

К ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ЖЕСТКИХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ В СКРЕЩЕННЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

*И. Ф. Волошин, А. В. Калинов, С. Е. Савельев, Л. М. Фишер,
В. А. Ямпольский*, Ф. Перес Родригес***

*Всероссийский электротехнический институт
111250, Москва, Россия*

** Институт радиофизики и электроники
310085, Харьков, Украина*

*** Институт физики автономного университета Пуэбла, Мексика*

Поступила в редакцию 18 июля 1996 г.

Для критического состояния жесткого сверхпроводника, помещенного во внешние скрещенные постоянное и переменное магнитные поля, развита модель, в которой последовательно учитываются пересечения абрикосовских вихрей. Уравнения электродинамики выводятся из принципа минимума энергии Гиббса, которая вычисляется в рамках предлагаемой двухскоростной гидродинамической модели. Одна из скоростей описывает движение вихревой решетки как целого, а другая связана с относительным движением двух пересекающихся подрешеток. Выведенные уравнения включают как частные случаи известные уравнения электродинамики жестких сверхпроводников. В рамках модели получает естественное объяснение обнаруженный в работе эффект подавления статического магнитного момента образца поперечным переменным магнитным полем.

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание электродинамики жестких сверхпроводников до сих пор остается нерешенной до конца проблемой. Статические и квазистатические электромагнитные свойства этих материалов рассматриваются обычно на основе уравнения, предложенного Бином [1] для распределения магнитного поля H :

$$\frac{dH}{dx} = \pm \frac{4\pi}{c} J_c, \quad (1)$$

где J_c — критическая плотность тока, c — скорость света. Это уравнение позволило рассчитать статическую намагниченность жесткого сверхпроводника, петли гистерезиса и потери на перемагничивание. Это же уравнение с успехом применяется для описания низкочастотных свойств сверхпроводников. На его основе были развиты бесконтактные методы определения критической плотности тока J_c , ее зависимости от магнитного поля, температуры и других внешних параметров по измерениям низкочастотного поверхностного импеданса, динамической магнитной восприимчивости, третьей гармоники отклика сверхпроводника на переменное магнитное поле и др. [2–5].

Уравнение Бина получило обоснование в рамках рассмотрения баланса сил, действующих на абрикосовские вихри. Согласно модели, получившей название модели критического состояния, магнитная сила, действующая на вихрь, компенсируется силами пиннинга, связанными со взаимодействиями вихрей с неоднородностями кристаллической решетки, выпадениями других фаз, границами образца и др. (см., например,

[6]). Благодаря пиннингу критическая плотность тока J_c оказывается отличной от нуля, и распределение магнитного поля удовлетворительно описывается уравнением (1).

В настоящее время под уравнением критического состояния обычно понимается уравнение Максвелла для магнитного поля с материальным уравнением $\mathbf{J} = \mathbf{J}_c$ (см., например, [7]). В большинстве случаев для простых геометрий образцов направление вектора \mathbf{J}_c определяется однозначно. Задача заметно усложняется, когда внешнее магнитное поле содержит несколько компонент или когда его ориентация меняется со временем. Для расчета электромагнитных свойств в этих случаях в ряде работ (см., например, [8]) предлагается обобщить уравнение критического состояния следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} J_c \frac{\mathbf{E}}{E}, \quad (2)$$

где \mathbf{E} — электрическое поле, \mathbf{B} — магнитная индукция. Это уравнение может быть понято из анализа вольт-амперной характеристики жесткого сверхпроводника. В самом деле, изменение магнитного потока в сверхпроводнике приводит к появлению электрического поля и к переходу образца в резистивное состояние. Можно полагать, что, как и в нормальном металле, направление тока будет совпадать с \mathbf{E} . Переходя к пределу при $E \rightarrow 0$, получаем уравнение (2). В рамках этого уравнения был объяснен ряд эффектов нелинейного взаимодействия электромагнитных волн [9, 10].

Особый интерес представляет описание свойств сверхпроводника в скрещенных магнитных полях [8, 11]. Недавно [12] нами было обнаружено явление коллапса статического магнитного момента M жесткого сверхпроводника под действием переменного магнитного поля $\mathbf{h} = h_0 \cos \omega t$, ортогонального постоянному магнитному полю \mathbf{H} . Оба поля были параллельны поверхности сверхпроводящей пластины. Было обнаружено, что под действием переменного магнитного поля $h_0 \ll H$ магнитный момент заметно уменьшается и на участках кривой $M(H)$ исчезает гистерезис.

Существуют два альтернативных подхода к описанию электродинамики сверхпроводника в скрещенных полях. Один из них основан на применении уравнения (2). В согласии с этим уравнением экранирующие токи, создающие постоянный магнитный момент, под действием переменного магнитного поля смещаются в объем сверхпроводника, что и приводит к уменьшению магнитного момента. Более последовательный подход может основываться на особенностях поведения вихревой системы в скрещенных магнитных полях — явлении пересечения вихрей Абрикосова (*flux cutting*) [13, 14]). Естественно было бы ожидать, что обнаруженное явление коллапса может быть объяснено с помощью развитых на основе модели пересечения вихрей электродинамических уравнений (см., например, [15, 16]), которые успешно описывали ряд экспериментов в скрещенных магнитных полях [17, 18]. Эти уравнения описывают пространственное изменение модуля магнитной индукции B и угла ϑ ее наклона к некоторой выбранной оси z и являются обобщением модели Бина (1). В простейшем случае их можно представить в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x} &= \frac{4\pi}{c} J_c, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= k_c, \end{aligned} \quad (3)$$

где J_c — критическая плотность тока, аналогичная введенной в уравнении (1), а k_c —

феноменологический параметр, определяемый током, протекающим вдоль V . К сожалению, эти уравнения не описывают коллапс.

Таким образом, складывается парадоксальная ситуация: уравнение (2), полученное качественно и не учитывающее свойства вихревой системы, позволяет объяснить явление коллапса, тогда как из уравнений, связанных с физикой поведения вихревой системы в скрещенных полях, следует, что магнитный момент не должен столь сильно зависеть от переменного поля. Можно предположить, что такое несоответствие обусловлено тем, что электродинамические уравнения не были последовательно выведены из модели пересечения вихревых нитей и носят феноменологический характер.

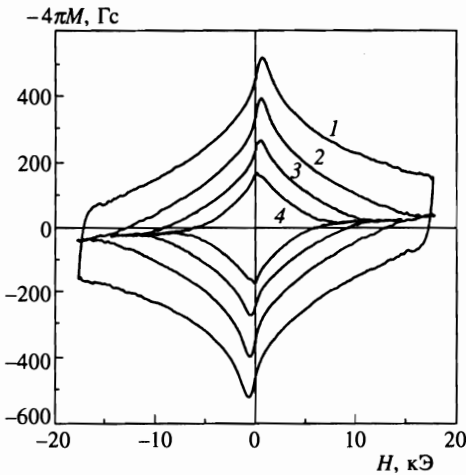
Цель настоящей работы состоит в построении электродинамической модели, адекватно учитывающей поведение вихревой системы в скрещенных полях и позволяющей описать обнаруженное явление. В следующем разделе приводится подробное описание эксперимента [12], который явился определяющим для проверки применимости существующих моделей электродинамики жестких сверхпроводников в скрещенных магнитных полях. Далее в работе с помощью вариационного принципа выведена система уравнений, включающая в себя как предельные случаи существующие другие модели и успешно описывающая коллапс магнитного момента.

2. ЭКСПЕРИМЕНТ

Эффективным методом изучения поведения жесткого сверхпроводника в скрещенных магнитных полях явилось исследование влияния переменного магнитного поля на статические кривые намагничивания. Измерения проводились на пластинах высокотемпературного текстурованного сверхпроводника системы $Y-Ba-Cu-O$ (YBCO), вырезанных из массивной заготовки ($4 \times 7 \times 60$ мм³). Поверхность пластин совпадала с кристаллографической плоскостью ab . Образцы имели микроструктуру типа кирпичной кладки, характерную для плавленых материалов YBCO. Температуры начала и полного завершения сверхпроводящего перехода составляли соответственно 92 и 91.3 К, критическая плотность тока при $T = 77$ К в магнитном поле 10 кЭ была около 10^4 А/см².

Петли намагничивания $M(H)$ измерялись с помощью вибрационного магнетометра. Постоянное магнитное поле H напряженностью до 10 кЭ создавалось электромагнитом и устанавливалось параллельно поверхности образца. Переменное магнитное поле $h(t) = h_0 \cos \omega t$ с амплитудой h_0 до 600 Э и частотой $\omega/2\pi$ в диапазоне 100–2000 Гц индуцировалось дополнительным соленоидом. Поле $h(t)$ было ориентировано в плоскости образца перпендикулярно H .

Влияние переменного магнитного поля на магнитный момент продемонстрировано на рисунке. Кривые $M(H)$ получены для образца размерами $8 \times 4 \times 0.4$ мм³ и соответствуют различным значениям амплитуды h_0 . Видно, что размер петли намагничивания существенно уменьшается с ростом h_0 . Более того, гистерезис намагничивания в сильных полях H подавляется, и на участках кривых исчезает гистерезис. Размер этих участков заметно увеличивается с ростом h_0 . Оценки показывают, что такие участки кривых намагничивания соответствуют значениям величин H и h_0 , при которых переменное поле полностью проникает в объем образца. Установлено, что эффект не чувствителен к частоте переменного магнитного поля. Следует обратить внимание на то, что подавление магнитного момента под действием поля $h(t)$ носит необратимый характер: после выключения переменного магнитного поля в произвольном поле $H = H_1$ магнит-



Эволюция петель намагничивания при увеличении амплитуды переменного поля: 1 — $h_0 = 0$; 2 — $h_0 = 100$ Э; 3 — 200 Э, 4 — 300 Э; $\omega/2\pi = 130$ Гц, $T = 77$ К

ный момент остается «замороженным», а не восстанавливает свое исходное значение, соответствующее $M(H_1)$.

Приведенные экспериментальные результаты косвенно свидетельствуют в пользу следующей простой картины распределения переменного и постоянного экранирующих токов. Переменные токи, индуцируемые внешним переменным полем $h(t)$, «выталкивают» постоянный экранирующий ток из приповерхностной области в глубину образца. В результате всюду, куда проникло переменное магнитное поле, токи, создающие постоянный момент образца, отсутствуют, т. е. распределение постоянного магнитного поля в этой области оказывается однородным. В случае полного проникновения переменного поля в образец кривые намагничивания $M(H)$ становятся обратимыми, и это состояние сохраняется даже после выключения внешнего переменного магнитного поля. Такое расслоение постоянного и переменного экранирующих токов приводит к другим наблюдаемым эффектам: коллапсу транспортного тока под действием внешнего коллинеарного переменного магнитного поля, подавлению наведенного циркулярного тока в сверхпроводящих кольцах и др. [8, 11]. Описанная картина расслоения токов получила прямое экспериментальное доказательство в работе [4], в которой определялось пространственное распределение токов в образце с помощью датчика Холла. Приведенная ниже теория, построенная на основе анализа кинетики вихревой системы, позволяет интерпретировать всю совокупность экспериментальных фактов.

3. ТЕОРИЯ

3.1. Двухскоростная гидродинамическая модель динамики вихревой решетки

Для описания электродинамики жесткого сверхпроводника в скрещенных магнитных полях будем рассматривать поведение вихревой системы в макроскопическом приближении. Состояние системы будем описывать не координатами и скоростями отдельных вихрей, а некоторыми усредненными параметрами, относящимися сразу к большому числу вихрей, т. е. будем использовать квазигидродинамическое приближение. В

рамках такого подхода введем в рассмотрение две непрерывные функции: плотность вихрей n и среднюю скорость V достаточно больших групп вихрей. Скорость V отлична от нуля при изменении внешнего магнитного поля, которое, как мы будем предполагать, изменяется достаточно медленно (квазистационарно). Если изменение поля на поверхности сверхпроводника прекращается, то вихревая решетка сохраняет свое состояние сколь угодно долго. В состоянии равновесия магнитная сила, действующая на вихри, полностью компенсируется силой пиннинга. Это означает, что мы будем находиться в рамках модели критического состояния и пренебрегать крипом магнитного потока и вязким течением вихрей. Уравнения электродинамики такой системы будем получать с помощью вариации энергии Гиббса по малым смещениям вихрей. В гиббсовскую энергию включим магнитную энергию системы и работу сил пиннинга.

Ниже будем предполагать, что сверхпроводник занимает полупространство $x > 0$. Допустим, что со временем t внешнее поле меняется как по модулю, так и по направлению, однако всегда остается параллельным поверхности сверхпроводника. В этом случае состояние вихревой системы может изменяться в силу ряда причин. Во-первых, входящие с поверхности вихри, наклоненные к вихрям в объеме сверхпроводника под некоторым углом, имеют возможность изменить свою ориентацию вследствие их магнитного взаимодействия. Однако простой анализ показывает, что такой процесс энергетически не выгоден. Действительно, выигрыш в магнитной энергии в результате ориентации вихря вдоль магнитного поля пропорционален его длине, тогда как работа сил пиннинга пропорциональна квадрату длины. Во-вторых, при своем движении непараллельные вихри могут пересекаться. В результате пересечения пары вихрей может реализоваться одна из двух возможностей: они могут пройти друг сквозь друга без изменения ориентации, либо происходит явление пересечения вихрей, при котором вместо исходных вихрей возникают два новых вихря, параллельных друг другу [13, 14]. Благодаря процессу пересечения вихри меняют свое направление, ориентируясь ближе к направлению магнитного поля, что дает выигрыш в энергии. В дальнейшем для удобства мы будем называть пересечением вихрей только те из них, которые сопровождаются исчезновением старых и возникновением новых вихрей. Вероятность такого пересечения для пары вихрей будем обозначать параметром p^* , который зависит от взаимной ориентации исходных вихрей и может также быть функцией вихревой плотности n . Величина p^* , в принципе, может быть рассчитана только на основе микроскопического подхода. Нашей задачей является построение модели критического состояния вихревой системы с учетом процессов пересечения вихрей.

Прежде всего определим необходимые макроскопические переменные. В рассматриваемой ситуации существует пространственное распределение вихрей с различными ориентациями. Исходя из простого анализа можно показать (см. Приложение А), что пересечение вихрей невозможно, если ограничиться введением лишь единственной непрерывной скорости $V(x, t)$, характеризующей движение всех вихрей в данной точке. Следует ввести, по крайней мере, еще одну дополнительную скорость $U(x, t)$ относительного движения вихрей. Введение двух скоростей означает, что мы предполагаем, что в данной точке x существуют вихри с различными скоростями (двухскоростное квазигидродинамическое приближение рассматривалось ранее в [14])

$$V_A = V + \frac{U}{2}, \quad V_B = V - \frac{U}{2}. \quad (4)$$

Фактически мы разделяем все вихри на две группы, A и B , и примем для простоты, что

концентрация вихрей в обеих группах одинакова, т. е. $n_A = n_B = (1/2)n(x, t)$. Очевидно, что вихри типов A и B , имеющие средние скорости V_A и V_B , должны отличаться и средними углами $\vartheta_A(x, t)$ и $\vartheta_B(x, t)$ наклона к некоторой оси z . Действительно, в данную точку x приходят вихри из некоторой ее окрестности шириной $2l$, не испытавшие ни одного акта пересечения с другими вихрями. Расстояние l можно оценить через постоянную вихревой решетки $a = 1/\sqrt{n}$ и безразмерный параметр p , который можно вычислить, усредняя по углам микроскопическую вероятность пересечения p^* . В результате получаем

$$l = 1/p\sqrt{n}. \quad (5)$$

Это расстояние будем называть длиной свободного пробега вихря. Будем в дальнейшем характеризовать систему средним углом $\vartheta(x, t) = (1/2)(\vartheta_A + \vartheta_B)$, а также разностью средних углов $\Delta\vartheta$ групп A и B . Эту разность можно оценить через градиент среднего угла $\vartheta(x, t)$:

$$\Delta\vartheta = \vartheta_A - \vartheta_B = -l \frac{\partial\vartheta}{\partial x}. \quad (6)$$

Вообще говоря, в окрестности любой точки x присутствуют вихри различных ориентаций с разбросом углов порядка $\Delta\vartheta$, и описание следовало бы проводить с помощью функции распределения $f(x, t, \vartheta)$. Однако в данной работе для простоты мы ограничим рассмотрение двумя группами вихрей со средними углами ϑ_A и ϑ_B .

3.2. Уравнения переноса плотности и угла

Существование средних скоростей поступательного V и относительного U движений приводит к переносу вихревой плотности n и среднего угла наклона вихрей ϑ . Ясно, что скорость V обуславливает изменение как $n(x)$, так и $\vartheta(x)$, тогда как относительная скорость влияет лишь на появление дополнительного потока угла. Плотность $n(x)$ удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{\partial(nV)}{\partial x}. \quad (7)$$

Гидродинамическую компоненту потока угла g_ϑ^{hydr} , определяемую скоростью V , можно записать в виде

$$g_\vartheta^{hydr} = nV\vartheta. \quad (8)$$

Другая компонента потока угла связана с относительным движением вихрей. Чтобы получить выражение для этого потока, удобно рассмотреть плоскость $x = x_0$, движущуюся со скоростью $V(x_0, t)$ относительно лабораторной системы координат. Вихри типа B , находящиеся справа от плоскости, и вихри типа A , находящиеся слева от нее, будут пересекать плоскость, перенося с собой некоторый угол. Легко понять, что число вихрей, пересекающих плоскость слева и справа, одинаково, поскольку поток плотности вихрей через эту поверхность отсутствует. Фактически это означает, что $(n/2) \cdot U/2$ вихрей типа A пересекут в единицу времени плоскость слева направо, и такое же число вихрей типа B пересекут эту плоскость в обратном направлении. (Множитель $1/2$ возник перед n из-за того, что плотность вихрей каждого типа равна $n/2$, а коэффициент

$1/2$ перед U связан с тем, что скорость этих вихрей относительно плоскости равна $U/2$.) Угол, переносимый через выбранную поверхность при замене вихря типа A вихрем типа B , равен $\Delta\vartheta$ (6). Таким образом, поток угла, связанный с относительным движением вихрей, определяется выражением

$$g_{\vartheta}^{rel} = -\frac{1}{2}n \cdot \frac{1}{2}Ul \frac{\partial\vartheta}{\partial x}. \quad (9)$$

Используя выражения для обоих потоков угла, (8) и (9), а также для разности углов $\Delta\vartheta = \vartheta_A - \vartheta_B$ (6), получаем следующее уравнение для переноса угла:

$$\frac{\partial(n\vartheta)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(nV\vartheta) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4}nUl \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right). \quad (10)$$

3.3. Энергия Гиббса и основные электродинамические уравнения

Целью этого раздела является получение уравнений электродинамики для жесткого сверхпроводника, в которых учтены взаимодействия вихрей друг с другом, с поверхностью образца, с центрами пиннинга, а также возможность пересечения вихрей между собой. Это можно сделать с помощью вариаций по скоростям, $\delta V(x, t)$ и $\delta U(x, t)$, энергии Гиббса G , в которую включена магнитная энергия, работа сил пиннинга при смещении вихревой решетки и работа сил пиннинга при выпрямлении вихря после его пересечения с другим вихрем. Отметим сразу же основное отличие, возникающее при вариации энергии Гиббса с учетом пересечения вихрей, от ситуации, когда этот эффект не рассматривается (см., например, [19–21]), т. е. когда магнитное поле не меняет своего направления. В последнем случае относительная скорость вихрей равна нулю, а значит, варьирование следует проводить лишь по одной независимой переменной V . Отметим, что вариации энергии Гиббса по скоростям V и U эквивалентны вариациям по гидродинамическому смещению, δu^{hydr} , вихревой решетки как целого и по относительному смещению, δu^{rel} , подрешеток A и B :

$$\delta u^{hydr} = \tau \delta V, \quad \delta u^{rel} = \tau \delta U, \quad (11)$$

где τ — произвольный промежуток времени, меньший характерного времени изменения полей в объеме образца.

Электромагнитную часть энергии Гиббса удобно получить в нелокальном случае, когда магнитная индукция и плотность вихрей связаны не простым линейным соотношением $B = n\Phi_0$ (Φ_0 — квант магнитного потока), а интегральным выражением (см. [19, 21])

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_m + \int dx' h_1(x, x') \mathbf{e}(x') n(x'). \quad (12)$$

Здесь ядро $h_1(x, x')$ и мейсснеровская компонента \mathbf{B}_m магнитной индукции определяются формулами

$$h_1 = \frac{\Phi_0}{2\lambda} \left(e^{-|x-x'|/\lambda} - e^{-(x+x')/\lambda} \right), \quad (13)$$

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{H}_0 e^{-x/\lambda}, \quad (14)$$

где λ — лондоновская глубина проникновения, \mathbf{H}_0 — внешнее магнитное поле, вектор $\mathbf{e}(x) = (\mathbf{e}_A + \mathbf{e}_B)/2$ задает среднее направление вихрей в данной точке пространства, а единичные векторы \mathbf{e}_A и \mathbf{e}_B определяют направления вихрей типа A и B . Действуя аналогично работе [20] и учитывая соотношение (12), получаем из хорошо известного выражения для энергии Гиббса вихревой системы в лондоновском приближении (см., например, [21]) следующий результат:

$$G_{em} = \frac{1}{8\pi} \int dx dx' \left[\Phi_0 h_1(x, x') \mathbf{e}(x) \mathbf{e}(x') n(x) n(x') - 2\mathbf{H}_0 \mathbf{e}(x') n(x') h_1(x, x') \right]. \quad (15)$$

Вариацию энергии Гиббса по малым смещениям вихрей можно представить в виде суммы двух членов, δG_{em}^{hydr} и δG_{em}^{rel} , каждый из которых зависит от одной независимой переменной, соответственно δu^{hydr} и δu^{rel} . Используя соотношение (15), можно получить следующие выражения для вариаций обоих слагаемых (см., Приложение В):

$$\delta G_{em}^{hydr} = \frac{\Phi_0}{4\pi} \int dx n \delta u^{hydr} \mathbf{e}(x) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}, \quad (16)$$

$$\delta G_{em}^{rel} = \frac{\Phi_0}{4\pi} \int dx \frac{1}{4} n l \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \delta u^{rel} \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{e}(x), \mathbf{B}(x) - \mathbf{H}_0], \quad (17)$$

где \mathbf{e}_x — единичный вектор вдоль оси x .

Теперь рассмотрим вклад в энергию Гиббса, связанный с работой сил пиннинга над вихревой системой. Эту работу за время τ , отнесенную к одной паре вихрей, можно представить в виде

$$A = -f_p |V_A| \tau - f_p |V_B| \tau, \quad (18)$$

где f_p — абсолютное значение максимальной силы пиннинга, V_A и V_B — скорости подрешеток A и B (4). Из формул (4), (11) и (18) следует, что соответствующая вариация

$$\delta A = -f_p \left(\delta u^{hydr} - \frac{\delta u^{rel}}{2} \right) \text{sign} \left(V - \frac{U}{2} \right) - f_p \left(\delta u^{hydr} + \frac{\delta u^{rel}}{2} \right) \text{sign} \left(V + \frac{U}{2} \right) \quad (19)$$

существенно зависит от того, какое из двух движений (поступательное движение решетки как целого или относительное смещение подрешеток) преобладает. Видно, что могут реализоваться два принципиально разных случая. Если $|V| > |U|/2$, то как вихри типа A , так и вихри типа B двигаются в одну и ту же сторону в лабораторной системе. При этом потери энергии (19) определяются гидродинамическим смещением:

$$\delta A = -2f_p \text{sign}(V) \delta u^{hydr}. \quad (20)$$

В противоположном случае $|V| < |U|/2$ из (19) получаем

$$\delta A = -f_p \text{sign}(U) \delta u^{rel}. \quad (21)$$

Принципиальное различие этих двух случаев состоит в том, что работа сил пиннинга над вихревой системой, а значит, и соответствующий вклад в энергию Гиббса, зависят от различных независимых переменных: в первом случае — от среднего смещения решетки, во втором — от относительного смещения вихрей подрешеток.

Используя два последних выражения, легко показать, что вариация энергии Гиббса, связанная с пиннингом, определяется формулой

$$\delta G_p = \frac{1}{2} \int dx n(x) f_p \left[2\delta u^{hydr} \text{sign}(V)\theta \left(|V| - \frac{|U|}{2} \right) + \delta u^{rel} \text{sign}(U)\theta \left(\frac{|U|}{2} - |V| \right) \right], \quad (22)$$

где $\theta(x)$ — тэта-функция Хевисайда.

Наконец, рассмотрим вклад в энергию Гиббса, связанный с работой сил пиннинга при выпрямлении вихрей после их взаимного пересечения. В результате пересечения подрешеток вихрей типа A и типа B возникают новые вихри, которые состоят из набора вихревых отрезков, часть которых ориентирована по направлению вихря типа A , а часть — по направлению вихря типа B . Затем происходит выпрямление таких новых вихрей: отрезки, имеющие среднюю длину L и ориентированные по направлениям вихрей типов A и B , должны повернуться навстречу друг другу на угол $\Delta\vartheta/2$. При этом пиннинг препятствует такому повороту, и потери энергии на единицу длины вихря определяются выражением

$$\delta A = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} f_p L^2 \frac{|\Delta\vartheta|}{2} \right] = \frac{1}{4} f_p L l \left| \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \right|. \quad (23)$$

Длина L легко выражается через постоянную вихревой решетки a и угол между вихрями $|\Delta\vartheta|$. Учитывая равенства (6) и (5), находим

$$L = \frac{a}{|\Delta\vartheta|} = \frac{1}{\sqrt{n} |\partial\vartheta/\partial x| l} = \frac{p}{|\partial\vartheta/\partial x|}. \quad (24)$$

Чтобы получить выражение для вклада в энергию Гиббса, связанного с выпрямлением вихревых нитей, необходимо найти число пересекающихся вихрей вследствие относительного смещения δu^{rel} подрешеток A и B за единицу времени. Простая оценка дает

$$\delta N_{cut} = n \text{sign}(U) \delta u^{rel} dx/l. \quad (25)$$

Используя (23), (24) и (25), находим искомую вариацию энергии Гиббса

$$\delta G_{cut} = \frac{1}{4} \int dx n p f_p \text{sign}(U) \delta u^{rel}. \quad (26)$$

Итак, выражения (16), (17), (22) и (26) определяют вариацию энергии Гиббса по среднему и относительному смещениям вихрей. Приравнявая нулю коэффициенты при δu^{hydr} и δu^{rel} , получаем искомые электродинамические уравнения:

$$\mathbf{e}(x) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = -\frac{4\pi}{c} J_c \text{sign}(V)\theta \left(|V| - \frac{|U|}{2} \right), \quad (27)$$

$$\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{e}(x), \mathbf{B}(x) - \mathbf{H}_0] = -\frac{4\pi}{c} J_c \frac{p^2 \sqrt{n}}{\partial\vartheta/\partial x} \text{sign}(U) \left[1 + \frac{2}{p} \theta \left(\frac{|U|}{2} - |V| \right) \right], \quad (28)$$

где $J_c = c f_p / \Phi_0$.

В интересующем нас локальном пределе $\lambda \rightarrow 0$ направление вектора e совпадает с направлением магнитной индукции и система уравнений упрощается. Она принимает различный вид в зависимости от соотношения между скоростями гидродинамического и относительного движений. Так, для случая $|V| > |U|/2$ имеем

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \pm \frac{4\pi}{c} J_c,$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \pm \sqrt{\frac{4\pi}{c} J_c \frac{p^2 \sqrt{n}}{H_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0)}}, \quad (29)$$

а при $|V| < |U|/2$ получаем

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \pm \sqrt{\frac{4\pi}{c} J_c \frac{p^2 \sqrt{n}}{H_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0)} \left(1 + \frac{2}{p}\right)}, \quad (30)$$

где ϑ_0 — угол наклона внешнего магнитного поля H_0 к оси z . Наконец, в вырожденном случае $|V| = |U|/2$ в задаче сокращается количество переменных. В результате, выполняя преобразования, подобные проделанным выше, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial B}{\partial x} (\pm) \frac{H_0}{2p\sqrt{n}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial \sin(\vartheta - \vartheta_0)}{\partial x} = \pm \frac{4\pi}{c} J_c [1(\pm)p]. \quad (31)$$

Как показывает анализ, знаки \pm во всех полученных уравнениях можно выбирать независимо друг от друга, тогда как знаки, помещенные в круглые скобки, выбираются согласованно. Заметим, что мы предпочли оставить в полученных электродинамических уравнениях параметр p , а не связанный с ним параметр l . Безразмерный параметр p более удобен, поскольку он теснее связан с реальной микроскопической вероятностью процесса пересечения вихревой пары.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Электродинамические уравнения, полученные в рамках простой двухжидкостной модели, позволяют анализировать поведение жестких сверхпроводников в скрещенных магнитных полях. В самом деле, уравнения (29) и (30), дополненные уравнениями переноса (7), (10) и условиями непрерывности скоростей V и U , а также магнитной индукции B образуют полную систему для переменных $B = n\Phi_0$, ϑ , V , U . Обратим внимание на то, что первые уравнения в (29) и (30), описывающие распределение модуля магнитной индукции, не содержат параметра p , т. е. не чувствительны к выбору модели процесса пересечения вихрей. В зависимости от значений скоростей V и U система уравнений для B и ϑ принимает одну из нескольких возможных форм (с учетом разных возможностей выбора знаков \pm в (29), (30) и (31)). В этом отношении ситуация аналогична традиционной однокомпонентной модели критического состояния, где в динамическом режиме знак плотности тока также связан с направлением движения

вихрей. Как и в обычной модели критического состояния, выбор тех или иных электродинамических уравнений из (29), (30) и (31) определяется магнитной предысторией системы. В принципе, стартуя от произвольного начального состояния, можно с помощью полученных уравнений поэтапно проследить эволюцию вихревой системы.

Обратим внимание на то, что система уравнений в форме (29) полностью эквивалентна модели, часто используемой для описания электродинамики жестких сверхпроводников в скрещенных магнитных полях (см., например, [15, 16]). В самом деле, второе уравнение в (29) легко может быть преобразовано к виду $\partial\vartheta/\partial x = \pm k_c$. Наше рассмотрение показывает, что, вообще говоря, коэффициент k_c зависит не только от B , но и от угла ϑ .

Применим полученные уравнения для объяснения результатов нашего эксперимента. Прямые вычисления магнитной индукции в рамках первой системы уравнений (29), справедливой при условии $|U| < 2|V|$, показывают, что ни при каких амплитудах переменного поля распределение постоянной компоненты магнитной индукции не становится однородным и, следовательно, подавление магнитного момента образца не происходит.

Поэтому попытаемся интерпретировать результаты эксперимента с помощью второй пары уравнений (30). Согласно первому из этих уравнений, модуль индукции $B(x, t)$ оказывается не зависящим от координаты x . Поскольку в эксперименте было выполнено условие малости амплитуды h_0 по сравнению с характерными значениями постоянного магнитного поля H , однородность B эквивалентна однородности z -компоненты магнитной индукции во всем объеме, куда проникает переменное поле. Увеличение амплитуды h_0 приводит к возрастанию глубины его проникновения и к подавлению статического магнитного момента образца, что соответствует результатам измерений. Однако теперь необходимо проверить, соответствует ли найденное решение полной системе наших уравнений. Иными словами, надо убедиться в выполнении необходимого условия $|U| > 2|V|$ применимости уравнений (30). В частности, такое условие заведомо выполняется, если во всей области проникновения переменного магнитного поля $V = 0$. Чтобы показать это, воспользуемся уравнениями переноса (7) и (10). Учитывая полученное решение $B = \text{const}$ и малость переменного поля по сравнению с постоянным, из (7) находим, что скорость гидродинамического движения V также не зависит от координат. Скорость $V(x, t)$ является непрерывной функцией. Поскольку $V(x, t)$ равна нулю в области образца, где изменение магнитного поля отсутствует (т. е. там, где вихревая система заморожена), она равна нулю всюду в образце. В то же время из второго уравнения в (30) и уравнения переноса угла (10) получаем, что относительная скорость $U \neq 0$. Итак, необходимое условие применимости системы уравнений (30) выполняется.

Таким образом, уравнения (30) позволяют качественно интерпретировать результаты наших измерений. По-видимому, аналогичным образом могут быть объяснены результаты эксперимента [22], в котором подавление статического момента осуществлялось однократной разверткой поперечного магнитного поля.

Анализ системы уравнений (30) совместно с законом Фарадея показывает, что в случае $h_0 \ll H$ направление переменных экранирующих токов совпадает с направлением индуцированного электрического поля. В результате система (30) переходит в (2). Поэтому уравнение (2) позволило качественно объяснить наблюдаемый эффект [12]. По той же причине это уравнение дает правильные результаты во многих других случаях (см., например, [8, 9, 11]). В общей ситуации при решении конкретной задачи требу-

ется специальный анализ, чтобы убедиться, справедлива ли модель (2) или же необходимо использовать модель работ [15, 16]. Кроме того, вполне может реализоваться случай, когда в одних пространственных областях сверхпроводника справедлива система уравнений (30), а в других — (29). Иными словами, для теоретического описания электродинамики жестких сверхпроводников в скрещенных магнитных полях требуется тщательный анализ полной системы уравнений, полученных в настоящей работе.

Эта работа выполнена в рамках национальных программ по высокотемпературной сверхпроводимости (проекты «Коллапс» (Россия и Украина)) и частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 96-02-17730) и мексиканским комитетом по науке и технологиям (CONACyT), грант 3004E9306.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Докажем, что пересечение вихрей невозможно описать с помощью введения лишь одной непрерывной функции — скорости $V(x, t)$ движения вихревых нитей. Действительно, уравнение движения произвольного вихря имеет вид

$$dx_1/dt = V(x_1, t). \quad (\text{A.1})$$

Для близко расположенного к нему другого вихря имеем

$$\frac{dx_2}{dt} = V(x_1 + (x_2 - x_1), t) \approx V(x_1, t) + (x_2 - x_1) \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=x_1}. \quad (\text{A.2})$$

Расстояние между этими вихрями описывается уравнением

$$\frac{d(x_2 - x_1)}{dt} = (x_2 - x_1) \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=x_1}. \quad (\text{A.3})$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)|_{t=0} \exp \left(\int_0^t dt \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=x_1} \right) \neq 0. \quad (\text{A.4})$$

Из последнего уравнения видно, что расстояние между вихрями может лишь асимптотически стремиться к нулю и пересечение вихрей невозможно.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Получим выражения для вариации электромагнитной части энергии Гиббса по среднему и относительному смещениям вихрей. Для этого представим G_{em} (15) в виде

$$G_{em} = \frac{1}{8\pi} \int dx dx' \left\{ h_1(x, x') \Phi_0 n(x) n(x') \cos [\vartheta(x) - \vartheta(x')] - 2H_0 n(x') h_1(x, x') \cos [\vartheta(x') - \vartheta_0] \right\}. \quad (\text{B.1})$$

Из уравнений переноса (7) и (10) следует, что малые смещения вихрей приводят к следующим вариациям вихревой плотности и угла:

$$\delta n = -\frac{\partial}{\partial x}(n\delta u^{hydr}), \quad (\text{B.2})$$

$$\delta\vartheta = -\delta u^{hydr}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4}n\delta u^{rel}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right). \quad (\text{B.3})$$

Варьируя G_{em} по плотности вихрей и их углу наклона к оси z и пользуясь условием симметрии функции $h_1(x, x') = h_1(x', x)$ (13), получаем

$$\begin{aligned} \delta G_{em} = & \frac{\Phi_0}{4\pi} \int dx dx' \times \\ & \times \left\{ \delta n(x) \left[h_1(x, x')n(x')\cos(\vartheta(x) - \vartheta(x')) - \frac{H_0}{\Phi_0}h_1(x, x')\cos(\vartheta(x) - \vartheta_0) \right] - \right. \\ & \left. - \delta\vartheta(x) \left[h_1(x, x')n(x)n(x')\sin(\vartheta(x) - \vartheta(x')) - \frac{H_0}{\Phi_0}n(x')h_1(x, x')\sin(\vartheta(x') - \vartheta_0) \right] \right\}. \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

Подставляя в это выражение соотношения (B.2) и (B.3) и проводя в слагаемом с $\delta n(x)$ интегрирование по частям с учетом симметрии $h_1(x, x')$, а затем заменяя $\cos[\vartheta(x) - \vartheta(x')]$ и $\cos[\vartheta(x') - \vartheta_0]$ соответствующими скалярными произведениями, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \delta G_{em} = & \frac{\Phi_0}{4\pi} \int dx dx' n(x) \left\{ \delta u^{hydr} \mathbf{e}(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[h_1(x, x')n(x')\mathbf{e}(x') - \frac{H_0}{\Phi_0}h_1(x, x') \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4}\delta u^{rel} \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left[h_1(x, x')n(x')\sin(\vartheta(x) - \vartheta(x')) - \frac{H_0}{\Phi_0}h_1(x, x')\sin(\vartheta(x) - \vartheta_0) \right] \right\}. \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

Представляя синусы в виде векторных произведений и пользуясь легко проверяемым соотношением

$$H_0 \int dx' h_1(x, x') = \Phi_0 [H_0 - B_m(x)], \quad (\text{B.6})$$

получаем выражения (16) и (17).

Литература

1. C. P. Bean, Phys. Rev. Lett. **8**, 250 (1962).
2. C. P. Bean, Rev. Mod. Phys. **36**, 31 (1964).
3. A. M. Campbell, J. Phys. C **2**, 1492 (1969); **4**, 3186 (1971).
4. И. Ф. Волошин, Н. М. Макаров, В. А. Ямпольский, Л. М. Фишер, Письма в ЖЭТФ **53**, 109 (1991).
5. L. M. Fisher, V. S. Gorbachev, I. F. Voloshin et al., Phys. Rev. B **46**, 10986 (1992).
6. A. M. Campbell and Evetts, *Critical Current in Superconductors*, Taylor and Frances Ltd., London (1972).
7. J. R. Clem, J. Appl. Phys. **50**, 3518 (1979).
8. I. V. Baltaga, L. M. Fisher, N. M. Makarov et al., Phys. Lett. A **148**, 213 (1990).
9. L. M. Fisher, N. V. Il'in, I. F. Voloshin et al., Physica C **197**, 161 (1992).
10. I. V. Baltaga, K. V. Il'enko, N. M. Makarov et al., Sol. St. Comm. **93**, 697 (1995).

11. И. В. Балтага, Л. М. Фишер, Н. М. Макаров и др., *ФНТ* **21**, 411 (1995).
12. L. M. Fisher, A. V. Kalinov, I. F. Voloshin et al., *Sol. St. Comm.* **97**, 833 (1996).
13. E. H. Brandt, J. R. Clem, and D. G. Walmsley, *J. Low Temp. Phys.* **37**, 43 (1979).
14. E. H. Brandt, *J. Low Temp. Phys.* **39**, 41 (1980).
15. J. R. Clem, *Phys. Rev. B* **26**, 2463 (1982).
16. J. R. Clem and A. Perez-Gonzalez, *Phys. Rev. B* **30**, 5041 (1984).
17. R. Boyer, G. Fillion, and M. A. R. LeBlanc, *J. Appl. Phys.* **51**, 1692 (1980).
18. R. Cave and M. A. R. LeBlanc, *J. Appl. Phys.* **53**, 1631 (1982).
19. И. Ф. Волошин, В. С. Горбачев, С. Е. Савельев и др., *Письма в ЖЭТФ* **59**, 55 (1994).
20. L. M. Fisher, I. F. Voloshin, V. S. Gorbachev et al., *Physica C* **245**, 231 (1995).
21. В. С. Горбачев, С. Е. Савельев, *ЖЭТФ* **109**, 1247 (1995).
22. S. K. Hasanain, Sadia Manzoor, and A. Amirabadizadeh, *Supercond. Sci. Technol.* **8**, 519 (1995).