

## ВОЛЬТ-АМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТУННЕЛЬНЫХ КОНТАКТОВ МЕЖДУ СВЕРХПРОВОДНИКАМИ С АНИЗОТРОПНЫМ СПАРИВАНИЕМ

Ю. С. Бараш, А. А. Свидзинский

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
117924, Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 сентября 1996 г.

Исходя из уравнений Эйленбергера для квазиклассических функций Грина проведение теоретического рассмотрения переноса заряда в туннельных контактах между сверхпроводниками с анизотропным синглетным спариванием. При условии зеркального отражения электронов от границ туннельного барьера аналитически рассмотрены новые сингулярности вольт-амперных характеристик, которые характерны для случая анизотропного спаривания. Исследованы все четыре вклада в туннельный ток. Два из них описывают джозефсоновское туннелирование, другие два вклада соответствуют току квазичастиц (последнее слагаемое возникает только для переменного напряжения). Рассмотрены различные зависимости параметра порядка от направлений импульса в глубине сверхпроводников и различные ориентации кристаллических осей относительно плоскости контакта. Приведены результаты численных расчетов вольт-амперных характеристик для некоторых частных случаев.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Для сверхпроводников с изотропным спариванием вопрос о переносе заряда через туннельный контакт был теоретически рассмотрен еще тридцать лет назад. В частности, детальное микроскопическое описание полного туннельного тока, возникающего при переменном внешнем напряжении на контакте, было проведено с использованием метода туннельного гамильтониана Ларкиным и Овчинниковым [1] и Вертхаммером [2] (см. также [3] и указанную там литературу). В последнее время стало ясно, что для сверхпроводников с анизотропным спариванием измерения джозефсоновского и квазичастичного токов дают важную информацию о структуре сверхпроводящего параметра порядка с обеих сторон контакта, об эффекте близости и о некоторых других поверхностных эффектах вблизи плоскости туннельного контакта сверхпроводников [4–9]. Исследования в этой области привлекли большое внимание, в первую очередь, в связи с важностью определения структуры анизотропного сверхпроводящего параметра порядка для различных высокотемпературных сверхпроводников (см., например, [10, 11]).

Одной из характерных особенностей микроскопического описания переноса заряда через туннельные контакты между сверхпроводниками с анизотропным спариванием является неэффективность метода туннельного гамильтониана для этого случая [12]. Этот метод, обычно успешно применяемый для туннельных контактов между сверхпроводниками с изотропным спариванием, для случая анизотропного спаривания содержит неопределенности из-за существенной зависимости от импульса матричных элементов, описывающих туннелирование между сверхпроводниками. Выбор матричных элементов независимыми от направлений импульса (что допустимо для изотропного  $s$ -спаривания) приводит для анизотропного спаривания к неверным результатам. В то же

время импульсная зависимость туннельных матричных элементов не может быть получена в рамках этого метода. Использование же последовательного микроскопического описания туннелирования заряда между сверхпроводниками, основанного на вычислении электронных пропагаторов на туннельном барьере, не содержит неопределенностей, присущих методу туннельного гамильтониана.

В предлагаемой работе проводится аналитическое исследование сингулярностей вольт-амперных характеристик (ВАХ) туннельных контактов между сверхпроводниками с анизотропным спариванием, к которым приложено внешнее, вообще говоря, переменное напряжение. Мы используем микроскопический подход, основывающийся на микроскопическом выражении для туннельного тока и на решении уравнений Эйленберга вместе с соответствующими граничными условиями для квазиклассических электронных пропагаторов. В частном случае контакта между сверхпроводниками с изотропным спариванием наши результаты совпадают с результатами, найденными в [1]. В [1] получены общие выражения и описаны сингулярные точки функций  $I_m(V)$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ), которые входят в выражение для полного туннельного тока (см. ниже, например (6), (7)). Функции  $I_{1,2}(V)$  играют роль амплитуд в выражении для джозефсоновского тока, которое для постоянного напряжения сводится к

$$I_1(V) \sin \left( \chi_1 - \chi_2 + 2 \frac{eVt}{\hbar} \right) + I_2(V) \cos \left( \chi_1 - \chi_2 + 2 \frac{eVt}{\hbar} \right).$$

Функции  $I_{3,4}(V)$  описывают ток квазичастиц. Функция  $I_4(V)$  возникает только в случае переменного напряжения, для постоянного напряжения квазичастичный ток сводится только к одному слагаемому  $I_3(V)$ . В частности, было показано, что при напряжении  $|eV| = \Delta_1 + \Delta_2$  величины  $I_{1,4}(V)$  логарифмически расходятся, в то время как  $I_{2,3}(V)$  имеют скачок. Аналогичные сингулярности были найдены для переменного напряжения осциллирующего с частотой  $\hbar\omega = \Delta_1 + \Delta_2$ . Расходимость функции  $I_1$  называют риделевским пиком [13]. Эта расходимость в  $I_1$  связана с соответствующей сингулярностью в плотности состояний сверхпроводников при  $\hbar\omega = \Delta$ .

В случае анизотропного спаривания, когда плотность состояний не имеет расходимости, риделевский пик, разумеется, будет размыт. Тем не менее, как показано ниже, некоторые новые характерные сингулярности ВАХ возникают при определенных условиях как раз вследствие анизотропии параметра порядка, а часть из них обусловлена сменой знака параметра порядка на поверхности Ферми. Характерное поведение ВАХ может существенно зависеть от ориентаций кристаллических осей сверхпроводников по отношению к плоскости контакта. Эта ориентация определяет пространственное поведение параметра порядка вблизи данной плоскости. Но даже в простейшем случае однородного распределения сверхпроводящего параметра порядка с обеих сторон контакта особенности ВАХ сильно изменяются по сравнению со случаем изотропного спаривания. Дело в том, что для сверхпроводников с анизотропным синглетным спариванием функции  $I_m(V)$  становятся также зависящими от направления импульса на поверхности Ферми и для нахождения туннельного тока эти функции надо проинтегрировать с некоторым весом по поверхности Ферми. Мы получили, что для ориентаций кристаллических осей, когда нет подавления параметра порядка с обеих сторон контакта неаналитическое поведение ВАХ имеет место только для напряжений  $|eV|$ , которые равны значениям выражений  $|\Delta_2(\hat{p}_2)| \pm |\Delta_1(\hat{p}_1)|$  в точках их экстремумов. Здесь  $\hat{p}_1$  — направление импульса падающей на границу туннельного барьера квазичастицы, а  $\hat{p}_2$  — направление импульса прошедшей квазичастицы, которое непосредственно связано с

$\hat{p}_1$  и с формами поверхностей Ферми контактирующих металлов. Приведенные выражения рассматриваются, например, как функции  $\hat{p}_1$ . Оказывается, что сингулярности ВАХ сильно зависят от типов экстремумов этих выражений. Впервые на это было указано в работе [7], в которой рассматривалось характерное поведение ВАХ для квази-частичного тока при низких температурах и кристаллических ориентациях, когда нет подавления параметра порядка с обеих сторон контакта.

Ситуация становится более сложной для кристаллических ориентаций, для которых параметр порядка вблизи плоскости контакта существенно подавлен. В этом случае возможно появление квазичастичных связанных состояний, локализованных вблизи плоскости контакта. Среди них можно выделить связанное состояние с нулевой энергией, которое возникает при определенных довольно общих условиях [8, 14–17]. В случае непроницаемой и зеркально отражающей границы такое состояние возникает всегда для квазичастиц, импульсам падения и отражения которых отвечают разные знаки параметра порядка в объеме сверхпроводника. Помимо таких универсальных локализованных вблизи границы состояний могут присутствовать также связанные состояния квазичастиц с не равной нулю энергией, значение которой обусловлено конкретным профилем изменения параметра порядка вблизи поверхности [8]. Ниже мы рассматриваем оба типа связанных состояний и их проявления в ВАХ.

## 2. МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ТУННЕЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Рассмотрим туннельный контакт с коэффициентом прозрачности  $D \ll 1$  и с зеркально отражающей плоскостью потенциального барьера между двумя чистыми сверхпроводниками с синглетным спариванием. Будем считать, что к контакту приложено внешнее напряжение  $V(t) = \Phi_2(t) - \Phi_1(t)$ . Ось  $x$  выберем так, чтобы она была параллельна нормали к плоскости контакта:  $\mathbf{n} \parallel x$ . В первом порядке по прозрачности  $D$  микроскопическое выражение для плотности туннельного тока может быть записано в следующем виде [18]:

$$j_x = -\frac{1}{8\pi^3} \int_{v_{x1} > 0} \frac{d^2 S_1 v_{x1}}{4\pi v_{f1}} \text{Sp} \{ \hat{\tau}_3 D(\hat{\mathbf{p}}_1) (\hat{g}_1^R \hat{g}_2^K + \hat{g}_1^K \hat{g}_2^A - \hat{g}_2^R \hat{g}_1^K - \hat{g}_2^K \hat{g}_1^A)_0(t, t) \}. \quad (1)$$

В этой формуле и далее мы полагаем  $e, \hbar, c = 1$ , где  $e = -|e|$  — заряд электрона.

В (1) запаздывающие, опережающие и келдышевские квазиклассические матричные пропагаторы берутся непосредственно на границе контакта и должны вычисляться в нулевом порядке по прозрачности барьера (т. е. для непрозрачной границы). Эти пропагаторы зависят от соответствующих направлений  $\hat{\mathbf{p}}_1$  и  $\hat{\mathbf{p}}_2$  в импульсном пространстве. Индекс 1 (2) нумерует левое (правое) полупространство по отношению к плоскости границы,  $v_x$  — компонента скорости Ферми вдоль нормали  $\mathbf{n}$  к плоскости контакта. В (1) интегрирование проводится по части поверхности Ферми для которой  $v_x > 0$ . Соотношение между падающим и прошедшим импульсами Ферми (то есть между  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ ) следующее. Компоненты параллельные зеркально отражающей плоскости барьера должны быть равны друг другу, а величины компонент вдоль нормали к границе определяются из условия, что импульсы  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  лежат на соответствующих поверхностях Ферми. Очевидно, что в частном случае сверхпроводников с одинаковыми сферическими или

цилиндрическими поверхностями Ферми (при условии, что цилиндрическая ось параллельна плоскости контакта) падающий и прошедший импульсы равны друг другу:  $p_1 = p_2$ .

Обозначения, используемые в (1), находятся в соответствии со следующим примером:

$$(\hat{g}_1^R \hat{g}_2^K)_0(t, t) = \int_{-\infty}^t dt_1 \hat{g}_1^R(t, t_1) \hat{g}_2^K(t_1, t). \quad (2)$$

Здесь  $\hat{g}_l^{R,A,K}(t, t_1) = \hat{S}_l(t) \hat{g}_l^{R,A,K}(t - t_1) \hat{S}_l^+(t_1)$  ( $l = 1, 2$ ), где

$$\hat{S}_l(t) = \begin{pmatrix} \exp[i\chi_l(t)/2] & 0 \\ 0 & \exp[-i\chi_l(t)/2] \end{pmatrix}, \quad \chi_l(t) = \chi_l - 2 \int \Phi_l(t') dt' \quad (3)$$

и  $\chi_l$  — фаза параметра порядка  $l$ -го сверхпроводника в плоскости контакта при нулевом электрическом потенциале  $\Phi_l$ .

Ниже мы рассматриваем только синглетные типы анизотропного спаривания, для них матричные пропагаторы могут быть представлены в виде

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} g & f \\ f^+ & -g \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Для дальнейших вычислений мы принимаем во внимание то, что для туннельных контактов неравновесные эффекты, как правило, несущественны. Напряжение  $V$  только сдвигает уровни Ферми электродов относительно друг друга на величину  $V$ . Кроме этого, для нахождения тока в первом порядке по прозрачности гриновские функции можно вычислять для непрозрачных полупространств (пренебрегая туннелированием электронов через контакт). При рассматриваемых условиях функции распределения электронов остаются равновесными и электрический потенциал приводит только к появлению соответствующих не зависящих от координат слагаемых в фазах сверхпроводящих параметров порядка и в гриновских функциях по обе стороны контакта (см., например, (3)). Тогда выполняется следующее соотношение:

$$\hat{g}^K(\omega) = [\hat{g}^R(\omega) - \hat{g}^A(\omega)] \text{th} \left( \frac{\omega}{2T} \right). \quad (5)$$

Согласно общим свойствам симметрии пропагаторов,  $\hat{g}^A = \hat{\tau}_3 (\hat{g}^R)^\dagger \hat{\tau}_3$ , где  $\hat{\tau}_3$  — матрица Паули. Мы рассматриваем случай, когда фаза параметра порядка внутри полупространства, занимаемого сверхпроводником с непроницаемой границей, не зависит от координат и импульса. Тогда этой фазой является величина  $\chi_l$  в формуле (3) и гриновские функции должны вычисляться для вещественного параметра порядка, хотя знак параметра порядка может зависеть от направлений импульса. При этих условиях имеем

$$f^{R,A}(-\hat{p}, x, \omega) = -f^{+R,A}(\hat{p}, x, \omega), \quad g^{R,A}(-\hat{p}, x, \omega) = g^{R,A}(\hat{p}, x, \omega),$$

$$f^{R,A}(\hat{p}, x, -\omega) = f^{R,A*}(\hat{p}, x, \omega), \quad g^{R,A}(\hat{p}, x, -\omega) = -g^{R,A*}(\hat{p}, x, \omega).$$

При вычислениях мы также принимаем во внимание, что на непроницаемой границе значения пропагатора от падающего импульса  $\hat{p}$  и от отраженного импульса  $\check{p}$  совпадают и  $v_x(\hat{p}) = -v_x(\check{p})$ . С учетом этого для переменного напряжения  $V(t) = V_0 + a \cos(\omega_0 t)$  на контакте из формулы (1) можно получить следующее выражение для туннельного тока:

$$j_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left( \frac{a}{\omega_0} \right) \left\{ j_1(V_0 + \omega_n) \sin \left[ \chi_1 - \chi_2 + 2V_0 t + \frac{a}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \omega_n t \right] + j_2(V_0 + \omega_n) \cos \left[ \chi_1 - \chi_2 + 2V_0 t + \frac{a}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \omega_n t \right] + j_3(V_0 + \omega_n) \cos \left[ \omega_n t - \frac{a}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right] + j_4(V_0 + \omega_n) \sin \left[ \omega_n t - \frac{a}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right] \right\}. \quad (6)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$j_m(V) = \int_{v_{x1} > 0} \frac{d^2 S_1}{(2\pi)^3} \frac{v_{x1}}{v_{f1}} D(\hat{p}_1) I_m(V, \hat{p}_1), \quad m = 1, 2, 3, 4, \quad (7)$$

$$I_1(V, \hat{p}_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi^2} \text{th} \left( \frac{\omega}{2T} \right) \text{Im} \{ f_1^R(\omega - V) [f_2^{+R}(\omega) + f_2^{R*}(\omega)] + (1 \leftrightarrow 2, V \rightarrow -V) \}, \quad (8)$$

$$I_2(V, \hat{p}_1) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi^2} \text{th} \left( \frac{\omega}{2T} \right) \text{Re} \{ f_1^R(\omega - V) [f_2^{+R}(\omega) + f_2^{R*}(\omega)] - (1 \leftrightarrow 2, V \rightarrow -V) \}, \quad (9)$$

$$I_3(V, \hat{p}_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi^2} \left[ \text{th} \left( \frac{\omega - V}{2T} \right) - \text{th} \left( \frac{\omega}{2T} \right) \right] \text{Im} g_1^R(\omega) \text{Im} g_2^R(\omega - V), \quad (10)$$

$$I_4(V, \hat{p}_1) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi^2} \text{th} \left( \frac{\omega}{2T} \right) \{ \text{Re} [g_1^R(\omega - V)] \text{Im} g_2^R(\omega) + \text{Re} [g_2^R(\omega - V)] \text{Im} g_1^R(\omega) \}. \quad (11)$$

Замена  $f \leftrightarrow f^+$  в формулах (8), (9) приводит к тому же результату для джозефсоновского тока после интегрирования по направлениям импульса в выражении (7).

Для частного случая сверхпроводников с изотропным спариванием формулы (6)–(11) соответствуют результатам Ларкина и Овчинникова [1]. Заметим, что величины  $I_{1,4}(V)$  — четные функции по  $V$ , а  $I_{2,3}$  — нечетные. Это различие позволяет, в принципе, однозначно выделить из результатов измерений и независимо изучать по отдельности поведение всех четырех вкладов в туннельный ток. Далее, из отмеченных свойств четности по  $V$  вытекает возможность избавиться от замены  $V \rightarrow -V$  в выписанных выражениях для  $I_{1,2}(V)$ , что приводит лишь к изменению знака перед соответствующим членом в выражении для  $I_2(V)$ .

Формулы (8)–(11) выписаны выше в форме, которая сохраняется и в более общем случае (по сравнению с рассматриваемым ниже), когда фаза комплексного параметра порядка зависит от координат и направлений импульса, а гриновские функции удовлетворяют общим соотношениям симметрии

$$f^{+R,A}(-\hat{p}, x, -\omega) = -f^{R,A*}(\hat{p}, x, \omega), \quad g^{R,A}(-\hat{p}, x, -\omega) = -g^{R,A*}(\hat{p}, x, \omega).$$

При этом, разумеется, возможен различный выбор фигурирующей в аргументах тригонометрических функций разности фаз  $\chi_1 - \chi_2$  с соответствующим изменением определения амплитуд  $j_{1,2}$ . Если эта разность фаз выбрана зависящей от направления импульса, то упомянутые тригонометрические функции должны фигурировать вместе с величинами  $I_{1,2}(V)$  под знаком интегрирования по поверхности Ферми. В общем случае величины  $I_{1,2}(V)$ , вообще говоря, не обладают свойствами четности или нечетности по напряжению.

Для постоянного напряжения на контакте из (6), полагая  $a = 0$ , получаем

$$j_x(V) = j_1(V) \sin(\chi_1 - \chi_2 + 2Vt) + j_2(V) \cos(\chi_1 - \chi_2 + 2Vt) + j_3(V). \quad (12)$$

Из выражений (12) и (6) следует, что для постоянного и переменного напряжений на контакте характерные сингулярности ВАХ определяются сингулярными точками функций  $j_m(V)$ . Обозначим сингулярные точки этих функций через  $V_m$ . Тогда для постоянного напряжения на контакте ВАХ будет иметь сингулярности только в этих точках. Но в случае переменного напряжения выражение для тока (6) имеет сингулярности при значениях напряжения  $V = V_m - n\omega_0$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ;  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Для достаточно больших значений  $n$  ( $a/\omega_0 \lesssim n$ ) амплитуда тока становится малой (в силу соответствующего поведения функций Бесселя).

### 3. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА НА НЕПРОНИЦАЕМОЙ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ

Из предыдущего раздела следует, что для вычисления туннельного электрического тока через контакт с малой прозрачностью достаточно найти значения запаздывающих электронных пропагаторов на плоской непроницаемой границе полупространства, занятого сверхпроводником. Найти полное аналитическое решение этой задачи для потенциала спаривания, приводящего к анизотропному параметру порядка, по-видимому, невозможно (кроме нескольких частных ориентаций кристаллических осей, для которых нет подавления параметра порядка вблизи границы и он не зависит от координат) и для этой цели требуется численный расчет. Но задача существенно упрощается, если нас интересуют только сингулярности ВАХ, для нахождения которых нужно знать поведение гриновских функций (взятых на границе) только вблизи своих особых точек. Для решения этой задачи мы используем уравнения Эйленбергера для запаздывающих квазиклассических пропагаторов, которые могут быть записаны для сверхпроводника с синглетным спариванием следующим образом (ниже мы опускаем индексы у запаздывающих пропагаторов):

$$\begin{aligned} (2\omega + iv_x \partial_x) f(\hat{\mathbf{p}}, x, \omega) + 2\Delta(\hat{\mathbf{p}}, x) g(\hat{\mathbf{p}}, x, \omega) &= 0, \\ (2\omega - iv_x \partial_x) f^+(\hat{\mathbf{p}}, x, \omega) - 2\Delta^*(\hat{\mathbf{p}}, x) g(\hat{\mathbf{p}}, x, \omega) &= 0, \\ iv_x \partial_x g(\hat{\mathbf{p}}, x, \omega) - \Delta(\hat{\mathbf{p}}, x) f^+(\hat{\mathbf{p}}, x, \omega) - \Delta^*(\hat{\mathbf{p}}, x) f(\hat{\mathbf{p}}, x, \omega) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для определенности будем считать, что сверхпроводник занимает полупространство  $x > 0$ .

Кроме уравнения самосогласования для  $\Delta(\hat{\mathbf{p}}, x)$  уравнения (13) должны быть дополнены условием нормировки

$$g^2 + f f^+ = -\pi^2 \quad (14)$$

и граничными условиями для квазиклассических пропагаторов. Для непроницаемой зеркально отражающей поверхности имеем

$$g(\hat{\mathbf{p}}, \omega) = g(\check{\mathbf{p}}, \omega)|_{x=0}, \quad f(\hat{\mathbf{p}}, \omega) = f(\check{\mathbf{p}}, \omega)|_{x=0}, \quad f^+(\hat{\mathbf{p}}, \omega) = f^+(\check{\mathbf{p}}, \omega)|_{x=0}. \quad (15)$$

Здесь  $\hat{\mathbf{p}}$  — направление падающего импульса, а  $\check{\mathbf{p}}$  — направление отраженного импульса.

Дополнительным граничным (асимптотическим) условием к уравнениям (13) является поведение пропагаторов в глубине сверхпроводника:

$$g(\hat{\mathbf{p}}, \omega)|_{x=\infty} = \frac{-\pi\omega}{\sqrt{|\Delta_\infty(\hat{\mathbf{p}})|^2 - \omega^2}}, \quad f(\hat{\mathbf{p}}, \omega)|_{x=\infty} = -f^+(\hat{\mathbf{p}}, \omega)|_{x=\infty} = \frac{\pi\Delta_\infty(\hat{\mathbf{p}})}{\sqrt{|\Delta_\infty(\hat{\mathbf{p}})|^2 - \omega^2}}. \quad (16)$$

Будем предполагать, что можно выбрать параметр порядка  $\Delta$  вещественным внутри сверхпроводящего полупространства с непроницаемой границей (т.е. при отсутствии тока через границу). Введем в рассмотрение следующие функции:

$$f_1 = \frac{1}{2}(f - f^+), \quad f_2 = \frac{1}{2}(f + f^+). \quad (17)$$

Для функций  $f_{1,2}$  уравнения (13), (14) принимают вид

$$2\omega f_1 + iv_x \partial_x f_2 + 2\Delta g = 0, \quad (18)$$

$$f_2 = -i \frac{v_x}{2\omega} \partial_x f_1,$$

$$\partial_x g = -i \frac{2\Delta}{v_x} f_2, \quad (19)$$

$$g^2 + f_2^2 - f_1^2 = -\pi^2.$$

Граничные условия при  $x = 0$  для функций  $f_{1,2}$  такие же, как и (15), но в глубине сверхпроводника имеем

$$f_1(\hat{\mathbf{p}}, \omega)|_{x=\infty} = \frac{\pi\Delta_\infty(\hat{\mathbf{p}})}{\sqrt{|\Delta_\infty(\hat{\mathbf{p}})|^2 - \omega^2}}, \quad f_2|_{x=\infty} = 0. \quad (20)$$

Из этих уравнений можно получить представление для функций  $g$  и  $f$ , взятых на границе, которое удобно для рассмотрения сингулярных частей пропагаторов. Для получения этого представления введем следующую функцию:

$$\bar{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \omega) = \frac{\int_0^\infty \Delta(\hat{\mathbf{p}}, x) f_2(\hat{\mathbf{p}}, x, \omega) dx}{\int_0^\infty f_2(\hat{\mathbf{p}}, x, \omega) dx}. \quad (21)$$

Из второго и третьего уравнений (18) можно легко получить

$$g(\infty) - g(0) = -\frac{2i}{v_x} \int_0^\infty \Delta(\hat{\mathbf{p}}, x) f_2(\hat{\mathbf{p}}, x, \omega) dx, \quad f_1(\infty) - f_1(0) = \frac{2i\omega}{v_x} \int_0^\infty f_2(\hat{\mathbf{p}}, x, \omega) dx. \quad (22)$$

С учетом этого функция  $\tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \omega)$  может быть переписана также в виде

$$\tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \omega) = -\omega \frac{g(\infty) - g(0)}{f_1(\infty) - f_1(0)}. \quad (23)$$

Здесь мы вводим обозначения  $g|_{x=0} = g(0)$ ,  $g|_{x=\infty} = g(\infty)$ ,  $f|_{x=0} = f(0)$ ,  $f|_{x=\infty} = f(\infty)$ .

После подстановки выражений (16), (20) для пропагаторов в глубину сверхпроводника в уравнение (23) мы приходим к следующему соотношению между  $g(0)$ ,  $f_1(0)$  и  $\tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \omega)$ :

$$g(0) = \frac{\pi}{\omega} \frac{\tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \omega) \Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}}) - \omega^2}{\sqrt{|\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})|^2 - \omega^2}} - \frac{\tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \omega)}{\omega} f_1(0). \quad (24)$$

Полностью аналогичное соотношение может быть написано для направления импульса  $\check{\mathbf{p}}$ . После этого, используя граничные условия (15), можно написать следующее представление для функций  $g(0)$  и  $f_1(0)$ :

$$g(0) = \frac{\pi}{\omega} \frac{\tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \omega) \tilde{\Delta}(\check{\mathbf{p}}, \omega)}{\tilde{\Delta}(\check{\mathbf{p}}, \omega) - \tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \omega)} \left[ \frac{\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}}) \tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \omega) - \omega^2}{\tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \omega) \sqrt{|\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})|^2 - \omega^2}} - \frac{\Delta_{\infty}(\check{\mathbf{p}}) \tilde{\Delta}(\check{\mathbf{p}}, \omega) - \omega^2}{\tilde{\Delta}(\check{\mathbf{p}}, \omega) \sqrt{|\Delta_{\infty}(\check{\mathbf{p}})|^2 - \omega^2}} \right], \quad (25)$$

$$f_1(0) = \frac{\pi}{\tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \omega) - \tilde{\Delta}(\check{\mathbf{p}}, \omega)} \left[ \frac{\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}}) \tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \omega) - \omega^2}{\sqrt{|\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})|^2 - \omega^2}} - \frac{\Delta_{\infty}(\check{\mathbf{p}}) \tilde{\Delta}(\check{\mathbf{p}}, \omega) - \omega^2}{\sqrt{|\Delta_{\infty}(\check{\mathbf{p}})|^2 - \omega^2}} \right]. \quad (26)$$

Из уравнения (25) видно, что кандидатами на сингулярные точки пропагатора  $g(0)$  являются  $\omega = 0, \pm|\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})|, \pm|\Delta_{\infty}(\check{\mathbf{p}})|$  и, вообще говоря, сингулярные точки функций  $\tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \omega)$ ,  $\tilde{\Delta}(\check{\mathbf{p}}, \omega)$ . Аналогично, из уравнения (26) видно, что кандидатами на сингулярные точки  $f_1(0)$  являются  $\omega = \pm|\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})|, \pm|\Delta_{\infty}(\check{\mathbf{p}})|$ . Заметим, что если мы интересуемся точками, для которых  $\tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \omega) = \tilde{\Delta}(\check{\mathbf{p}}, \omega)$ , то рассмотрение уравнения (24) для направления импульса  $\check{\mathbf{p}}$  не приводит к независимому соотношению по сравнению с уравнением (24) для направления импульса  $\hat{\mathbf{p}}$ . Таким образом, необходима дополнительная информация для рассмотрения этого предельного случая в уравнениях (25), (26).

Рассмотрим сначала сингулярные части взятых на границе пропагаторов  $g_s, f_s, f_s^+$  в окрестности значения  $\omega = 0$ . Из (25), (26) следует, что функция  $f_1(0)$  не имеет сингулярности при  $\omega = 0$ , в то время как функция  $g(0)$  имеет в этой точке полюс (при условии, что  $\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})$  и  $\Delta_{\infty}(\check{\mathbf{p}})$  имеют противоположные знаки):

$$g_s(0) = \frac{1}{\omega} \frac{\pi \tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, 0) \tilde{\Delta}(\check{\mathbf{p}}, 0)}{\tilde{\Delta}(\check{\mathbf{p}}, 0) - \tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, 0)} \{ \text{sign} [\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})] - \text{sign} [\Delta_{\infty}(\check{\mathbf{p}})] \} = \frac{B_g(\hat{\mathbf{p}})}{\omega}. \quad (27)$$

Замечательно, что кроме этого соотношения можно также найти явное выражение для величины  $\tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, 0)$  через неоднородное распределение параметра порядка. Действительно, так как функция  $f_1$  не имеет сингулярности при  $\omega = 0$  (см. (18)), можно получить из условия нормировки (19) соотношение  $g_s = \pm i f_{2s}$  (для  $\omega \rightarrow 0$ ) между сингулярными частями функций  $g$  и  $f_2$ . Затем из последнего уравнения системы (18) мы получаем уравнение для сингулярной части функции  $f_2$ :

$$\partial_x f_{2,s} \pm \frac{2\Delta}{v_x} f_{2,s} = 0.$$



Решением этого уравнения, которое удовлетворяет граничным условиям (20), (15), является функция

$$f_{2,s}(\hat{\mathbf{p}}, x, \omega) = f_{2,s}(\hat{\mathbf{p}}, 0, \omega) \exp \left\{ -\frac{2 \operatorname{sign} [\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})]}{|v_x|} \int_0^x \Delta(\hat{\mathbf{p}}, x') dx' \right\}. \quad (28)$$

Подставляя это решение в (21), получаем

$$\tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, 0) = \frac{1}{2} |v_x| \operatorname{sign} [\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})] \left[ \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{2 \operatorname{sign} [\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})]}{|v_x|} \int_0^x \Delta(\hat{\mathbf{p}}, x') dx' \right\} dx \right]^{-1}. \quad (29)$$

Заметим, что определение знака в (28) с помощью асимптотического условия в глубине сверхпроводника позволяет фиксировать знак в соотношении между сингулярными частями квазиклассических пропагаторов при  $\omega \rightarrow 0$ , взятых вблизи границы:

$$f_s(\hat{\mathbf{p}}, x, \omega) = f_s^+(\hat{\mathbf{p}}, x, \omega) = -i \operatorname{sign} [v_x \Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})] g_s(\hat{\mathbf{p}}, x, \omega). \quad (30)$$

Таким образом, уравнения (27), (29) и (30) дают довольно общее описание в окрестности  $\omega = 0$  сингулярных частей пропагаторов, взятых на границе. Если мы интересуемся только сингулярностями ВАХ, то задачу о решении уравнения самосогласования для конкретного потенциала спаривания можно рассматривать отдельно. Последняя задача является важной частью полного теоретического описания ВАХ и может решаться численными методами.

Рассмотрим теперь поведение пропагаторов вблизи точек  $\omega = \pm |\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})|$ ,  $\pm |\Delta_{\infty}(\check{\mathbf{p}})|$ . Для этой цели найдем сначала значения функции  $\tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \omega)$  при этих частотах, что можно сделать, например, с помощью соотношения (21). Действительно, из уравнений (18)–(20) вытекает следующее асимптотическое поведение функции  $f_2(\hat{\mathbf{p}}, \omega)$  при  $x \rightarrow \infty$ :

$$f_2(\hat{\mathbf{p}}, x, \omega) \propto \exp \left( -\frac{2\sqrt{|\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})|^2 - \omega^2}}{|v_x|} x \right). \quad (31)$$

Отсюда и из (21) видно, что в пределе  $|\omega| \rightarrow |\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})|$  основной вклад в интегралы в (21) дает область в глубине сверхпроводника, где параметр порядка  $\Delta(\hat{\mathbf{p}}, x)$  равен своему значению в объеме. С учетом этого получаем следующее соотношение:

$$\tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \omega) \rightarrow \Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}}) \quad \text{для} \quad |\omega| \rightarrow |\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})|. \quad (32)$$

Теперь можно рассмотреть поведение функций  $g$  и  $f_1$  в окрестности точек  $|\omega| = |\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})|$ ,  $|\Delta_{\infty}(\check{\mathbf{p}})|$ . Переходя в уравнениях (25), (26) к пределу  $|\omega| \rightarrow |\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})|$  или  $|\omega| \rightarrow |\Delta_{\infty}(\check{\mathbf{p}})|$  и учитывая (32), мы видим, что расходимости сокращаются и функции  $g(0)$ ,  $f_1(0)$  (а следовательно, и  $f(0)$ ) в первом порядке имеют корневое неаналитическое поведение вида  $\sqrt{\Delta_{\infty}^2(\hat{\mathbf{p}}) - \omega^2}$  (или  $\sqrt{\Delta_{\infty}^2(\check{\mathbf{p}}) - \omega^2}$ ) в этих точках. Исключения могут составлять ориентации, для которых  $\tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}) = \tilde{\Delta}(\check{\mathbf{p}})$ , когда, строго говоря, уравнения (25), (26) не дают больше информации, чем (24). Как хорошо известно, если это условие выполняется для всех направлений импульса, тогда нет подавления параметра порядка, и в этом частном случае пропагаторы расходятся при  $|\omega| \rightarrow |\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})|$ :

$$g^R(\hat{\mathbf{p}}, \omega) = -\frac{\pi\omega}{\sqrt{|\Delta(\hat{\mathbf{p}})|^2 - \omega^2}}, \quad f^R(\hat{\mathbf{p}}, \omega) = \frac{\pi\Delta(\hat{\mathbf{p}})}{\sqrt{|\Delta(\hat{\mathbf{p}})|^2 - \omega^2}}. \quad (33)$$

Наконец, следует принять во внимание возможность существования связанных состояний квазичастиц с ненулевой энергией, которые локализованы около границы. Они могут возникать, например, из-за пространственного изменения параметра порядка, который подавляется вблизи границы. Это связанное состояние можно интерпретировать как связанное состояние в «потенциальной яме», образуемой параметром порядка [8]. Поскольку это связанное состояние соответствует полюсу в квазиклассических пропагаторах, мы можем просто добавить полюсное слагаемое к сингулярным частям пропагаторов. Если пропагаторы  $g(0)$ ,  $f_1(0)$  имеют одинаковые полюсы, описывающие связанные состояния с ненулевой энергией, то из формулы (23) и граничных условий (15) следует, что в точке полюса выполняется равенство  $\tilde{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \omega) = \tilde{\Delta}(\check{\mathbf{p}}, \omega)$ .

С учетом полученных выше результатов неаналитические части функций  $g(0)$  и  $f(0)$  могут быть записаны в следующем виде:

$$g_s^R(\hat{\mathbf{p}}, \omega) \Big|_{x=0} = \frac{B_g(\hat{\mathbf{p}})}{\omega + i\delta} + \frac{Q_g(\hat{\mathbf{p}})}{\omega - h(\hat{\mathbf{p}})\text{sign}(\omega) + i\delta} + C(\hat{\mathbf{p}}, \omega)\text{sign}(\omega)\sqrt{\Delta_\infty^2(\hat{\mathbf{p}}) - \omega^2} + C(\check{\mathbf{p}}, \omega)\text{sign}(\omega)\sqrt{\Delta_\infty^2(\check{\mathbf{p}}) - \omega^2} + \dots, \quad (34)$$

$$f_s^R(\hat{\mathbf{p}}, \omega) \Big|_{x=0} = \frac{iB_f(\hat{\mathbf{p}})}{\omega + i\delta} + \frac{iQ_f(\hat{\mathbf{p}})}{\omega - h(\hat{\mathbf{p}})\text{sign}(\omega) + i\delta} + E(\hat{\mathbf{p}}, \omega)\sqrt{\Delta_\infty^2(\hat{\mathbf{p}}) - \omega^2} + E(\check{\mathbf{p}}, \omega)\sqrt{\Delta_\infty^2(\check{\mathbf{p}}) - \omega^2} + \dots, \quad \delta \rightarrow +0. \quad (35)$$

Кроме этого, имеют место следующие соотношения:

$$B_f(\hat{\mathbf{p}}) = -\text{sign}[v_x \Delta_\infty(\hat{\mathbf{p}})] B_g(\hat{\mathbf{p}}) = -B_f(-\hat{\mathbf{p}}), \quad Q_g(\hat{\mathbf{p}}) = |Q_f(\hat{\mathbf{p}})|,$$

$$Q_f(\hat{\mathbf{p}}) = -Q_f^*(-\hat{\mathbf{p}}), \quad h(-\hat{\mathbf{p}}) = h(\hat{\mathbf{p}}).$$

Ниже нас будут интересовать только значения функций  $Q_{g,f}(\hat{\mathbf{p}})$  вблизи полюсов  $\omega = \pm h(\hat{\mathbf{p}})$ . При рассмотрении положительного и отрицательного полюсов следует учесть, что функции  $Q_g(\hat{\mathbf{p}}, \omega)$ ,  $\text{Re} Q_f(\hat{\mathbf{p}}, \omega)$  являются четными, а функция  $\text{Im} Q_f(\hat{\mathbf{p}}, \omega)$  нечетна по переменной  $\omega$ . В дальнейшем мы не будем рассматривать зависимость функций  $Q_{g,f}$  от  $\omega$  и будем считать, что эти функции взяты в точке положительного полюса.

Поскольку при  $|\omega| < \min(|\Delta_\infty(\check{\mathbf{p}})|, |\Delta_\infty(\hat{\mathbf{p}})|)$  для заданного направления импульса  $\hat{\mathbf{p}}$  нет состояний с непрерывным спектром, то при этих частотах естественно потребовать выполнения условия  $\text{Im} C, \text{Im} Q_g = 0$ . Кроме того, для частной ориентации, при которой для всех  $x$  выполняется равенство  $\Delta(\check{\mathbf{p}}, x) = -\Delta(\hat{\mathbf{p}}, x)$ , на границе сверхпроводника будет  $\Delta(x=0) = 0$ ,  $f_1(0) = 0$ . Тогда для этой ориентации из уравнений Эйленберга можно получить, что в области частот  $|\omega| < |\Delta_\infty(\hat{\mathbf{p}})|$  будет выполнено равенство  $\text{Re} f(0) = 0$ . Следовательно, в этой частотной области  $\text{Re}[E(\hat{\mathbf{p}}, \omega) + E(\check{\mathbf{p}}, \omega)] = 0$ .

Как показано ниже, положение и тип сингулярностей ВАХ туннельных контактов, которые обусловлены вкладом от связанных состояний квазичастиц, определяются, в частности, экстремальными и неаналитическими точками функции  $h(\hat{\mathbf{p}})$ . Из граничных условий для пропагаторов в случае синглетного спаривания следует, что  $h(\hat{\mathbf{p}}) = h(-\check{\mathbf{p}})$ .

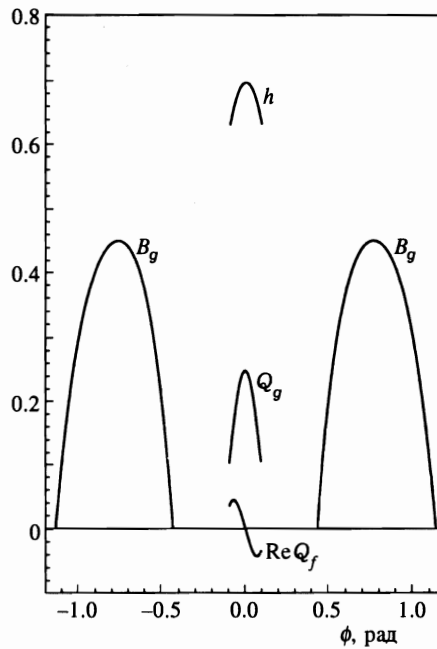


Рис. 1

Поскольку для направления импульса  $\hat{\mathbf{p}} \parallel \mathbf{n}$  также  $\hat{\mathbf{p}} = -\check{\mathbf{p}}$ , функция  $h(\hat{\mathbf{p}})$  (как и полный пропагатор  $g(0)$ ) должна иметь экстремум в направлении, при котором вектор  $\hat{\mathbf{p}}$  параллелен нормали к границе  $\mathbf{n}$  (если только для этого значения импульса имеется связанное состояние). Аналогично мы получаем, что функция  $Q_f(\hat{\mathbf{p}})$  является чисто мнимой для направления  $\hat{\mathbf{p}} \parallel \mathbf{n}$ . В частности, отсюда следует, что для ориентаций кристаллических осей, при которых для всех  $x$  выполняется соотношение  $\Delta(\check{\mathbf{p}}, x) = -\Delta(\hat{\mathbf{p}}, x)$ , для направления импульса  $\hat{\mathbf{p}} \parallel \mathbf{n}$  будет иметь место равенство  $Q_{f,g}(\hat{\mathbf{p}}) = 0$ . Другими характерными точками для функции  $h(\hat{\mathbf{p}})$  являются направления импульса, для которых связанное состояние квазичастиц вблизи границы исчезает.

На рис. 1 приведены результаты численных расчетов величин  $B_g(\phi)$ ,  $Q_g(\phi) = |Q_f(\phi)|$ ,  $\text{Re } Q_f(\phi)$  и  $h(\phi)$ . Мы рассмотрели тетрагональный сверхпроводник с цилиндрической поверхностью Ферми и непрозрачной зеркально отражающей плоской границей, расположенной при  $x = 0$  (цилиндрическая ось  $z$  параллельна плоскости границы). Потенциал спаривания взят в виде

$$V(\phi, \phi') = 2V_d \cos(2\phi - 2\phi_0) \cos(2\phi' - 2\phi_0),$$

который приводит к параметру порядка с симметрией  $d_{x_0^2-y_0^2}$ . Здесь  $\phi$  – азимутальный угол в плоскости  $xy$ , который отсчитывается от направления нормали к границе. Угол  $\phi_0$  описывает ориентацию кристаллической оси  $x_0$  относительно нормали к границе. Для выбранного нами потенциала спаривания параметр порядка имеет вид

$$\Delta(\phi, x) = \Delta(x) \cos(2\phi - 2\phi_0),$$

где  $\Delta(x)$  вычисляется с использованием уравнения самосогласования. Угол  $\phi$  задает направление падающего импульса вдоль траектории квазичастицы. При численном расчете мы взяли  $\phi_0 = \pi/9$ ,  $T = 0.45T_c$ ,  $\Delta_0/2T = 2$ , где  $\Delta_0 \equiv \Delta(x = \infty)$ ,  $T_c$  — критическая температура. Для выбранной нами ориентации кристаллических осей ( $\phi_0 = \pi/9$ ) параметр порядка подавляется вблизи границы до значения  $\Delta(x = 0) = 0.28\Delta_0$ . На рис. 1 функции  $B_g(\phi)$ ,  $Q_g(\phi)$ ,  $\text{Re } Q_f(\phi)$  нормированы на величину  $\pi\Delta_0$ , в то время как функция  $h(\phi)$  — на величину  $\Delta_0$ . Из рисунка видно, что связанные состояния с ненулевой энергией  $\pm h(\phi)$  существуют в узкой области углов  $\phi \in (-0.095, 0.095)$  в окрестности нормали к границе. Состояния с нулевой энергией существуют в другой, более широкой, области углов, в которой  $B_g(\phi) \neq 0$ . Кроме того, значение функции  $h(\phi)$  в точке максимума есть  $h_m = 0.7\Delta_0$ , а значение  $h(\phi_{ed})$  в точках обрыва (где связанное состояние исчезает) есть  $h_{ed} = 0.63\Delta_0$ . Заметим, что для направлений импульса  $\hat{p}$  ( $\phi_{ed} = \pm 0.095$ ), при которых исчезает связанное состояние с ненулевой энергией, выполняется равенство  $h_{ed} = \min(|\Delta_\infty(\hat{p})|, |\Delta_\infty(\hat{p})|)$ . Это означает, что в точках  $\phi_{ed}$  происходит отщепление дискретного уровня от непрерывного спектра. Для этих направлений импульса фигурирующие в выражениях (34), (35) величины  $C(\hat{p}, \omega)$ ,  $E(\hat{p}, \omega)$  (либо  $C(\hat{p}, \omega)$ ,  $E(\hat{p}, \omega)$  — в зависимости от того, какая из двух величин  $|\Delta_\infty(\hat{p})|$ ,  $|\Delta_\infty(\hat{p})|$  меньше) расходятся при  $|\omega| = h_{ed}$ .

#### 4. ВАХ ДЛЯ ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО И КВАЗИЧАСТИЧНОГО ТОКОВ В ОТСУТСТВИЕ ПОДАВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА НА ГРАНИЦЕ

Особенности ВАХ возникают из-за того, что функции  $I_m(V, \hat{p}_1)$  имеют сингулярные точки. Если эти функции не зависят от направлений импульса, то согласно (6)–(11) их зависимость от напряжения непосредственно описывает поведение ВАХ [1, 2] (см. также [3] и указанную там литературу). В противоположность этому случаю для сверхпроводников с анизотропным спариванием особенности ВАХ существенно отличаются от сингулярностей функций  $I_m(V, \hat{p}_1)$  вследствие интегрирования этих функций по направлениям импульса. При этом особенностям ВАХ будут соответствовать сингулярности функций  $j_m(V)$ . Другой отличительной особенностью сверхпроводников с анизотропным спариванием, которая непосредственно влияет на поведение джозефсоновского и квазичастичного токов, является их чувствительность к неоднородностям и границам. Подавление анизотропного параметра порядка вблизи границы приводит, вообще говоря, не только к появлению связанных состояний квазичастиц, рассмотренных в предыдущем разделе, но также к возникновению параметра порядка с другой симметрией в приграничной области [19, 20].

Даже в случае обычных граничных условий, когда вблизи плоскости контакта нет подавления сверхпроводящего параметра порядка, характерные особенности ВАХ для контакта между сверхпроводниками с анизотропным спариванием отличаются от таковых в случае контакта сверхпроводников с изотропным спариванием. При условии зеркального отражения от границы подавление параметра порядка отсутствует для ориентаций кристаллических осей, при которых для всех направлений импульса параметр порядка не изменяется при замене падающего импульса на отраженный. В этом разделе мы рассматриваем ВАХ только для таких ориентаций. Итак, рассмотрим поведение функций  $j_m(V)$  для случаев, когда квазиклассические пропагаторы на непроницаемой границе имеют такой же вид, как и в объеме сверхпроводника (33). Подставляя эти пропагаторы в формулы (8)–(11), получаем

$$I_1(V, \hat{\mathbf{p}}_1) = -\Delta_1(\hat{\mathbf{p}}_1)\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \operatorname{th}\left(\frac{|\omega|}{2T}\right) \left( \frac{\theta(|\Delta_1(\hat{\mathbf{p}}_1)| - |\omega - V|)}{\sqrt{|\Delta_1(\hat{\mathbf{p}}_1)|^2 - (\omega - V)^2}} \times \right. \\ \left. \times \frac{\theta(|\omega| - |\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)|)}{\sqrt{\omega^2 - |\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)|^2}} + \frac{\theta(|\omega| - |\Delta_1(\hat{\mathbf{p}}_1)|)}{\sqrt{\omega^2 - |\Delta_1(\hat{\mathbf{p}}_1)|^2}} \frac{\theta(|\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)| - |\omega + V|)}{\sqrt{|\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)|^2 - (\omega + V)^2}} \right), \quad (36)$$

$$I_2(V, \hat{\mathbf{p}}_1) = \Delta_1(\hat{\mathbf{p}}_1)\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[ \operatorname{th}\left(\frac{\omega}{2T}\right) - \operatorname{th}\left(\frac{\omega + V}{2T}\right) \right] \times \\ \times \frac{\operatorname{sign}(\omega) \operatorname{sign}(\omega + V) \theta(|\omega| - |\Delta_1(\hat{\mathbf{p}}_1)|)}{\sqrt{\omega^2 - |\Delta_1(\hat{\mathbf{p}}_1)|^2}} \frac{\theta(|\omega + V| - |\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)|)}{\sqrt{(\omega + V)^2 - |\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)|^2}}, \quad (37)$$

$$I_3(V, \hat{\mathbf{p}}_1) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[ \operatorname{th}\left(\frac{\omega - V}{2T}\right) - \operatorname{th}\left(\frac{\omega}{2T}\right) \right] \frac{|\omega||\omega - V| \theta(|\omega| - |\Delta_1(\hat{\mathbf{p}}_1)|)}{\sqrt{\omega^2 - |\Delta_1(\hat{\mathbf{p}}_1)|^2}} \times \\ \times \frac{\theta(|\omega - V| - |\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)|)}{\sqrt{(\omega - V)^2 - |\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)|^2}}, \quad (38)$$

$$I_4(V, \hat{\mathbf{p}}_1) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \operatorname{th}\left(\frac{\omega}{2T}\right) (\omega - V)|\omega| \left( \frac{\theta(|\Delta_1(\hat{\mathbf{p}}_1)| - |\omega - V|)}{\sqrt{|\Delta_1(\hat{\mathbf{p}}_1)|^2 - (\omega - V)^2}} \times \right. \\ \left. \times \frac{\theta(|\omega| - |\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)|)}{\sqrt{\omega^2 - |\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)|^2}} + \frac{\theta(|\omega| - |\Delta_1(\hat{\mathbf{p}}_1)|)}{\sqrt{\omega^2 - |\Delta_1(\hat{\mathbf{p}}_1)|^2}} \frac{\theta(|\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)| - |\omega - V|)}{\sqrt{|\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)|^2 - (\omega - V)^2}} \right). \quad (39)$$

После интегрирования по частоте сингулярности функций  $I_m(V, \hat{\mathbf{p}}_1)$  возникают, только если два квадратных корня (которые умножаются друг на друга в знаменателях подынтегральных выражений) могут обращаться в нуль одновременно. Это возможно для определенных значений частоты и напряжения. В результате получаем, что функции  $I_m(V, \hat{\mathbf{p}}_1)$  будут иметь сингулярности в точках, для которых  $|V| = \|\Delta_2\| \pm \|\Delta_1\|$ . Из уравнений (36)–(39) находим следующие выражения для сингулярных частей функций  $I_m(V, \hat{\mathbf{p}}_1)$ :

$$I_1 = \frac{1}{2} \sqrt{|\Delta_1 \Delta_2|} \operatorname{sign}(\Delta_1 \Delta_2) \left\{ \left[ \operatorname{th}\left(\frac{|\Delta_1|}{2T}\right) + \operatorname{th}\left(\frac{|\Delta_2|}{2T}\right) \right] \times \right. \\ \left. \times \ln \left| |V| - \|\Delta_1\| - \|\Delta_2\| \right| - \pi \left| \operatorname{th}\left(\frac{|\Delta_1|}{2T}\right) - \operatorname{th}\left(\frac{|\Delta_2|}{2T}\right) \right| \theta(|V| - \|\Delta_2\| - \|\Delta_1\|) \right\}, \quad (40)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sqrt{|\Delta_1 \Delta_2|} \operatorname{sign}(\Delta_1 \Delta_2) \operatorname{sign}(V) \left\{ \operatorname{sign}(|\Delta_1| - |\Delta_2|) \left[ \operatorname{th}\left(\frac{|\Delta_1|}{2T}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{th}\left(\frac{|\Delta_1| + |V| \operatorname{sign}(|\Delta_2| - |\Delta_1|)}{2T}\right) \right] \ln \left| |V| - \|\Delta_2\| - \|\Delta_1\| \right| + \right. \\ \left. + \pi \left[ \operatorname{th}\left(\frac{|\Delta_1|}{2T}\right) + \operatorname{th}\left(\frac{|\Delta_2|}{2T}\right) \right] \theta(|V| - \|\Delta_1\| - \|\Delta_2\|) \right\}, \quad (41)$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \sqrt{|\Delta_1 \Delta_2|} \operatorname{sign}(V) \left\{ \operatorname{sign}(|\Delta_1| - |\Delta_2|) \left[ \operatorname{th} \left( \frac{|\Delta_1|}{2T} \right) - \operatorname{th} \left( \frac{|\Delta_1| + |V| \operatorname{sign}(|\Delta_2| - |\Delta_1|)}{2T} \right) \right] \ln ||V| - ||\Delta_2| - |\Delta_1|| - \pi \left[ \operatorname{th} \left( \frac{|\Delta_1|}{2T} \right) + \operatorname{th} \left( \frac{|\Delta_2|}{2T} \right) \right] \theta (|V| - |\Delta_1| - |\Delta_2|) \right\}, \quad (42)$$

$$I_4 = -\frac{1}{2} \sqrt{|\Delta_1 \Delta_2|} \left\{ \left[ \operatorname{th} \left( \frac{|\Delta_1|}{2T} \right) + \operatorname{th} \left( \frac{|\Delta_2|}{2T} \right) \right] \ln ||V| - |\Delta_1| - |\Delta_2|| + \pi \left[ \operatorname{th} \left( \frac{|\Delta_1|}{2T} \right) - \operatorname{th} \left( \frac{|\Delta_2|}{2T} \right) \right] \theta (|V| - ||\Delta_2| - |\Delta_1||) \right\}. \quad (43)$$

Согласно (6), (7), для нахождения поведения ВАХ в окрестностях сингулярностей необходимо проинтегрировать выражения (40)–(43) по направлениям импульса. После этого интегрирования получаем, что неаналитическое поведение ВАХ будет только при  $|V|$  равных значениям выражений  $||\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)| \pm |\Delta_1(\hat{\mathbf{p}}_1)||$  (которые могут рассматриваться, например, как функции  $\hat{\mathbf{p}}_1$ ) в точках экстремумов. Как оказывается, характерное поведение ВАХ вблизи этих экстремумов сильно зависит от типа экстремальных точек. Из сравнения выражений (40)–(43) видно, что пары функций  $j_1(V)$ ,  $j_4(V)$  и  $j_2(V)$ ,  $j_3(V)$  ведут себя одинаково (с точностью до знака) вблизи сингулярностей. Поэтому достаточно описать только неаналитические точки для  $j_1(V)$  и  $j_3(V)$ .

В дальнейшем удобно рассматривать сингулярные точки в кондуктансе  $G = dj_x/dV$ . Оказывается, что для нахождения неаналитического поведения  $G(V)$  нужно дифференцировать по  $V$  только  $\theta$ -функции и логарифмы. В первом случае после дифференцирования возникает  $\delta$ -функция, вследствие чего интегрирование по поверхности Ферми сводится к интегрированию вдоль линии на этой поверхности. Соответствующие слагаемые  $\tilde{G}_{1,3}(V)$  в функциях  $G_{1,3}(V) = dj_{1,3}/dV$  могут быть записаны следующим образом:

$$\tilde{G}_1 = -\operatorname{sign}(V) \int dl \frac{K^-(\hat{\mathbf{p}}_1)}{|\nabla_{\hat{\mathbf{p}}_1} (|\Delta_1| - |\Delta_2|)|}, \quad \tilde{G}_3 = -\int dl \frac{K^+(\hat{\mathbf{p}}_1) \operatorname{sign}(\Delta_1 \Delta_2)}{|\nabla_{\hat{\mathbf{p}}_1} (|\Delta_1| + |\Delta_2|)|}. \quad (44)$$

Здесь  $l$  — локальная координата вдоль линии  $|V| = ||\Delta_1(\hat{\mathbf{p}}_1) \pm |\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)||$  на поверхности Ферми (знак «+» относится к  $\tilde{G}_3$ , а знак «-» — к  $\tilde{G}_1$ ). Функции  $K^\pm$  определяются следующим образом:

$$K^\pm(\hat{\mathbf{p}}_1) = \frac{1}{16\pi^2} \left| \operatorname{th} \left( \frac{|\Delta_1|}{2T} \right) \pm \operatorname{th} \left( \frac{|\Delta_2|}{2T} \right) \right| \sqrt{|\Delta_1 \Delta_2|} \operatorname{sign}(\Delta_1 \Delta_2) \frac{v_{x1}}{v_{f1}} D. \quad (45)$$

Ниже мы рассмотрим различные типы экстремумов и получим соответствующие им особенности поведения  $G_m(V)$ . Пусть функция  $||\Delta_2| - |\Delta_1||$  имеет локальный максимум или минимум в точке  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0$  на поверхности Ферми и в окрестности этой точки имеет следующий вид:

$$||\Delta_2| - |\Delta_1|| = a \pm (b\tilde{p}_1^2 + c\tilde{p}_2^2), \quad a, b, c > 0. \quad (46)$$

Здесь  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$  — локальные ортогональные координаты в окрестности точки  $\mathbf{p}_0$ . Поскольку функция  $||\Delta_2| - |\Delta_1||$  входит в выражения для  $j_{1,4}$  в аргументе  $\theta$ -функции, а в формулы для  $j_{2,3}$  — в аргументе логарифма, мы получаем два различных вида сингулярного поведения вблизи напряжения  $|V| = a$ :

$$\delta G_1|_{|V|=a} = \text{sign}(\Delta_1 \Delta_2)|_{\hat{p}_1=\hat{p}_0} \delta G_4|_{|V|=a} = \mp \frac{\pi}{\sqrt{bc}} K^- (\hat{p}_0), \quad (47)$$

$$G_2 = \text{sign}(\Delta_1 \Delta_2)|_{\hat{p}_1=\hat{p}_0} G_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{bc}} K^- (\hat{p}_0) \ln ||V| - a|. \quad (48)$$

Здесь введено обозначение для скачка кондактанса

$$\delta G|_{|V|=a} = G(|V| > a) - G(|V| < a).$$

Аналогичные сингулярности будут в случае, когда функция  $|\Delta_2| + |\Delta_1|$  имеет локальный максимум или минимум, вблизи которого  $|\Delta_2| + |\Delta_1| = a \pm (b\bar{p}_1^2 + c\bar{p}_2^2)$ ,  $a, b, c > 0$ :

$$\delta G_2|_{|V|=a} = -\text{sign}(\Delta_1 \Delta_2)|_{\hat{p}_1=\hat{p}_0} \delta G_3|_{|V|=a} = \mp \frac{\pi}{\sqrt{bc}} K^+ (\hat{p}_0), \quad (49)$$

$$G_1 = -\text{sign}(\Delta_1 \Delta_2)|_{\hat{p}_1=\hat{p}_0} G_4 = \pm \frac{1}{\sqrt{bc}} K^+ (\hat{p}_0) \text{sign}(V) \ln ||V| - a|. \quad (50)$$

В случае, когда функция  $||\Delta_2| - |\Delta_1||$  имеет седловую точку, вблизи которой

$$||\Delta_2| - |\Delta_1|| = a + b\bar{p}_1^2 - c\bar{p}_2^2, \quad a, b, c > 0, \quad (51)$$

соответствующие сингулярности в кондактансе имеют вид

$$G_1 = \text{sign}(\Delta_1 \Delta_2)|_{\hat{p}_1=\hat{p}_0} G_4 = \frac{1}{\sqrt{bc}} K^- (\hat{p}_0) \text{sign}(V) \ln ||V| - a|, \quad (52)$$

$$G_2 = \text{sign}(\Delta_1 \Delta_2)|_{\hat{p}_1=\hat{p}_0} G_3 = \frac{2}{\pi\sqrt{bc}} \text{sign}(|V| - a) K^- (\hat{p}_0) \ln^2 ||V| - a|. \quad (53)$$

Аналогично для седловой точки функции

$$|\Delta_2| + |\Delta_1| = a + b\bar{p}_1^2 - c\bar{p}_2^2, \quad a, b, c > 0 \quad (54)$$

получаем

$$G_2 = -\text{sign}(\Delta_1 \Delta_2)|_{\hat{p}_1=\hat{p}_0} G_3 = -\frac{1}{\sqrt{bc}} K^+ (\hat{p}_0) \ln |a - |V||, \quad (55)$$

$$G_1 = -\text{sign}(\Delta_1 \Delta_2)|_{\hat{p}_1=\hat{p}_0} G_4 = \frac{2 \text{sign}(V) \text{sign}(|V| - a)}{\pi\sqrt{bc}} K^+ (\hat{p}_0) \ln^2 ||V| - a|. \quad (56)$$

Скачки кондактанса, которые описываются формулами (47), (49) соответствуют изломам на ВАХ. Логарифмические расходимости кондактанса, описываемые выражениями (48), (50), (52) и (55), соответствуют особенностям типа ступеньки на ВАХ (заметьте, что с обеих сторон этих сингулярных точек  $G$  имеет одинаковый знак). И наконец, слагаемые, содержащие квадраты логарифмов, (53), (56), описывают особенности типа «клюв» на ВАХ. Они появляются в случае седловых точек функций  $||\Delta_2| \pm |\Delta_1||$  после интегрирования логарифмических сингулярностей в  $I_m$ .

Рассмотрим теперь случай, когда выражения  $||\Delta_2| \pm |\Delta_1||$  принимают экстремальные значения не в изолированных точках, а на некоторой линии  $\tilde{l}$  на поверхности Ферми. Тогда, например, в окрестности локального максимума или минимума функции  $||\Delta_2| - |\Delta_1||$  имеем

$$||\Delta_2| - |\Delta_1|| = a \pm b\tilde{p}_1^2, \quad a, b > 0, \tag{57}$$

здесь  $\tilde{p}_1$  — локальная координата на поверхности Ферми, ортогональная к экстремальной линии  $\tilde{l}$ .

В этом случае кондактанс будет иметь корневые расходимости с одной стороны значения напряжения  $|V| = a$ :

$$G_1 = \text{sign}(\Delta_1\Delta_2)|_{\tilde{l}}G_4 = -\frac{\text{sign}(V)}{\sqrt{||V| - a|}}\theta(\pm (|V| - a)) \int_{\substack{||\Delta_2| - |\Delta_1|| = a \\ v_{x1} > 0}} d\tilde{l} \frac{K^-}{2\sqrt{b}}, \tag{58}$$

$$G_2 = \text{sign}(\Delta_1\Delta_2)|_{\tilde{l}}G_3 = \mp \frac{\theta(\mp (|V| - a))}{\sqrt{||V| - a|}} \int_{\substack{||\Delta_2| - |\Delta_1|| = a \\ v_{x1} > 0}} d\tilde{l} \frac{K^-}{\sqrt{b}}. \tag{59}$$

Эти сингулярности в кондактансе соответствуют односторонним вертикальным касательным к ВАХ при  $|V| = a$  в каждом из четырех слагаемых в выражении для полного туннельного тока. Например, в случае максимума на линии  $\tilde{l}$  имеются вертикальные касательные к кривым  $j_1(V)$  и  $j_4(V)$  при  $|V| = a$  со стороны  $|V| < a$ , и к кривым  $j_2(V)$ ,  $j_3(V)$  со стороны  $|V| > a$ .

Аналогично, в случае, если функция  $|\Delta_1| + |\Delta_2|$  на линии  $\tilde{l}$  достигает локального максимума или минимума

$$|\Delta_1| + |\Delta_2| = a \pm b\tilde{p}_1^2, \quad a, b > 0, \tag{60}$$

кондактанс имеет следующее сингулярное поведение:

$$G_2 = -\text{sign}(\Delta_1\Delta_2)|_{\tilde{l}}G_3 = \frac{\theta(\pm (|V| - a))}{\sqrt{||V| - a|}} \int_{\substack{|\Delta_1| + |\Delta_2| = a \\ v_{x1} > 0}} d\tilde{l} \frac{K^+}{2\sqrt{b}}, \tag{61}$$

$$G_1 = -\text{sign}(\Delta_1\Delta_2)|_{\tilde{l}}G_4 = \mp \frac{\text{sign}(V)}{\sqrt{||V| - a|}}\theta(\mp (|V| - a)) \int_{\substack{|\Delta_1| + |\Delta_2| = a \\ v_{x1} > 0}} d\tilde{l} \frac{K^+}{\sqrt{b}}. \tag{62}$$

В написанных выше формулах для сингулярностей ВАХ, которые связаны с экстремумом разности  $|\Delta_1| - |\Delta_2|$ , нельзя непосредственно перейти к пределу  $\Delta_1 = \pm\Delta_2 = \Delta$ . Из выражений (40)–(43) следует, что в этом частном случае величины  $G_{1,4}$  не имеют сингулярности при  $V = |\Delta_1| - |\Delta_2| = 0$ , в то время как для  $G_{2,3}$  вблизи  $V = 0$  (более точно, для  $|V| \ll T$ ) вместо (48), (53), (59) получаем выражение

$$G_2 = \pm G_3 = \pm \frac{\ln|V|}{2T} \int_{v_{x1} > 0} \frac{d^2S_1}{(2\pi)^3} \frac{v_{x1}}{v_{f1}} D(\hat{\mathbf{p}}_1) \frac{|\Delta|}{\text{ch}^2(|\Delta|/2T)}. \tag{63}$$



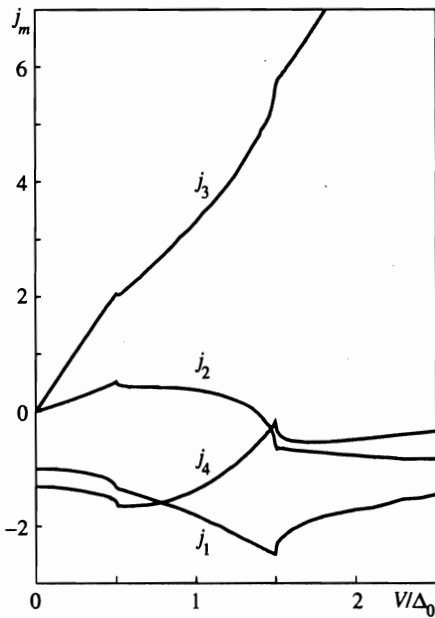


Рис. 2

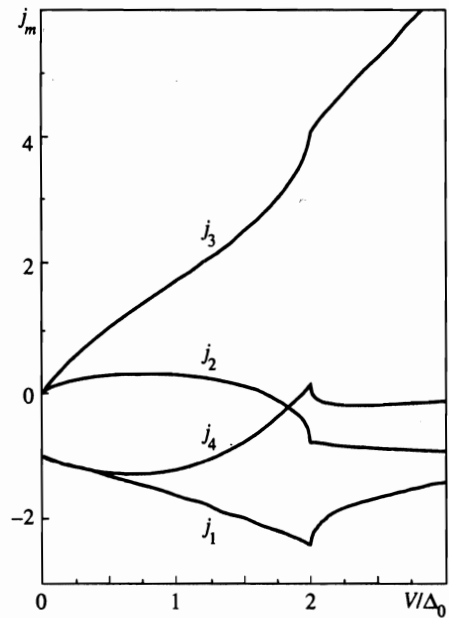


Рис. 3

Для сверхпроводников с изотропным спариванием это выражение экспоненциально мало при низких температурах  $T \ll \Delta$ . В противоположность этому для сверхпроводников с анизотропным спариванием выражение (63) при  $T \ll \Delta_{max}$  имеет степенную температурную зависимость. Например, если параметр порядка обращается в нуль на некоторой линии на поверхности Ферми (когда вблизи этой линии  $|\Delta(\hat{p})| = b|\tilde{p}_1|$ ), из (63) следует, что при низких температурах  $G_{2,3} \propto T \ln |V|$ .

На рис. 2, 3 представлены результаты численных расчетов величин  $j_m(v)$  ( $v = V/\Delta_0$ ) для ориентаций, когда нет подавления параметра порядка с обеих сторон туннельного барьера. На рис. 2 приведены графики для контакта сверхпроводника с анизотропным спариванием и изотропного сверхпроводника:  $\Delta_1 = \Delta_0 \cos(2\phi)$ ,  $\Delta_2 = \Delta_0/2 = \text{const}$ . Здесь  $\phi$  — азимутальный угол в плоскости  $xy$  тетрагонального сверхпроводника (ось  $z$  параллельна плоскости контакта). Для сверхпроводника с  $d$ -спариванием поверхность Ферми считаем цилиндрической. Прозрачность барьера берем в виде  $D \propto \cos^2 \phi$ , а  $\Delta_0/(2T) = 0.5$ . В этом случае сингулярными точками на ВАХ будут только максимальные значения величин  $||\Delta_1(\phi)| \pm |\Delta_2||$ , поскольку минимум этих величин достигается при нулевом значении  $\Delta_1$ . Заметим, что в случае  $\Delta_2 = 2\Delta_0$  для той же функции  $\Delta_1(\phi)$  был бы важен только минимум величин  $||\Delta_1(\phi)| - |\Delta_2||$ . На рис. 3 приведены результаты численных расчетов для контакта двух одинаковых сверхпроводников с анизотропным спариванием:  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_0 \cos(2\phi)$ . Все функции  $j_m(v)$  нормированы на величину  $|j_1(0)|$ .

### 5. ВАХ ДЛЯ ТУННЕЛЬНОГО ТОКА ПРИ НАЛИЧИИ ПОДАВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА С ОДНОЙ СТОРОНЫ КОНТАКТА

Рассмотрим туннельный контакт между двумя сверхпроводниками с анизотропным спариванием. В отличие от рассмотренного в предыдущем разделе случая будем постепенно изменять ориентацию кристаллических осей одного из сверхпроводников относительно плоскости барьера, а для другого сверхпроводника будем считать выполненным прежнее условие  $\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}) = \Delta_2(\check{\mathbf{p}})$ . Согласно (34), (35), при промежуточной кристаллической ориентации электронные пропагаторы для первого сверхпроводника, взятые на плоскости барьера, не имеют корневых расхождений, характерных для значений этих пропагаторов в глубине сверхпроводника. Следовательно, сингулярности, которые были найдены в предыдущем разделе, будут сглаживаться и исчезать при достаточно больших отклонениях от начальной ориентации. В то же время, как уже упоминалось, в этом случае появятся некоторые новые характерные сингулярности ВАХ. Одни из этих сингулярностей ВАХ связаны с существованием областей на поверхности Ферми, в которых параметр порядка  $\Delta_{1,\infty}(\hat{\mathbf{p}})$  имеет разные знаки. Тогда вблизи плоскости границы возникает связанное состояние квазичастиц с нулевой энергией. Другие сингулярности возникают, если появляются дополнительные связанные состояния квазичастиц с ненулевой энергией из-за пространственного изменения параметра порядка [8]. Как видно из (34), (35), в первом случае в пропагаторах важны слагаемые, содержащие  $1/\omega$ . В последнем случае следует рассматривать в пропагаторах полюс на ненулевой частоте. Таким образом, мы будем использовать для сингулярных частей пропагаторов первого сверхпроводника формулы (34), (35), а для пропагаторов второго сверхпроводника — формулу (33).

Существенно, что в случае, когда связанные состояния квазичастиц с нулевой энергией есть только с одной стороны контакта (а с другой стороны нет подавления параметра порядка), сингулярный вклад от этих связанных состояний возникает только в квазичастичном, но не в джозефсоновском токе. Действительно, согласно (30), сингулярные части пропагаторов, связанные с полюсом при нулевой частоте, удовлетворяют следующему соотношению  $f_s(\hat{\mathbf{p}}) = f_s^+(\hat{\mathbf{p}})$ . В противоположность этому для ориентаций, при которых нет подавления параметра порядка, выполняется соотношение  $f(\hat{\mathbf{p}}) = -f^+(\hat{\mathbf{p}})$ . По этой причине соответствующие сингулярные части  $j_1, j_2$  обращаются в нуль. Но это не так для связанных состояний с ненулевой энергией. так как функция  $Q_f(\hat{\mathbf{p}})$  является комплексной в противоположность вещественности функции  $B_f(\hat{\mathbf{p}})$  ( $B_f^+ = B_f^* = B_f, Q_f^+ = Q_f^*$ ).

Подставляя (33)–(35) в выражения (10), (11) и затем интегрируя по  $\omega$ , мы получаем для  $I_{3,4}$  следующие сингулярные вклады:

$$\begin{aligned}
 I_3(V, \hat{\mathbf{p}}_1) = & -B_{g1}(\hat{\mathbf{p}}_1) \operatorname{th} \left( \frac{V}{2T} \right) \frac{|V| \theta (|V| - |\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)|)}{\sqrt{V^2 - |\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)|^2}} - \\
 & - \frac{Q_{g1}(\hat{\mathbf{p}}_1) \sqrt{|\Delta_2|} \operatorname{sign}(V)}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ \operatorname{th} \left( \frac{h_1}{2T} \right) + \operatorname{th} \left( \frac{|\Delta_2|}{2T} \right) \right] \frac{\theta (|V| - h_1 - |\Delta_2|)}{\sqrt{|V| - h_1 - |\Delta_2|}} + \right. \\
 & \left. + \left| \operatorname{th} \left( \frac{|\Delta_2|}{2T} \right) - \operatorname{th} \left( \frac{h_1}{2T} \right) \right| \frac{\theta (|V| - ||\Delta_2| - h_1|) \operatorname{sign} (|\Delta_2| - h_1)}{\sqrt{(|V| - ||\Delta_2| - h_1|) \operatorname{sign} (|\Delta_2| - h_1)}} \right\}, \quad (64)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4(V, \hat{\mathbf{p}}_1) = & B_{g1}(\hat{\mathbf{p}}_1) \operatorname{th} \left( \frac{|V|}{2T} \right) \frac{|V| \theta (|\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)| - |V|)}{\sqrt{|\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2)|^2 - V^2}} + \\
 & + \frac{Q_{g1}(\hat{\mathbf{p}}_1) \sqrt{|\Delta_2|}}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ \operatorname{th} \left( \frac{h_1}{2T} \right) + \operatorname{th} \left( \frac{|\Delta_2|}{2T} \right) \right] \frac{\theta (h_1 + |\Delta_2| - |V|)}{\sqrt{h_1 + |\Delta_2| - |V|}} + \right. \\
 & \left. + \left[ \operatorname{th} \left( \frac{|\Delta_2|}{2T} \right) - \operatorname{th} \left( \frac{h_1}{2T} \right) \right] \frac{\theta ( (|V| - |\Delta_2| - h_1) \operatorname{sign} (h_1 - |\Delta_2|) )}{\sqrt{(|V| - |\Delta_2| - h_1) \operatorname{sign} (h_1 - |\Delta_2|)}} \right\}. \quad (65)
 \end{aligned}$$

Слагаемые, описывающие корневые неаналитичности в (34), (35), не учитываются в выражениях (64), (65), поскольку в рассматриваемом нами случае они приводят к скачкам и расходимостям только в производных кондактанса, а не в токе или самом кондактансе. Из-за того что зависимости параметра порядка  $\Delta_2$  и функции  $h_1$  от направлений импульса могут быть разными, дальнейшее интегрирование по поверхности Ферми может привести к различным видам сингулярных точек на ВАХ (на вид сингулярности влияет поведение соответствующих функций вблизи экстремума (см. ниже)). Рассмотрим сначала сингулярности ВАХ, которые связаны со слагаемыми вида  $1/\omega$  в выражениях для пропагаторов первого сверхпроводника и ограничимся двумя важными примерами. В частном случае, когда второй сверхпроводник является сверхпроводником с изотропным спариванием, на ВАХ будут следующие корневые расходимости:

$$j_3 = -\operatorname{th} \left( \frac{V}{2T} \right) \frac{|V| \theta (|V| - |\Delta_2|)}{\sqrt{V^2 - |\Delta_2|^2}} \int_{v_{x1} > 0} \frac{d^2 S_1 v_{x1}}{(2\pi)^3 v_{f1}} DB_{g1}(\hat{\mathbf{p}}_1), \quad (66)$$

$$j_4 = \operatorname{th} \left( \frac{|V|}{2T} \right) \frac{|V| \theta (|\Delta_2| - |V|)}{\sqrt{|\Delta_2|^2 - V^2}} \int_{v_{x1} > 0} \frac{d^2 S_1 v_{x1}}{(2\pi)^3 v_{f1}} DB_{g1}(\hat{\mathbf{p}}_1). \quad (67)$$

Функция  $j_3$  расходится при  $|V| = \Delta_2$  со стороны  $|V| > \Delta_2$ , а функция  $j_4$  — со стороны  $|V| < \Delta_2$ . В случае, когда  $\Delta_2 = 0$  (контакт  $S-N$ ) из выражения (66) следует, что кондактанс  $G_3 \propto [T \operatorname{ch}^2(V/2T)]^{-1}$ . Отсюда при низких напряжениях  $|V| \ll T$  имеем  $G_3 \propto 1/T$  и получаем аномальное возрастание кондактанса при низких температурах (см. также [21]). Подобная расходимость  $G_3$  при нулевой температуре имеет место, конечно, только для идеализированной системы, когда не учитываются факторы, приводящие к уширению  $\delta$ -пикув в плотности состояний квазичастиц.

Далее, если анизотропный параметр порядка  $\Delta_2$  имеет экстремум на некоторой линии на поверхности Ферми, вблизи которой

$$|\Delta_2| = a \pm b\tilde{p}_1^2, \quad a, b > 0, \quad (68)$$

то вид сингулярности на ВАХ зависит от поведения функции  $B_{g1}(\mathbf{p}_1)$  около этой линии. Если на этой линии экстремумов  $B_{g1}(\mathbf{p}_1) \neq 0$ , то  $j_3$  будет иметь логарифмическую расходимость для линии максимума, а  $j_4$  — для линии минимума:

$$j_3, j_4 \propto \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{th} \left( \frac{a}{2T} \right) \ln ||V| - a|. \quad (69)$$

Если же функция  $B_{g1}(\mathbf{p}_1)$  обращается в нуль на линии экстремумов, и вблизи нуля ведет себя линейно,

$$B_{g1}(\tilde{p}_1) = \beta|\tilde{p}_1|, \quad (70)$$

то величины  $j_{3,4}$  при  $|V| = a$  будут иметь односторонние вертикальные касательные:

$$G_3 \propto \frac{\sqrt{a}}{b} \operatorname{th} \left( \frac{a}{2T} \right) \frac{\theta(|V| - a)}{\sqrt{|V| - a}}, \quad G_4 \propto \frac{\sqrt{a}}{b} \operatorname{th} \left( \frac{a}{2T} \right) \frac{\theta(a - |V|)}{\sqrt{a - |V|}}. \quad (71)$$

Теперь перейдем к рассмотрению сингулярностей ВАХ, возникающих из-за полюсов в пропагаторах первого сверхпроводника при ненулевой частоте. В противоположность вкладу от связанных состояний с нулевой энергией квазичастичные связанные состояния с ненулевой энергией, даже если они присутствуют лишь с одной стороны плоскости контакта, вносят сингулярный вклад не только в квазичастичный, но и в джозефсоновский ток. Это связано с ненулевым значением величины  $\operatorname{Im} Q_f(\hat{p})$  (в то время как  $\operatorname{Im} B_f(\hat{p}) = 0$ ). Положения соответствующих сингулярных точек на ВАХ называются связанными с экстремальными значениями величин  $h_1 \pm |\Delta_2|$  на поверхности Ферми. Например, наличие линии экстремумов  $l$  для величины

$$h_1 + |\Delta_2| = a \pm b\tilde{p}_1^2, \quad a, b > 0 \quad (72)$$

приводит к логарифмическим расходямостям и скачкам функций  $j_m$ :

$$j_1, -j_4 = M_{f,g}^+ \begin{cases} \ln ||V| - a|, \\ \pi\theta(|V| - a), \end{cases} \quad -j_2, j_3 = M_{f,g}^+ \operatorname{sign}(V) \begin{cases} \pi\theta(a - |V|), \\ \ln ||V| - a|. \end{cases} \quad (73)$$

Верхняя (нижняя) строка в этих формулах соответствует верхнему (нижнему) знаку в (72), а

$$M_g^\pm = \frac{1}{16\sqrt{2}\pi^3} \int_{v_{x1} > 0} dl \frac{v_{x1}}{v_{f1}} D \sqrt{\frac{|\Delta_2|}{b}} Q_{g1}(\hat{p}_1) \left| \operatorname{th} \left( \frac{h_1}{2T} \right) \pm \operatorname{th} \left( \frac{|\Delta_2|}{2T} \right) \right|, \quad (74)$$

$$M_f^\pm = \int_{v_{x1} > 0} dl \frac{v_{x1}}{v_{f1}} D \sqrt{\frac{|\Delta_2|}{b}} \frac{\operatorname{sign}(\Delta_2)}{16\sqrt{2}\pi^3} \operatorname{Im} Q_{f1}(\hat{p}_1) \left| \operatorname{th} \left( \frac{h_1}{2T} \right) \pm \operatorname{th} \left( \frac{|\Delta_2|}{2T} \right) \right|. \quad (75)$$

Если функция  $||\Delta_2| - h_1|$  имеет линию экстремумов

$$||\Delta_2| - h_1| = a \pm b\tilde{p}_1^2, \quad a, b > 0, \quad (76)$$

то получаем следующие сингулярности в токе:

$$j_{1,4} = M_{f,g}^- \{ \mp \theta(\pm (|\Delta_2| - h_1)) \ln ||V| - a| + \pi\theta(\mp (|\Delta_2| - h_1))\theta(a - |V|) \}, \quad (77)$$

$$j_{2,3} = M_{f,g}^- \operatorname{sign}(V) \{ \theta(\mp (|\Delta_2| - h_1)) \ln ||V| - a| \pm \pi\theta(\pm (|\Delta_2| - h_1))\theta(a - |V|) \}. \quad (78)$$

Таким образом, для положительного (отрицательного) значения  $|\Delta_2| - h_1$  функции  $j_{2,3}$  ( $j_{1,4}$ ) имеют логарифмическую расходямость только для линии максимумов величины  $||\Delta_2| - h_1|$ , в то время как  $j_{1,4}$  ( $j_{2,3}$ ) имеют подобную расходямость только для линии минимумов этой же величины.

Как было отмечено выше, функция  $h(\hat{p})$  может иметь неаналитическое поведение, например, в направлении импульса, при котором связанное состояние вблизи границы исчезает. Принимая во внимание эту возможность, предположим, что функция  $h_1 + |\Delta_2|$  вблизи некоторой линии на поверхности Ферми имеет следующее неаналитическое поведение:

$$h_1 + |\Delta_2| = a + [b\theta(\bar{p}) + c\theta(-\bar{p})]\bar{p}, \quad a > 0. \quad (79)$$

Частному случаю  $b$  (или  $c$ )  $\rightarrow \infty$  соответствует отсутствие связанного состояния в направлениях  $\bar{p} > 0$  (или  $\bar{p} < 0$ ) от этой линии. Тогда функции  $j_m$  при  $|V| = a$  будут иметь односторонние вертикальные касательные:

$$G_{1,-}G_{4-} = \frac{\theta(a - |V|)}{\sqrt{a - |V|}} \text{sign}(V) P_{f,g}^+, \quad G_{2,-}G_{3-} = \frac{\theta(|V| - a)}{\sqrt{|V| - a}} P_{f,g}^+ \quad (80)$$

Здесь введены обозначения

$$P_g^\pm = \int_{v_{x1} > 0} dl \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \frac{v_{x1}}{v_{f1}} D \sqrt{|\Delta_2|} \frac{Q_{g1}(\hat{p}_1)}{8\sqrt{2\pi^3}} \left| \text{th} \left( \frac{h_1}{2T} \right) \pm \text{th} \left( \frac{|\Delta_2|}{2T} \right) \right|, \quad (81)$$

$$P_f^\pm = \int_{v_{x1} > 0} dl \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \frac{v_{x1}}{v_{f1}} D \sqrt{|\Delta_2|} \frac{\text{sign}(\Delta_2)}{8\sqrt{2\pi^3}} \text{Im} Q_{f1}(\hat{p}_1) \left| \text{th} \left( \frac{h_1}{2T} \right) \pm \text{th} \left( \frac{|\Delta_2|}{2T} \right) \right|. \quad (82)$$

Аналогично, если функция  $|h_1 - |\Delta_2||$  вблизи некоторой линии имеет вид (79), то функции  $j_m$  при  $|V| = a$  будут иметь односторонние вертикальные касательные:

$$G_{1,4} = \text{sign}(V) \text{sign}(|\Delta_2| - h_1) \frac{\theta((a - |V|)(|\Delta_2| - h_1))}{\sqrt{(a - |V|) \text{sign}(|\Delta_2| - h_1)}} P_{f,g}^-, \quad (83)$$

$$G_{2,3} = - \frac{\theta((|V| - a)(|\Delta_2| - h_1))}{\sqrt{(|V| - a) \text{sign}(|\Delta_2| - h_1)}} P_{f,g}^-. \quad (84)$$

Формулы (64), (65) не годятся для непосредственного перехода к пределу  $\Delta_2 = 0$  при конечном напряжении, поскольку при их выводе предполагалось, что величина напряжения близка к соответствующим сингулярностям в этих формулах. Для случая контакта  $S-N$  из (7), (10), (11) следует, что если функция  $h_1$  имеет экстремум вида  $h_1 = a \pm b\bar{p}_1^2$ ,  $a, b > 0$ , то в контактансе при  $|V| = a$  имеется следующая низкотемпературная аномалия:  $G_{3,4} \propto 1/\sqrt{bT}$ .

На рис. 4 приведены результаты численных расчетов кривых  $j_m(v)$  ( $v = V/\Delta_0$ ) для случая, когда есть подавление параметра порядка только с одной стороны туннельного барьера. Рассмотрен туннельный контакт между сверхпроводником с  $d$ -спариванием и сверхпроводником с изотропным  $s$ -спариванием при следующих условиях:

$$\Delta_{1\infty} = \Delta_0 \cos(2\phi - 2\phi_0), \quad \Delta_2 = 0.2\Delta_0 = \text{const.}$$

Для сверхпроводника с  $d$ -спариванием мы выбрали те же параметры, что и ранее (см. рис. 1):  $\phi_0 = \pi/9$ ,  $T = 0.45T_{c1}$ ,  $\Delta_0/(2T) = 2$ . Здесь  $T_{c1}$  — критическая температура

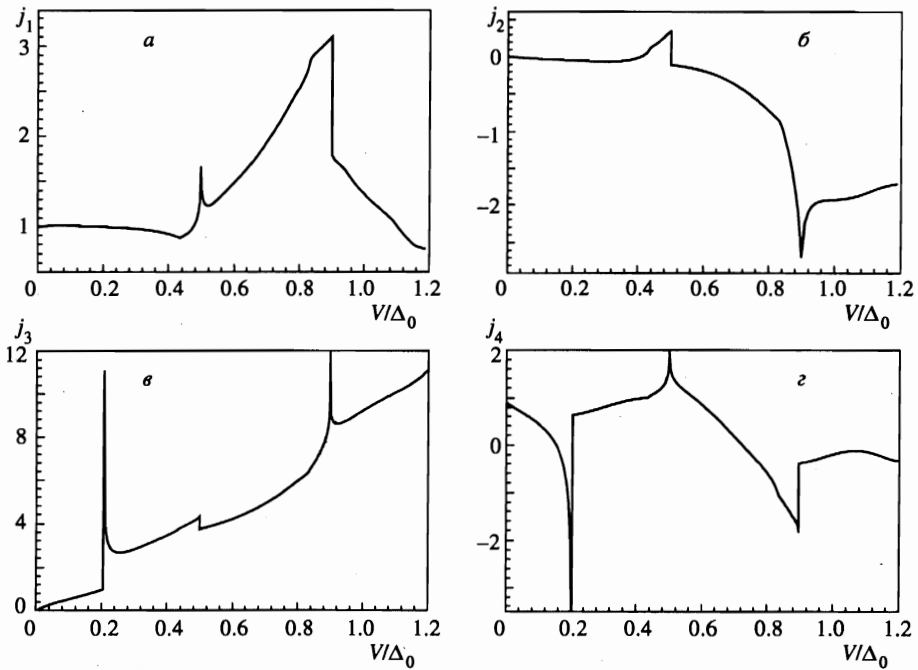


Рис. 4

для сверхпроводника с  $d$ -спариванием. Прозрачность туннельного барьера взята в виде  $D \propto \cos^2 \phi$ .

На кривых  $j_3, j_4$  имеются корневые расходимости при напряжении  $V = \Delta_2 = 0.2\Delta_0$ . Кроме этого, при напряжении  $V = h_m - \Delta_2 = 0.5\Delta_0$  функции  $j_1, j_4$  имеют логарифмические расходимости, а функции  $j_2, j_3$  — скачки. При  $V = h_m + \Delta_2 = 0.9\Delta_0$  имеются логарифмические расходимости функций  $j_2, j_3$  и скачки у функций  $j_1, j_4$ . При напряжениях  $V = h_{ed} \pm \Delta_2 = 0.83\Delta_0, 0.43\Delta_0$  ВАХ имеют изломы, хотя некоторые из них слабо выражены. Все функции  $j_m(v)$  нормированы на величину  $j_1(0)$ .

### 6. ВАХ ДЛЯ ТУННЕЛЬНОГО ТОКА В СЛУЧАЕ ПОДАВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА С ОБЕИХ СТОРОН КОНТАКТА

Рассмотрим теперь случай, когда параметр порядка существенно подавлен вблизи плоскости контакта в обоих сверхпроводниках. Тогда для сингулярных частей пропагаторов с обеих сторон барьера следует использовать выражения (34), (35). При подстановке этих выражений в (8)–(11) возникает несколько видов неаналитических слагаемых. Они получаются после перемножения полюсных членов друг на друга и от произведения полюсных членов с одной стороны и корневых слагаемых в (34), (35) с другой стороны. После этого, например, для сингулярной части  $I_3$  находим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
I_3 = & \frac{1}{\pi} \operatorname{th} \left( \frac{V}{2T} \right) B_{g1}(\hat{\mathbf{p}}_1) \left[ \operatorname{Re} C_2(\hat{\mathbf{p}}_2) \sqrt{V^2 - \Delta_{2\infty}^2(\hat{\mathbf{p}}_2)} \theta(|V| - |\Delta_{2\infty}(\hat{\mathbf{p}}_2)|) + \right. \\
& + \operatorname{Im} C_2(\hat{\mathbf{p}}_2) \sqrt{\Delta_{2\infty}^2(\hat{\mathbf{p}}_2) - V^2} \theta(|\Delta_{2\infty}(\hat{\mathbf{p}}_2)| - |V|) - \frac{\pi}{2} Q_{g2}(\hat{\mathbf{p}}_2) \delta(|V| - h_2(\hat{\mathbf{p}}_2)) + \\
& + (\hat{\mathbf{p}}_2 \rightarrow \check{\mathbf{p}}_2) \left. \right] + \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ \operatorname{th} \left( \frac{h_1(\hat{\mathbf{p}}_1) + V}{2T} \right) - \operatorname{th} \left( \frac{h_1(\hat{\mathbf{p}}_1)}{2T} \right) \right] Q_{g1}(\hat{\mathbf{p}}_1) \times \right. \\
& \times \left[ -\frac{\pi}{4} Q_{g2}(\hat{\mathbf{p}}_2) \delta(|h_1(\hat{\mathbf{p}}_1) + V| - h_2(\hat{\mathbf{p}}_2)) + \operatorname{Re} C_2(\hat{\mathbf{p}}_2) \sqrt{(h_1(\hat{\mathbf{p}}_1) + V)^2 - \Delta_{2\infty}^2(\hat{\mathbf{p}}_2)} \times \right. \\
& \times \theta(|h_1(\hat{\mathbf{p}}_1) + V| - |\Delta_{2\infty}(\hat{\mathbf{p}}_2)|) + \operatorname{Im} C_2(\hat{\mathbf{p}}_2) \sqrt{\Delta_{2\infty}^2(\hat{\mathbf{p}}_2) - (h_1(\hat{\mathbf{p}}_1) + V)^2} \times \\
& \left. \left. \times \theta(|\Delta_{2\infty}(\hat{\mathbf{p}}_2)| - |h_1(\hat{\mathbf{p}}_1) + V|) - (V \rightarrow -V) \right] + (\hat{\mathbf{p}}_2 \rightarrow \check{\mathbf{p}}_2) \right\} + (1 \leftrightarrow 2). \quad (85)
\end{aligned}$$

Аналогичные сингулярности появляются в выражениях для  $I_{1,2,4}$ .

В последней формуле мы пренебрегли вкладом, который получается после перемножения полюсных (при  $\omega = 0$ ) членов, фигурирующих в гриновских функциях с обеих сторон контакта. При пренебрежении уширением связанных состояний этот вклад при конечном напряжении обращается в нуль. Но для реальных систем он может быть важен для напряжений, меньших или сравнимых с характерной шириной соответствующего пика в плотности состояний квазичастиц. Для стационарного эффекта Джозефсона этот вклад приводит к низкотемпературной аномалии в критическом токе и к возможности (при некоторой температуре) фазового перехода из 0-контакта в  $\pi$ -контакт [22, 23].

При дальнейшем интегрировании по направлениям импульса мы будем предполагать, что параметр порядка  $|\Delta_{2\infty}(\hat{\mathbf{p}}_2)|$  или величины  $|h_1 \pm |\Delta_{2\infty}||$ ,  $h_2$ ,  $|h_1 \pm h_2|$  имеют линию экстремумов. Пусть, например, параметр порядка  $|\Delta_{2\infty}(\hat{\mathbf{p}}_2)|$  или величина  $|h_1 \pm |\Delta_{2\infty}||$  имеют линию экстремумов вида

$$|\Delta_{2\infty}|, |h_1 \pm |\Delta_{2\infty}|| = a \pm b\tilde{p}^2, \quad a, b > 0, \quad (86)$$

а величина  $B_1(\hat{\mathbf{p}}_1)$ , или  $|\Delta_{2\infty}|$ ,  $Q_1(\hat{\mathbf{p}}_1)$  не обращается в нуль на этой линии. Тогда в кондактансе  $G_{1,2,4}$  будут следующие логарифмические сингулярности:

$$\operatorname{sign}(V)G_1, G_2, \operatorname{sign}(V)G_4 \propto \sqrt{\frac{a}{b}} \ln ||V| - a|. \quad (87)$$

В то же время логарифмическая расходимость в  $G_3$  вида (87) появляется только для линии максимумов. Это связано с тем, что при  $|\omega| < \min(|\Delta_{\infty}(\check{\mathbf{p}})|, |\Delta_{\infty}(\hat{\mathbf{p}})|)$  выполняется равенство  $\operatorname{Im} C = 0$ . Для частной ориентации, при которой  $\Delta_2(\check{\mathbf{p}}_2, x) = -\Delta_2(\hat{\mathbf{p}}_2, x)$ , логарифмическая расходимость в  $G_4$  остается только для линии минимумов. Корневое поведение пропагатора вида  $\sqrt{\Delta_{\infty}^2(\hat{\mathbf{p}}) - \omega^2}$  привело здесь к логарифмической расходимости в кондактансе. В других случаях оно может привести к появлению излома в кондактансе или расходимости его производных. В данной работе такие сингулярности мы не рассматриваем.

Если функция  $h_2$  имеет линию экстремумов вида

$$h_2 = a \pm b\tilde{p}^2, \quad a, b > 0, \quad (88)$$

то ВАХ будет иметь следующие корневые расходимости:

$$j_1, \mp j_4 = \frac{\pm 1}{16\pi^3} \operatorname{th} \left( \frac{|V|}{2T} \right) \frac{\theta(\pm(a - |V|))}{\sqrt{||V| - a|}} \int_{v_{x1} > 0} dl \frac{v_{x1}}{v_{f1}} B_{f,g1}(\hat{p}_1) \operatorname{Re} Q_{f,g2}(\hat{p}_2) \frac{D}{\sqrt{b}} \quad (89)$$

$$j_2, -j_3 = \frac{1}{8\pi^3} \operatorname{th} \left( \frac{V}{2T} \right) \frac{\theta(\pm(|V| - a))}{\sqrt{||V| - a|}} \int_{v_{x1} > 0} dl \frac{v_{x1}}{v_{f1}} B_{f,g1}(\hat{p}_1) \operatorname{Re} Q_{f,g2}(\hat{p}_2) \frac{D}{\sqrt{b}} \quad (90)$$

В этом разделе коэффициенты  $B_{f2}, Q_{f2}^*$  берутся из соответствующих выражений для  $f^+$  второго сверхпроводника, в то время как  $B_{f1}, Q_{f1}$  — из выражений для  $f$  первого сверхпроводника.

Пусть функция  $h_2$  вблизи некоторой линии  $l$  имеет, например, следующее неаналитическое поведение:

$$h_2 = a + [b\theta(\bar{p}) + c\theta(-\bar{p})] \bar{p}, \quad a > 0. \quad (91)$$

Это приводит к логарифмическим расходимостям функций  $j_{1,4}$  при  $|V| = a$ :

$$j_1, j_4 = \frac{\ln ||V| - a|}{8\pi^4} \operatorname{th} \left( \frac{|V|}{2T} \right) \int_{v_{x1} > 0} dl \frac{v_{x1}}{v_{f1}} DB_{f,g1}(\hat{p}_1) \operatorname{Re} Q_{f,g2}(\hat{p}_2) \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right). \quad (92)$$

Функции  $j_{2,3}$  имеют при этом скачки:

$$j_2, -j_3 = \frac{1}{8\pi^3} \operatorname{th} \left( \frac{V}{2T} \right) \int_{v_{x1} > 0} dl \frac{v_{x1}}{v_{f1}} DB_{f,g1}(\hat{p}_1) \operatorname{Re} Q_{f,g2}(\hat{p}_2) \times \\ \times \left[ \frac{\theta((|V| - a)b)}{|b|} + \frac{\theta((a - |V|)c)}{|c|} \right]. \quad (93)$$

Наконец, рассмотрим случай, когда величина  $|h_1 - h_2|$  имеет линию экстремумов

$$|h_1 - h_2| = a \pm b\bar{p}^2, \quad a, b > 0. \quad (94)$$

Тогда мы получаем, что ВАХ будут иметь следующие корневые расходимости:

$$j_1, -j_4 = \frac{\mp \theta(\pm(a - |V|))}{16\pi^3 \sqrt{||V| - a|}} \int_{v_{x1} > 0} dl \frac{dl}{\sqrt{b}} N_{f,g}, \quad (95)$$

$$j_2, -j_3 = \frac{\operatorname{sign}(V)\theta(\pm(|V| - a))}{8\pi^3 \sqrt{||V| - a|}} \int_{v_{x1} > 0} dl \frac{dl}{\sqrt{b}} N_{f,g}. \quad (96)$$

Здесь введено обозначение

$$N_{f,g} = \frac{v_{x1}}{v_{f1}} D \operatorname{Re} (Q_{f,g1} Q_{f,g2}^*) \left| \operatorname{th} \left( \frac{h_1}{2T} \right) - \operatorname{th} \left( \frac{h_2}{2T} \right) \right|. \quad (97)$$

В случае, когда величина  $|h_1 - h_2|$  вблизи некоторой линии имеет неаналитическое поведение вида (91), функции  $j_{1,4}$  имеют логарифмическую расходимость при  $|V| = a$ :



$$j_1, -j_4 = \frac{\ln ||V| - a|}{8\pi^4} \int_{v_{x1} > 0} dN_{f,g} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right), \quad (98)$$

а функции  $j_{2,3}$  претерпевают скачки:

$$j_2, -j_3 = \frac{\text{sign}(V)}{8\pi^3} \int_{v_{x1} > 0} dN_{f,g} \left[ \frac{\theta((|V| - a) b)}{|b|} + \frac{\theta((a - |V|) c)}{|c|} \right]. \quad (99)$$

Когда величина  $h_1 + h_2$  имеет линию экстремумов, все результаты для сингулярностей получаются из (94)–(99) после замены в этих формулах  $h_2 \rightarrow -h_2$ ,  $j_1 \rightarrow -j_1$ ,  $Q_{f2}^* \rightarrow Q_{f2}$ . Следует добавить, что кроме описанных в этом разделе сингулярных точек имеются также аналогичные сингулярности, которые описываются теми же уравнениями (86)–(93) после замены  $1 \leftrightarrow 2$ .

На рис. 5 приведены результаты численных расчетов функций  $j_m(v)$  ( $v = V/\Delta_0$ ) для случая подавления параметра порядка с обеих сторон туннельного барьера. Рассмотрен туннельный контакт между двумя одинаковыми сверхпроводниками с  $d$ -спариванием в частном случае «зеркального» контакта, когда туннельный барьер является плоскостью симметрии сверхпроводящих электродов:  $\Delta_{1\infty}(\hat{p}_1) = \Delta_{2\infty}(\hat{p}_1) = \Delta_0 \cos(2\phi - 2\phi_0)$ . Как и ранее (см. рис. 1), мы взяли  $\phi_0 = \pi/9$ ,  $T = 0.45T_c$ ,  $\Delta_0/(2T) = 2$ ,  $D \propto \cos^2 \phi$ . При напряжении  $V = 2h_m = 1.4\Delta_0$  кривые  $j_{1,2,3,4}$  имеют корневые расходимости. Кроме

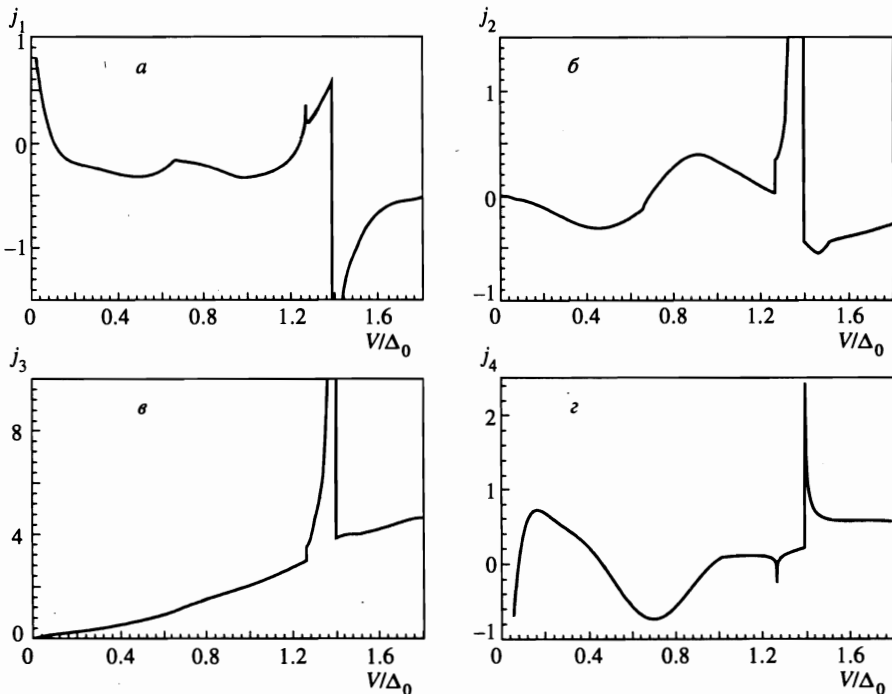


Рис. 5

того, при напряжении  $V = 2h_{ed} = 1.26\Delta_0$  имеются логарифмические расходимости  $j_1$ ,  $j_4$  и скачки  $j_2$ ,  $j_3$ . Вблизи  $V = 0.635\Delta_0$  характер поведения кривых  $j_1$ ,  $j_2$  напоминает излом. Это связано с вкладом связанных состояний с нулевой энергией с одной стороны контакта и состояний в непрерывном спектре квазичастиц с другой стороны контакта: функция  $\min(|\cos(2\phi - 2\phi_0)|, |\cos(2\phi + 2\phi_0)|)$  принимает максимальное значение 0.635 в направлении  $\phi = \pm 0.79$ , при котором  $B_f \neq 0$ .

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как мы показали выше, при зеркальном отражении квазичастиц от плоскости туннельного барьера возможно большое разнообразие неаналитических точек на ВАХ контактов между сверхпроводниками с анизотропным спариванием. Сингулярное поведение ВАХ существенно отличается от поведения, которое характерно для контакта сверхпроводников с изотропным  $s$ -спариванием. Разумеется, в реальных системах все особенности должны быть существенно сглажены. В частности, качество плоскости барьера может заметно влиять на проявление рассмотренных особенностей. Например, вместо описанных выше расходимостей в токе в реальных условиях следует ожидать появления конечных пиков. Величина и ширина этих пиков чувствительны к процессам упругого и неупругого рассеяния, шероховатостям плоскости барьера и к величине коэффициента прозрачности. Процессы неупругого рассеяния сглаживают сингулярности в туннельном токе для сверхпроводников как с изотропным, так и с анизотропным спариванием. Процессы упругого рассеяния, как известно, подавляют сверхпроводимость только для анизотропного спаривания. Все эти факторы вместе с качеством плоскости туннельного барьера и конечной величиной прозрачности приводят к уширению  $\delta$ -пиков в плотности состояний квазичастиц и, следовательно, размывают соответствующие пики в туннельном токе. Тем не менее рассмотренное выше характерное поведение ВАХ можно наблюдать при определенных реальных условиях, и оно может служить чувствительным тестом для определения анизотропных типов спаривания в сверхпроводниках, в частности, для обнаружения изменения знака параметра порядка на поверхности Ферми.

Один из нас (Ю. С. Б.) выражает искреннюю признательность Д. Райнеру и Дж. Саулсу за плодотворное обсуждение и возможность ознакомиться с их работами до опубликования, а также благодарит Х. Буркхардта за полезные замечания. Работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 96-02-16249). А. А. С. благодарит научно-исследовательский центр Юлиха за финансовую поддержку.

## Литература

1. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ 51, 1535 (1966).
2. N. R. Werthamer, Phys. Rev. 147, 255 (1966).
3. A. Barone and G. Paternò, *Physics and Applications of the Josephson Effect*, Wiley and Sons, N. Y., (1982) (А. Бароне, Дж. Патерно, *Эффект Джозефсона. Физика и применение*, Мир, Москва (1984).

4. V. B. Geshkenbein, I. A. Larkin, and A. Barone, *Phys. Rev. B* **36**, 235 (1987).
5. M. Sigrist and T. M. Rice, *J. Phys. Soc. Jap.* **61**, 4283 (1992).
6. A. Millis, D. Rainer, and J. A. Sauls, *Phys. Rev. B* **38**, 4504 (1988).
7. Yu. S. Barash, A. V. Galaktionov, and A. D. Zaikin, *Phys. Rev. B* **52**, 665 (1995).
8. L. J. Buchholtz, M. Palumbo, D. Rainer, and J. A. Sauls, *J. Low Temp. Phys.* **101**, 1099 (1995).
9. M. Sigrist and T. M. Rice, *Rev. Mod. Phys.* **67**, 503 (1995).
10. D. J. Van Harlingen, *Rev. Mod. Phys.* **67**, 515 (1995).
11. Ch. Renner and Ø. Fischer, *Phys. Rev. B* **51**, 9208 (1995).
12. Yu. S. Barash, A. V. Galaktionov, and A. D. Zaikin, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1675 (1995).
13. E. Riedel, *Z. Naturforsch. A* **19**, 1634 (1964).
14. C.-R. Hu, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1526 (1994).
15. J. Yang and C.-R. Hu, *Phys. Rev. B* **50**, 16766 (1994).
16. M. Matsumoto and H. Shiba, *J. Phys. Soc. Jap.* **64**, 4867 (1995).
17. Y. Nagato and K. Nagai, *Phys. Rev. B* **51**, 16254 (1995).
18. А. В. Зайцев, *ЖЭТФ*, **86**, 1742 (1984).
19. L. J. Buchholtz, M. Palumbo, D. Rainer, and J. A. Sauls, *J. Low Temp. Phys.* **101**, 1079 (1995).
20. M. Matsumoto and H. Shiba, *J. Phys. Soc. Jap.* **64**, 3384 (1995).
21. Y. Tanaka and S. Kashiwaya, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3451 (1995).
22. Yu. S. Barash, H. Burkhardt, and D. Rainer, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4070 (1996).
23. Y. Tanaka and S. Kashiwaya, *Phys. Rev. B* **53**, 11957 (1996).