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{Lag}(t; \mathbf{R}, \rho, j|\xi) = \left[ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) + \frac{\partial U_\alpha(\mathbf{R}, t)}{\partial R_\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial}{\partial j} j \right) \right] \Phi_{Lag}(t; \mathbf{R}, \rho, j|\xi), \quad (19)$$

$$\Phi_{Lag}(t=0; \mathbf{R}, \rho, j|\xi) = \delta(\xi - \mathbf{R}) \delta(\rho_0(\xi) - \rho) \delta(j - 1).$$

### 3.2. Эйлерово описание

Для описания статистических свойств поля плотности в эйлеровом представлении введем функцию, аналогичную (14):

$$\Phi_{Eul}(t; \mathbf{R}; \rho) = \delta(\rho(t, \mathbf{R}) - \rho). \quad (20)$$

Уравнение для нее легко получить как непосредственно из (7) (см., например, [7]), так и исходя из уравнения Лиувилля (19) в лагранжевом представлении. В самом деле, приняв во внимание равенство (12), запишем

$$\delta(\mathbf{R}(t|\xi) - \mathbf{R}) = \frac{1}{|\partial R_\alpha / \partial \xi_\beta|} \delta(\xi - \xi(t, \mathbf{R})) = \frac{1}{j(t|\xi)} \delta(\xi - \xi(t, \mathbf{R})).$$

Таким образом, с учетом связи (13) и определения (20) имеем

$$\Phi_{Lag}(t; \mathbf{R}, \rho, j|\xi) = \frac{1}{j} \delta(\xi - \xi(t, \mathbf{R})) \delta(j(t|\xi) - j) \Phi_{Eul}(t; \mathbf{R}; \rho). \quad (21)$$

Следовательно,

$$\Phi_{Eul}(t; \mathbf{R}; \rho) = \int d\xi \int j \Phi_{Lag}(t; \mathbf{R}, \rho, j|\xi) dj. \quad (22)$$

Домножая уравнение (19) на  $j$  и интегрируя его по  $j$  и  $\xi$ , найдем соответствующее уравнение Лиувилля в эйлеровом представлении:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) \Phi_{Eul}(t; \mathbf{R}; \rho) = \frac{\partial U_\gamma(\mathbf{R}, t)}{\partial R_\gamma} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \Phi_{Eul}(t; \mathbf{R}; \rho), \quad (23)$$

$$\Phi_{Eul}(0; \mathbf{R}; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{R}) - \rho). \quad (23')$$

## 4. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Перейдем к статистическому анализу хаотически движущейся плавучей примеси. Прежде всего обсудим такие важные характеристики частиц примеси как их положение в пространстве и плотность. Диффузия примеси в случайном поле скоростей в лагранжевом представлении описывается уравнением Лиувилля (19), а в эйлеровом представлении — уравнением (23). Усреднение их по ансамблю реализаций поля скоростей  $\{U\}$  приводит к уравнениям для одновременного лагранжева вероятностного распределения

$$P(t; \mathbf{R}, \rho, j | \xi) = \langle \Phi_{Lag}(t; \mathbf{R}, \rho, j | \xi) \rangle \quad (24)$$

и одноточечного эйлерова вероятностного распределения

$$P(t, \mathbf{R}; \rho) = \langle \Phi_{Eul}(t, \mathbf{R}; \rho) \rangle. \quad (25)$$

Главная проблема вывода указанных уравнений состоит в расщеплении корреляций поля скоростей  $U(\mathbf{R}, t)$  и функционально связанных с ним полей  $\Phi_{Lag}(t; \mathbf{R}, \rho, j | \xi)$ ,  $\Phi_{Eul}(t, \mathbf{R}; \rho)$ . Методы расщепления зависят от природы случайного поля  $U(\mathbf{R}, t)$ . Если оно гауссово, то расщепление производят с помощью формулы Фурутцу–Новикова (см., например, [6, 7]):

$$\langle U_\alpha(\mathbf{R}, t) \Phi[U] \rangle = \int d\mathbf{R}' \int dt' \langle U_\alpha(\mathbf{R}, t) U_\beta(\mathbf{R}', t') \rangle \left\langle \frac{\delta}{\delta U_\beta(\mathbf{R}', t')} \Phi[U] \right\rangle, \quad (26)$$

справедливой для произвольного функционала  $\Phi[U]$  гауссова поля  $U(\mathbf{R}, t)$  и являющейся, по сути, формулой интегрирования по частям в функциональном пространстве. В применении к дельта-коррелированному по времени полю  $U(\mathbf{R}, t)$  (5) равенство (26) упрощается и принимает вид

$$\langle U_\alpha(\mathbf{R}, t) \Phi[U] \rangle = \int d\mathbf{R}' B_{\alpha\beta}^{eff}(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|) \left\langle \frac{\delta}{\delta U_\beta(\mathbf{R}', t - 0)} \Phi[U] \right\rangle. \quad (27)$$

## 4.1. Лагранжево описание

Усреднив уравнение (19) по ансамблю реализаций случайного поля  $U(\mathbf{R}, t)$ , используя формулу (27) и принимая во внимание равенство

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta U_\beta(\mathbf{R}', t - 0)} \Phi_{Lag}(t; \mathbf{R}, \rho, j | \xi) = \\ - \left[ \frac{\partial}{\partial R_\beta} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') + \frac{\partial \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')}{\partial R_\beta} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial j} \right) \right] \Phi_{Lag}(t; \mathbf{R}, \rho, j | \xi), \end{aligned}$$

придем к следующему уравнению Фоккера–Планка для лагранжева вероятностного распределения (24):

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \mathbf{R}, \rho, j | \xi) = \left\{ \frac{1}{2} D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} + D^p \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial j} \rho j + \frac{\partial^2}{\partial j^2} j^2 \right) \right\} P(t; \mathbf{R}, \rho, j | \xi), \quad (28)$$

$$P(0; \mathbf{R}, \rho, j | \xi) = \delta(\xi - \mathbf{R}) \delta(\rho_0(\xi) - \rho) \delta(j - 1).$$

Решение уравнения (28) таково:

$$P(t; \mathbf{R}, \rho, j|\xi) = P(t; \mathbf{R}|\xi)P(t; j|\xi)\delta(\rho - \rho_0(\xi)/j), \quad (29)$$

где

$$P(t; \mathbf{R}|\mathbf{R}') = \exp\left\{\frac{1}{2}D_0t\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{R}^2}\right\}\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \frac{1}{2\pi D_0t}\exp\left[-\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2}{2D_0t}\right] \quad (30)$$

— вероятностное распределение координат частицы пассивной примеси, а

$$P(t; j|\xi) = \exp\left\{D^p t\frac{\partial^2}{\partial j^2}j^2\right\}\delta(j - 1) = \frac{1}{2j\sqrt{\pi\tau}}\exp\left\{-\frac{\ln^2(je^\tau)}{4\tau}\right\} \quad (31)$$

— вероятностное распределение поля расходимости в ее окрестности. В (31) и всюду ниже используется безразмерное время  $\tau = D^p t$ . Подчеркнем, что полученное решение (29) означает статистическую независимость координат  $\mathbf{R}(t|\xi)$  и расходимости  $j(t|\xi)$  в окрестности частицы с лагранжевыми координатами  $\xi$ , причем гауссово распределение (30) соответствует стандартному броуновскому движению частицы с параметрами

$$\langle\mathbf{R}(t|\xi)\rangle = \xi, \quad \sigma_{\alpha\beta}^2(t) = \langle[R_\alpha(t) - \xi_\alpha][R_\beta(t) - \xi_\beta]\rangle = D_0\delta_{\alpha\beta}t, \quad (32)$$

а логарифмически нормальное распределение (31) означает, что величина  $\chi(t|\xi) = \ln j(t|\xi)$  распределена по гауссову закону с параметрами

$$\langle\chi(t|\xi)\rangle = -\tau, \quad \sigma_\chi^2(t) = 2\tau. \quad (32')$$

Отсюда, как, впрочем, и непосредственно из уравнения (28), вытекают следующие выражения для моментов случайного поля расходимости:

$$\langle j^n(t|\xi) \rangle = \exp[n(n-1)\tau], \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (32'')$$

Подчеркнем, что средняя расходимость постоянна:  $\langle j(t|\xi) \rangle = 1$ , а ее высшие моменты экспоненциально возрастают со временем. Соответствующая интегральная функция распределения имеет вид

$$F(t; j) = \int_0^j P(t; j) dj = \Phi\left(\frac{\ln(je^\tau)}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad (33)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z \exp(-y^2) dy$$

— стандартный интеграл ошибок. Из (33) вытекает справедливая при  $\tau \gg 1$  полезная асимптотическая формула для вероятности превышения средней расходимости:

$$P(j(t|\xi) > 1) = \Phi\left(-\frac{\sqrt{\tau}}{2}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right). \quad (34)$$



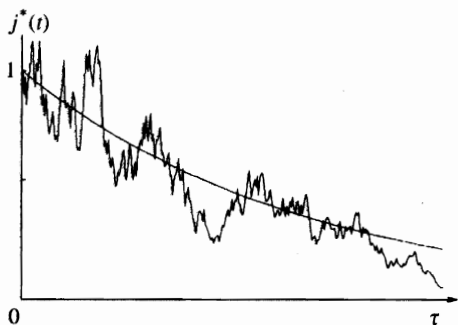


Рис. 1. К определению «типичной реализации» случайного процесса  $j(t)$

Заметим еще, что согласно (32'') и (17) имеем следующее выражение для лагранжевых моментов плотности:

$$\langle \rho^n(t|\xi) \rangle = \rho_0^n(\xi) \exp[n(n+1)\tau], \quad (35)$$

означающее, в частности, экспоненциальный рост как средней плотности, так и ее высших моментов в лагранжевом представлении. При этом совместное вероятностное распределение плотности и расходимости имеет вид

$$P(t; \rho, j|\xi) = P(t; j|\xi) \delta(\rho - \rho_0(\xi)/j), \quad (36)$$

где  $P(t; j|\xi)$  описывается выражением (31). Интегрируя равенство (36) по  $j$ , получим лагранжево вероятностное распределение плотности:

$$P(t; \rho|\xi) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{\ln^2(\rho e^{-\tau}/\rho_0(\xi))}{4\tau}\right\}. \quad (37)$$

Его можно получить и как решение уравнения Фоккера–Планка, следующего из (28):

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \mathbf{R}, \rho|\xi) = \left\{ \frac{1}{2} D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} + D^p \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right\} P(t; \mathbf{R}, \rho|\xi), \quad (38)$$

$$P(0; \mathbf{R}, \rho|\xi) = \delta(\xi - \mathbf{R}) \delta(\rho_0(\xi) - \rho).$$

Выявленное выше парадоксальное поведение статистических характеристик расходимости и плотности, состоящее в одновременном возрастании со временем их моментных функций, объясняется свойствами логарифмически нормального распределения вероятностей [9]. Так, можно ввести детерминированную «типичную реализацию»  $j^*(t)$  случайного процесса  $j(t|\xi)$ , такую, что на любом интервале времени  $(t_1, t_2)$  среднее время выполнения неравенства  $j(t|\xi) < j^*(t)$  совпадает со средним временем выполнения обратного неравенства  $j(t|\xi) > j^*(t)$ , равным  $(t_2 - t_1)/2$  (рис. 1). Типичная реализация определяется как решение уравнения  $F(t; j^*(t)) = 1/2$ , где  $F(t; j)$  — интегральная функция распределения, и для логарифмически нормального распределения  $j^*(t) = \exp\{-\ln j(t|\xi)\}$ . Таким образом, из (32') вытекает, что типичной реализацией случайной расходимости является экспоненциально спадающая зависимость:

$$j^*(t) = \exp(-\tau). \quad (39)$$

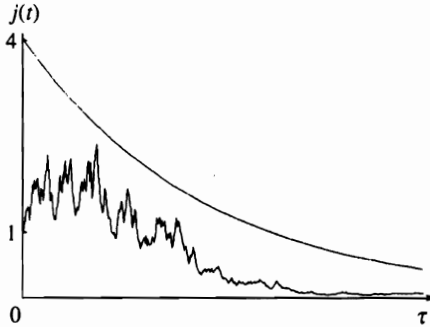


Рис. 2. К определению «мажорантной кривой» случайного процесса  $j(t)$

При этом для реализаций логарифмически нормального процесса  $j(t|\xi)$  существуют мажорантные оценки [9]. Так, с вероятностью  $p = 1/2$

$$j(t|\xi) < 4 \exp(-\tau/2)$$

на всем интервале времени  $t \in (0, \infty)$ . Графики этой мажорантной зависимости и лежащей под ней реализации  $j(t|\xi)$  изображены на рис. 2. Аналогично, для реализаций плотности имеем типичную реализацию и минорантную оценку:

$$\rho^*(t) = \rho_0 \exp(\tau), \quad \rho(t|\xi) > \rho_0 \exp(\tau/2)/4.$$

Подчеркнем, что исследованные выше лагранжевы статистические свойства плавучей примеси в сжимаемых потоках качественно отличаются от свойств примеси в несжимаемых средах [1, 2, 6, 8], где  $j(t|\xi) \equiv 1$ , а плотность в окрестности фиксированной частицы сохраняется:  $\rho(t|\xi) = \rho_0(\xi) = \text{const}$ . Приведенные выше оценки для плавучей примеси означают, что статистика случайных процессов  $j(t|\xi)$  и  $\rho(t|\xi)$  формируется выбросами их реализаций относительно типичных реализаций.

В то же время распределения вероятностей координат частиц в обоих случаях сжимаемого и несжимаемого поля скоростей по сути одинаковы.

Аналогичным образом можно рассмотреть и относительную диффузию двух частиц. Так, для величины  $I(t) = R_1(t) - R_2(t)$  имеем динамическое уравнение

$$\frac{d}{dt} I(t) = U(R_1, t) - U(R_2, t), \quad I(0) = I_0,$$

которому соответствует уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; I) = \frac{\partial^2}{\partial I_\alpha \partial I_\beta} D_{\alpha\beta}(I) P(t; I), \quad P(0; I) = \delta(I - I_0), \quad (40)$$

где  $D_{\alpha\beta}(I) = 2[B_{\alpha\beta}^{eff}(0) - B_{\alpha\beta}^{eff}(I)]$  — структурная матрица векторного поля  $U(R, t)$ . В общем случае решить уравнение (40) не удастся. Однако, если начальное расстояние между частицами  $l_0 \ll l_{cor}$ , где  $l_{cor}$  — пространственный радиус корреляции поля скоростей  $U(R, t)$ , то можно разложить функции  $D_{\alpha\beta}(I)$  в ряд Тейлора, в результате чего в первом приближении получаем

$$D_{\alpha\beta}(I) = - \left. \frac{\partial^2 B_{\alpha\beta}^{eff}(I)}{\partial I_\alpha \partial I_\beta} \right|_{I=0} I_\alpha I_\beta.$$

С использованием представления (6) диффузионный тензор  $D_{\alpha\beta}(\mathbf{l})$  упрощается и может быть записан в виде

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = \frac{1}{8} [3D^s + D^p] l^2 \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} [D^s - D^p] l_\alpha l_\beta. \quad (41)$$

Подставляя теперь (41) в (40), умножая обе части получившегося уравнения на  $l^n$  и интегрируя по  $\mathbf{l}$ , получаем замкнутое уравнение

$$\frac{d}{dt} \langle l^n(t) \rangle = \frac{1}{8} n [n(D^s + 3D^p) + 2(D^s - D^p)] \langle l^n(t) \rangle,$$

решение которого соответствует экспоненциально растущим во времени функциям для всех моментов ( $n = 1, 2, \dots$ ). При этом распределение вероятностей для случайного процесса  $l(t)/l_0$  будет логарифмически нормальным с параметрами

$$\left\langle \ln \left[ \frac{l(t)}{l_0} \right] \right\rangle = \frac{1}{4} (D^s - D^p) t, \quad \sigma_{\ln[l(t)/l_0]}^2 = \frac{1}{4} (D^s + 3D^p) t.$$

Следовательно, типичной реализацией для расстояния между двумя частицами будет экспоненциальная функция времени

$$l^*(t) = l_0 \exp \left\{ \frac{1}{4} (D^s - D^p) t \right\},$$

возрастающая или затухающая в зависимости от знака разности  $D^s - D^p$ . В частности, для несжимаемого случая ( $D^p = 0$ ) имеем экспоненциально возрастающую типичную реализацию, что соответствует экспоненциально быстрому разбеганию частиц при малых расстояниях между ними. Этот результат справедлив для времен

$$\frac{1}{4} D^s t \ll \ln \left( \frac{l_{cor}}{l_0} \right),$$

при которых справедливо разложение (41). В другом предельном случае — в потенциальном поле скоростей ( $D^s = 0$ ) — типичной реализацией будет экспоненциально убывающая зависимость, т. е. налицо стремление частиц «слиться». Учитывая, что при этом сами жидкие частицы сжимаются, мы видим, что в этом случае должны образовываться кластеры, т. е. зоны компактного сосредоточения частиц, расположенные в большей степени в разреженных зонах. На рис. 3 представлены результаты численного моделирования эволюции реализации однородного вначале распределения частиц в случайном потенциальном поле скоростей (по материалам работы [10]), убедительно подтверждающие вывод об образовании кластеров. Эта картина очень напоминает картину возникновения каустик оптического поля в случайно-неоднородных средах. Последнее неслучайно, поскольку динамика оптического излучения в приближении геометрической оптики также описывается стохастическим уравнением (7), где  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$  — градиент флуктуаций фазы волны (параметр  $t$  играет роль расстояния, пройденного волной, а роль плотности играет интенсивность оптической волны). Подобную картину можно наблюдать на дне бассейна или на морском мелководье в солнечный день при легкой взволнованности поверхности воды.

Возвращаясь к анализу задачи о диффузии плавучей примеси в случайном поле скоростей, видим, что в силу (6') величина  $D^s - D^p > 0$  и, следовательно, в начальный, относительно малый, промежуток времени близко расположенные частицы должны разбегаться. Тем не менее наличие потенциальной составляющей поля скоростей

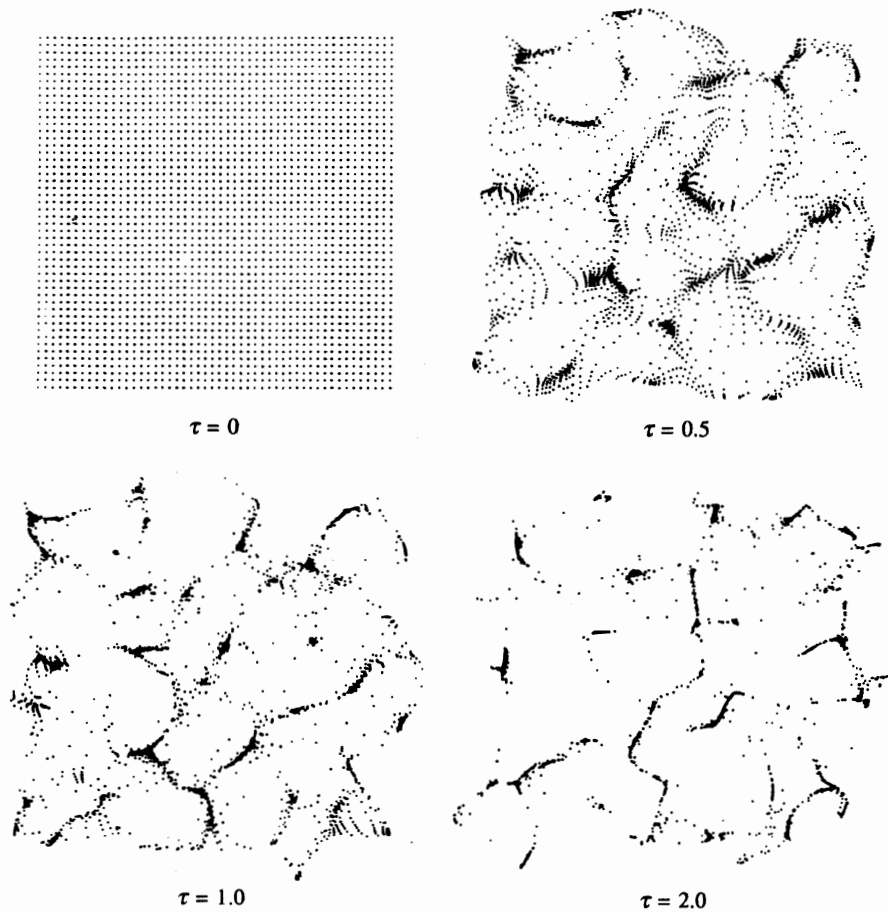


Рис. 3. Эволюция во времени равномерного в начальный момент распределения частиц в реализации потенциального случайного поля скоростей

$U(\mathbf{R}, t)$ , как будет показано ниже, обеспечивает кластеризацию поля плотности на больших временах.

### 3.2. Эйлерово описание

Прежде всего отметим, что в случае дельта-коррелированного случайного поля скоростей от линейного уравнения (4) сравнительно легко перейти к замкнутым уравнениям как для средней плотности плавучей примеси, так и для ее высших моментных функций. Например, усреднив уравнение (4), используя формулу Фурутцу–Новикова (27) и вытекающее из (4) выражение для вариационной производной

$$\frac{\delta \rho(\mathbf{R}, t)}{\delta U_\alpha(\mathbf{R}', t - 0)} = -\frac{\partial}{\partial R_\alpha} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \rho(\mathbf{R}, t),$$

получим уравнение для средней плотности примеси:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho(\mathbf{R}, t) \rangle = \left( \frac{1}{2} D_0 + \mu \right) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} \langle \rho(\mathbf{R}, t) \rangle. \quad (42)$$

При выполнении условия  $D_0 \gg \mu$  ( $\mu \ll \sigma_u^2 l_{cor}^2$ , где  $\sigma_u^2$  — дисперсия случайного поля скоростей, а  $l_{cor}$  — его радиус корреляции), уравнение (42) совпадает с уравнением для вероятностного распределения координат частицы (30) и, следовательно, коэффициент диффузии  $D_0$ , аналогично коэффициенту диффузии в несжимаемом случайном поле скоростей, характеризует лишь масштабы области сосредоточения примеси в целом, не неся информации о локальной структуре реализаций плотности.

Для описания локального поведения реализаций плавучей примеси нужно знать вероятностное распределение ее плотности. В пренебрежении молекулярной диффузией уравнение для эйлерова вероятностного распределения плотности легко вывести, домножив уравнение (28) на  $j$  и интегрируя его по всем возможным значениям  $j$  и  $\xi$ . В итоге находим уравнение для вероятностного распределения (25):

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} \right) P(t, \mathbf{R}; \rho) = D^p \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t, \mathbf{R}; \rho), \quad (43)$$

$$P(0, \mathbf{R}; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{R}) - \rho).$$

Отсюда, в частности, следует, что моментные функции поля плотности описываются уравнением

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} \right) \langle \rho^n(\mathbf{R}, t) \rangle = D^p n(n-1) \langle \rho^n(\mathbf{R}, t) \rangle, \quad \langle \rho^n(\mathbf{R}, 0) \rangle = \rho_0^n(\mathbf{R}). \quad (44)$$

Его решение имеет структуру

$$\langle \rho^n(\mathbf{R}, t) \rangle = \exp[n(n-1)\tau] \int d\mathbf{R}' P(t; \mathbf{R}|\mathbf{R}') \rho_0^n(\mathbf{R}'). \quad (45)$$

Так, если начальная плотность примеси всюду одинакова,  $\rho_0(\mathbf{R}) = \rho_0 = \text{const}$ , то вероятностное распределение плотности не зависит от  $\mathbf{R}$  и логарифмически нормально с интегральной функцией распределения

$$F(t; \rho) = \Phi \left( \frac{\ln(\rho e^\tau / \rho_0)}{2\sqrt{\tau}} \right). \quad (46)$$

При этом

$$\langle \rho(\mathbf{R}, t) \rangle = \rho_0, \quad \langle \rho^n(\mathbf{R}, t) \rangle = \rho_0^n \exp[n(n-1)\tau], \quad (47)$$

а типичная реализация поля плотности в любой заданной точке равна

$$\rho^*(t) = \rho_0 \exp(-\tau). \quad (48)$$

Формирование эйлеровой статистики плотности идет за счет флуктуаций плотности вокруг этой кривой, что свидетельствует о наличии кластерного характера флуктуаций плотности среды в произвольных сжимаемых потоках и, в частности, в обсуждаемом случае плавучей примеси.

## 5. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТОПОГРАФИИ

Выше мы обсудили одноточечное вероятностное распределение плотности примеси в эйлеровом представлении, что уже позволило сделать ряд заключений о поведении реализаций поля плотности во времени в фиксированных точках пространства. Покажем теперь, что это распределение дает также возможность выяснить некоторые характерные особенности пространственно-временной структуры реализаций поля плотности. Заметим, что важные сведения о пространственном поведении реализаций несет анализ линий уровня, определяемых равенством

$$\rho(\mathbf{R}, t) = \rho = \text{const}, \quad (49)$$

площадей областей, ограниченных этими линиями уровня,

$$S(t, \rho) = \int \theta(\rho(\mathbf{R}, t) - \rho) d\mathbf{R}, \quad (50)$$

и общей массы примеси, заключенной в этих областях,

$$M(t, \rho) = \int \rho(\mathbf{R}, t) \theta(\rho(\mathbf{R}, t) - \rho) d\mathbf{R}. \quad (51)$$

Здесь  $\theta(z) = 1$  при  $z > 0$  и  $\theta(z) = 0$  в противном случае (ступенчатая функция Хевисайда). Статистические средние указанных выше площадей и масс очевидным образом выражаются через решение уравнения (43):

$$\langle S(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} d\bar{\rho} \int d\mathbf{R} P(t, \mathbf{R}; \bar{\rho}), \quad \langle M(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} \bar{\rho} d\bar{\rho} \int d\mathbf{R} P(t, \mathbf{R}; \bar{\rho}). \quad (52)$$

Подставив сюда решение уравнения (43), после несложных преобразований найдем явные выражения для средних площади и массы частиц внутри контуров равного уровня (49):

$$\begin{aligned} \langle S(t, \rho) \rangle &= \int d\mathbf{R} \Phi \left( \frac{\ln [\rho_0(\mathbf{R}) e^{-\tau} / \rho]}{2\sqrt{\tau}} \right), \\ \langle M(t, \rho) \rangle &= \int \rho_0(\mathbf{R}) d\mathbf{R} \Phi \left( \frac{\ln [\rho_0(\mathbf{R}) e^{\tau} / \rho]}{2\sqrt{\tau}} \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Отсюда видно, в частности, что при  $\tau \gg 1$  площадь областей, где плотность выше уровня  $\rho$ , экспоненциально убывает со временем:

$$\langle S(t, \rho) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau\rho}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right) \int \sqrt{\rho_0(\mathbf{R})} d\mathbf{R}, \quad (54)$$

в то время как заключенная в этих областях масса примеси

$$\langle M(t, \rho) \rangle = M - \sqrt{\frac{\rho}{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right) \int \sqrt{\rho_0(\mathbf{R})} d\mathbf{R} \quad (55)$$

монотонно стремится к полной ее массе

$$M = \int \rho_0(\mathbf{R}) d\mathbf{R}.$$

Это еще раз подтверждает сделанный ранее вывод о том, что частицы примеси со временем стремятся собираться в кластеры — компактные области повышенной плотности, окруженные разреженными областями.

Динамику формирования кластеров можно проиллюстрировать на примере, когда первоначально плавучая примесь равномерно распределена по плоскости:  $\rho_0(\mathbf{R}) = \rho_0 = \text{const}$ . При этом, по аналогии с (52), удельная площадь областей, внутри которых  $\rho(\mathbf{R}, t) > \rho$ , равна

$$s(t, \rho) = \int_{\rho}^{\infty} P(t; \bar{\rho}) d\bar{\rho} = \Phi \left( \frac{\ln(\rho_0 e^{-\tau} / \rho)}{2\sqrt{\tau}} \right), \quad (56)$$

где  $P(t, \rho)$  — не зависящее от  $\mathbf{R}$  решение уравнения (43), а удельная средняя масса примеси, сосредоточенная в этих областях, описывается выражением

$$m(t, \rho) = \frac{1}{\rho_0} \int_{\rho}^{\infty} \bar{\rho} P(t; \bar{\rho}) d\bar{\rho} = \Phi \left( \frac{\ln(\rho_0 e^{\tau} / \rho)}{2\sqrt{\tau}} \right). \quad (57)$$

Из (56), (57) следует, что на больших временах их удельная площадь экспоненциально убывает,

$$s(t, \rho_0) = \Phi \left( -\frac{\sqrt{\tau}}{2} \right) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp \left( -\frac{\tau}{4} \right), \quad (58)$$

независимо от отношения  $\rho/\rho_0$ , в то время как внутри них собираются практически все частицы примеси:

$$m(t, \rho_0) = \Phi \left( \frac{\sqrt{\tau}}{2} \right) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp \left( -\frac{\tau}{4} \right). \quad (59)$$

Характер же временной эволюции образования кластерной структуры существенно зависит от отношения  $\rho/\rho_0$ . Так, если  $\rho/\rho_0 < 1$ , то в начальный момент времени  $s(0, \rho) = 1$  и  $m(0, \rho) = 1$ . Далее, в силу того что частицы плавучей примеси первое время стремятся разбежаться, образуются небольшие области, где  $\rho(\mathbf{R}, t) < \rho$ , содержащие незначительную часть общей массы. С течением времени эти области быстро увеличиваются, а их масса перетекает в кластерные области, довольно быстро выходя на асимптотические зависимости (58), (59) (рис. 4а). Отметим еще, что в момент времени  $\tau^* = \ln(\rho_0/\rho)$  величина площади  $s(t^*, \rho) = 1/2$ .

В противоположном случае  $\rho/\rho_0 > 1$  в начальный момент времени  $s(0, \rho) = 0$  и  $m(0, \rho) = 0$ . Из-за начального разбегания частиц образуются небольшие кластерные области, где  $\rho(\mathbf{R}, t) > \rho$ , практически сохраняющиеся во времени и интенсивно втягивающие в себя значительную часть общей массы (рис. 4б). В дальнейшем площади этих областей с течением времени уменьшаются, а содержащаяся в них масса увеличивается согласно асимптотическим зависимостям (58), (59) (рис. 4в).

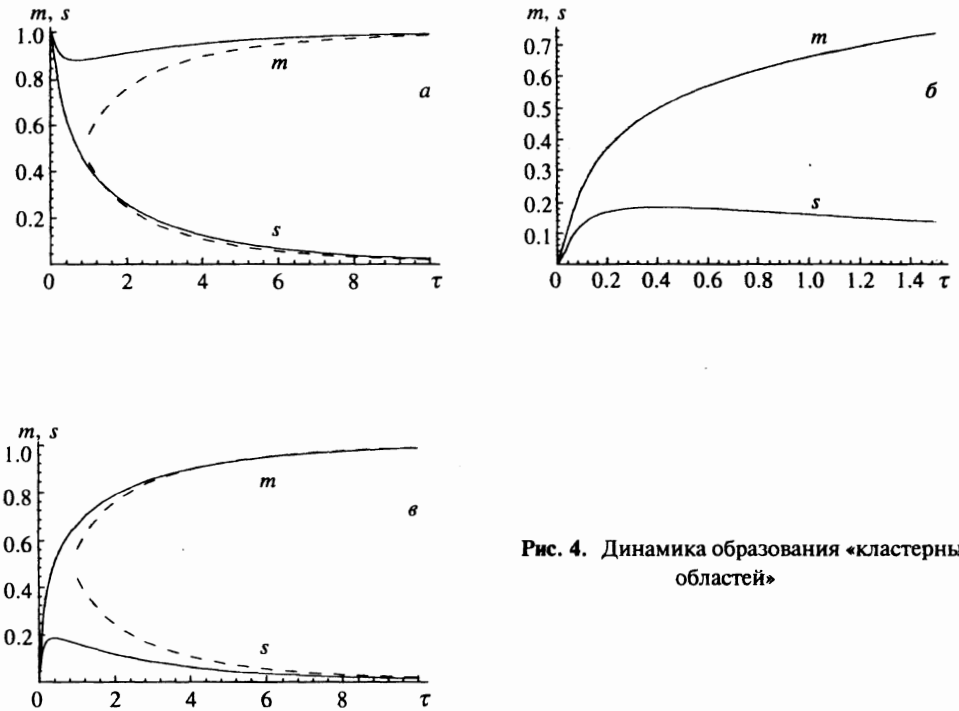


Рис. 4. Динамика образования «кластерных областей»

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы подробно обсудили одноточечные вероятностные свойства плавучей примеси, движущейся в сжимаемом хаотическом поле скоростей. Как показано в работе, уже простейшие статистические характеристики полей плотности и расходимости позволяют сделать полезные выводы о тонкой структуре поля плотности и, в частности, о кластеризации плавучей примеси. Более полная статистическая топография примеси, включающая, например, определение статистики длин контуров уровня, число контуров, масс заключенных в кластерах частиц и т. д., требует знания вероятностных свойств градиентов поля плотности и его высших производных [2, 8, 11]. Заметим, что выводы данной работы применимы не только к идеализированному случаю плавучей примеси на плоскости  $z = 0$ , но и к более реальной взволнованной поверхности  $z = Z(\mathbf{R}, t)$ , на которой распределена плавучая примесь. В самом деле, при этом вместо (3) имеем

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \bar{\rho}(\mathbf{R}, t)\delta(Z(\mathbf{R}, t) - z),$$

где функция  $\bar{\rho}(\mathbf{R}, t)$  подчиняется уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{R}, Z(\mathbf{R}, t), t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\right) \bar{\rho}(\mathbf{R}, t) + \frac{\partial U_\alpha(\mathbf{R}, Z(\mathbf{R}, t), t)}{\partial R_\alpha} \bar{\rho}(\mathbf{R}, t) = 0.$$

Легко видеть, что при статистически независимых поле скоростей и взволнованной поверхности в приближении дельта-коррелированности поля скоростей, статистические



свойства плотности не зависят от волнения поверхности и совпадают с изученными выше свойствами плотности примеси на идеальной плоскости.

Авторы признательны Е. М. Добрышману, обратившему наше внимание на работы [3–5]. Настоящая работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 95-05-14247 и 96-05-65347).

## Литература

1. V. I. Klyatskin and W. A. Woyczynski, ЖЭТФ **108**, 1403 (1995).
2. V. I. Klyatskin, W. A. Woyczynski, and D. Gurarie, J. Stat. Phys. **84**, 797 (1996).
3. F. Mesinger and Y. Mintz, Tech. Rep. № 4 Dep. of Meteorology, University of California, Los Angeles (1970).
4. F. Mesinger and Y. Mintz, Tech. Rep. № 5 Dep. of Meteorology, University of California, Los Angeles (1970).
5. F. Mesinger, Monthly Weather Rev. **99**(1), 15 (1971).
6. В. И. Кляцкин, УФН **164**, 531 (1994).
7. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах*, Наука, Москва (1980).
8. A. I. Saichev and W. A. Woyczynski, in *Stochastic Models in Geosystems*, IMA Vol. 85, Springer-Verlag, New York (1996), p. 359.
9. В. И. Кляцкин, А. И. Саичев, УФН **162**, 161 (1992).
10. C. L. Zirbel and E. Çinlar, in *Stochastic Models in Geosystems*, IMA Vol. 85, Springer-Verlag, New York (1996), p. 459.
11. M. B. Isichenko, Rev. Mod. Phys. **64**, 961 (1992).