

## РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФFUЗИИ

Н. А. Силантьев

Главная астрономическая обсерватория Российской академии наук  
196140, Санкт-Петербург, Россия  
Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Puebla, Mexico

Поступила в редакцию 18 сентября 1996 г.

Рассмотрены различные методы вычисления коэффициентов турбулентной диффузии  $D_T$  пассивной скалярной примеси в бесконечной однородной изотропной и стационарной турбулентной среде. Сравнение вычисленных по этим методам значений  $D_T$  проведено для двух предельных типов турбулентности — с  $\delta$ -образным спектром и спектром колмогоровского типа. Временная зависимость корреляторов скорости принята экспоненциальной. Показано, что наиболее точным методом является использование решения нелинейного уравнения для усредненной функции Грина с учетом вклада от четырехточечных корреляторов турбулентной скорости. Сравнение результатов других более простых в математическом отношении методов показало, что некоторые из них также позволяют вычислить  $D_T$  со сравнительно хорошей точностью.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Описание переноса пассивной скалярной примеси (концентрации частиц, температуры) в турбулентных средах является одной из основных проблем теории турбулентности. Ввиду сложности точного решения задачи обычно ограничиваются использованием диффузионного приближения, пригодного при крупномасштабном пространственно-временном усреднении поля примеси (см. подробнее в [1, 2]). В диффузионном приближении основной проблемой является вычисление коэффициента турбулентной диффузии  $D_T$ . Эта величина определяет в диффузионном приближении средний поток примеси ( $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -D_T \nabla \langle n \rangle$ ) в фиксированной точке  $\mathbf{r}$  среды в момент времени  $t$ . Вычисление  $D_T$ , как будет показано ниже, связано с использованием обычной одночастичной функции Грина  $G(1, 2)$  точного уравнения переноса для поля примеси.

Заметим, что в теории турбулентности также рассматривается несколько отличная задача «относительной диффузии», когда интересуются вероятностью  $p(R, t)$  расхождения двух первоначально близких жидких частиц на расстояние  $R$  за время  $t$ . Функция  $p(R, t)$  приближенно удовлетворяет уравнению диффузии с коэффициентом диффузии  $K(R, t)$ . Классические работы Ричардсона [3] и Бэтчелора [4, 5], в основном, посвящены решению этой задачи (см. также [6, 7]). Точное определение  $K(R, t)$  требует знания двухчастичной функции Грина  $G(1, 2; 3, 4)$ . Подчеркнем, что коэффициент обычной диффузии  $D_T$  не совпадает с  $K(R, t)$ .

Задача вычисления  $D_T$  непосредственно связана также со старыми проблемами теории турбулентности — проблемой замыкания иерархии уравнений для корреляторов скорости и задачей вычисления турбулентной вязкости. Для решения этих проблем бы-

ли развиты различные методы [8, 9]. Эти методы существенно различны для описания турбулентного переноса в ограниченных средах и для случая свободной турбулентности в бесконечной среде. В данной работе мы рассматриваем только последний случай, хотя, несомненно, предложенные методы могут быть обобщены и для турбулентных течений в ограниченных средах.

Таким образом, постановка задачи следующая: имеется несжимаемая бесконечная турбулентная среда, характеризуемая ансамблем заданных скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Турбулентность считается однородной, изотропной и стационарной, средняя скорость  $\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$  и  $\text{div} \mathbf{u} = 0$ . Угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций турбулентных скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Вследствие однородности и стационарности все усредненные величины зависят от разностей координат  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  и времен  $\tau = t_1 - t_2$ . Для определенности будем говорить о диффузии примесных частиц с концентрацией  $n(\mathbf{r}, t)$ . Коэффициент молекулярной диффузии  $D_m$  обычно много меньше величины  $D_T$  и в окончательных формулах мы будем полагать  $D_m = 0$ .

Численные значения коэффициента турбулентной диффузии  $D_T$  весьма существенно определяются явным видом парного коррелятора скоростей

$$B_{nm}(\mathbf{R}, \tau) = \langle u_n(\mathbf{r}_1, t_1) u_m(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \quad (1)$$

характеризуемым также обобщенным спектром  $E(p, \tau)$ :

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle = \int_0^\infty dp E(p, \tau). \quad (2)$$

Это вызвано тем, что в перенос примеси наиболее существенный вклад дают крупномасштабные турбулентные пульсации, которые хорошо описываются двухточечным коррелятором (1). Описание мелкомасштабных пульсаций требует, очевидно, знания четырехточечных и выше корреляторов скорости. Обобщенный спектр  $E(p, \tau)$  характеризуется временем жизни  $\tau_0$ , волновым числом  $p_0 = 1/R_0$  и скоростью  $u_0$  турбулентных движений. Коэффициент турбулентной диффузии  $D_T$  существенно зависит от этих параметров. Удобно представить  $D_T$  в безразмерном виде

$$D_T = \frac{u_0}{p_0} \bar{D}_T \left( \frac{t}{\tau_0}, \xi_0, \dots \right). \quad (3)$$

Здесь  $\xi_0 = u_0 \tau_0 p_0$  — безразмерный параметр, наиболее существенный для определения  $D_T$ . Имеют место следующие оценки [1]:  $D_T \simeq u_0^2 \tau_0 / 3 \equiv (u_0 / p_0) \xi_0 / 3$  для  $\xi_0 \ll 1$  и  $D_T \simeq u_0 / p_0$  для замороженной турбулентности с  $\xi_0 \gg 1$ . Таким образом, безразмерный коэффициент турбулентной диффузии  $\bar{D}_T$  как функция  $\xi_0$  сначала растет линейно как  $\xi_0 / 3$ , а затем монотонно стремится к некоторому предельному значению  $\bar{D}_T(\infty)$ . Монотонность роста обусловлена тем, что увеличение параметра  $\xi_0$  соответствует большему времени жизни турбулентных пульсаций.

Эти предельные оценки имеют только качественный характер. Для турбулентных течений, обладающих широким спектром энергии и сложной зависимостью от времени  $\tau$ , даже сам выбор параметров  $p_0$  и  $\tau_0$  неоднозначен. Только для пикообразных спектров  $E(p, \tau)$  этот выбор более или менее однозначен. Коэффициент диффузии  $D_T$  зависит от конкретного вида  $E(p, \tau)$  в целом и необходимо иметь независимые от формального выбора параметров  $p_0$  и  $\tau_0$  методы его вычисления.

В данной работе мы, в основном, будем изучать стационарные значения  $D_T$ , соответствующие временам  $t \gg \tau_0$  (или  $t \gg t_0 = R_0/u_0$  для замороженной турбулентности).

В лагранжевом представлении поля скоростей  $\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$  точное выражение для коэффициента турбулентной диффузии имеет вид [10]

$$D_T(t) = \frac{1}{3} \int_0^t d\tau \langle \mathbf{v}(\mathbf{a}, t) \mathbf{v}(\mathbf{a}, \tau) \rangle, \quad (4)$$

где  $\mathbf{a}$  — начальное положение частицы жидкости или газа. Эта простая формула может быть использована только в тех случаях, когда известен ансамбль траекторий жидких частиц (в результате измерений или численного эксперимента). Как известно, в основном используется эйлерово представление скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , и формула (4) практически бесполезна для вычисления  $D_T$ , так как переход от эйлеровых скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  к лагранжевым  $\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$  является трудной, до сих пор не решенной задачей.

В эйлеровом представлении точное выражение для  $D_T$  содержит усреднение компонент скорости  $u_n(\mathbf{r}, t)$  с функцией Грина  $G(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) \equiv G(1, 2)$  [1, 2]:

$$D_T(t) = \frac{1}{3} \int d\mathbf{R} \int_0^t d\tau \langle u_n(1) G(1, 2) u_n(2) \rangle. \quad (5)$$

Здесь и далее используем удобные обозначения:  $dn \equiv d\mathbf{r}_n dt_n$ ,  $f(n) \equiv f(\mathbf{r}_n, t_n)$ ,  $f(1-2) \equiv f(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2)$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,  $\tau = t_1 - t_2$ , а также обычное соглашение о суммировании по повторяющимся векторным и тензорным индексам. Функция Грина  $G(1, 2)$  является случайной функцией, зависящей от поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Как обычно, все величины мы представляем в виде суммы среднего значения и флуктуационной части:

$$n(\mathbf{r}, t) = \langle n \rangle + n'(\mathbf{r}, t), \quad G(1, 2) = \langle G \rangle + G'(1, 2).$$

Эволюция примесной концентрации  $n(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет уравнению (напомним, что  $\text{div} \mathbf{u} = 0$ ):

$$(\partial/\partial t - D_m \nabla^2) n(\mathbf{r}, t) = -(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \nabla) n(\mathbf{r}, t). \quad (6)$$

Функция Грина  $G(1, 2)$  является решением этого уравнения с  $\delta$ -образным источником ( $Q(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{R})\delta(\tau)$ ). Используя функцию Грина  $G_m(\mathbf{R}, \tau)$  этого уравнения без члена, содержащего скорость  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , получаем интегральное уравнение для  $G(1, 2)$ :

$$G(1, 2) = G_m(1-2) + \int d\mathbf{3} G(1-3) (-\mathbf{u}(\mathbf{3}) \nabla^{(3)}) G(3, 2), \quad (7)$$

$$G_m(\mathbf{R}, \tau) \equiv G_m(1-2) = H(\tau) (4\pi D_m \tau)^{-3/2} \exp(-R^2/4D_m \tau), \quad (8)$$

где  $H(\tau) = 1$  для  $\tau > 0$  и  $H(\tau) = 0$  для  $\tau < 0$ . Для турбулентных течений в ограниченных средах функции Грина  $G_m$  и  $G(1, 2)$  удовлетворяют тем или иным граничным условиям, но общая формула (5) пригодна и в этих случаях. Формальное решение уравнения (6) в терминах лагранжевой скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$  дает выражение

$$G(1, 2) = \delta \left( \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \int_{t_2}^{t_1} d\tau \mathbf{v}(\mathbf{a}, t) \right),$$

подстановка которого вместе с соотношениями

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{a} + \int_0^{t_1} d\tau \mathbf{v}(\mathbf{a}, \tau)$$

и  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$  в основное выражение (5) сразу же приводит к (4).

Таким образом, различные методы вычисления  $D_T$  в эйлеровом представлении сводятся к тому или иному выбору (или методу вычислений) функции Грина  $G(1, 2)$ . Явный вид стохастической функции Грина  $G(1, 2)$  как функционала от случайной скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  неизвестен. Поэтому необходимо искать пути представления  $G(1, 2)$  в виде ряда приближений, подстановка которого в (5) приводит к соответствующему ряду приближений для  $D_T$ . Основным здесь является вопрос о быстрой (хотя бы и асимптотической для широких спектров) сходимости этого ряда для различных значений параметра  $\xi_0 = u_0 \tau_0 p_0$ .

## 2. ПЕРЕНОРМИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

Самое простое представление функции Грина  $G(1, 2)$  в виде ряда заключается в итерировании основного уравнения (7). Подстановка этого ряда итераций в (5) приводит к ряду приближений для  $D_T$  вида:

$$D_T = \frac{u_0^2 \tau_0}{3} (a + b \xi_0^2 + c \xi_0^4 + \dots). \tag{9}$$

Здесь член с  $\xi_0^2$  определяется четырехточечным коррелятором скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , член с  $\xi_0^4$  — корреляторами 6 порядка и т. д. Из (9) видно, что таким способом можно вычислить  $D_T$  только для  $\xi_0^2 \ll 1$ . Для турбулентности с широким спектром, типа колмогоровского  $\propto p^{-5/3}$ , существует только первый член разложения, члены с  $b, c, \dots$  расходятся. Плохая сходимость ряда (9) объясняется тем, что разложение в ряд велось по степеням молекулярной функции Грина  $G_m$ , которая не описывает конвективный характер переноса примеси турбулентностью.

Очевидно, что необходимо получить уравнение для  $G(1, 2)$  в новой, перенормированной форме. Необходимо, чтобы в этом новом уравнении уже в свободном члене учитывался бы конвективный механизм переноса примеси. Возможность написания такого уравнения неоднозначна и основывается на соотношениях [1]

$$G(1, 2) = M(1 - 2) + \int d^3 M(1 - 3) \left[ (-\mathbf{u}(3) \nabla^{(3)}) G(3, 2) - \int d^4 \hat{K}(3 - 4) G(4, 2) \right], \tag{10}$$

$$M(1 - 2) = G_m(1 - 2) + \int d^3 \int d^4 G_m(1 - 3) \hat{K}(3 - 4) M(4 - 2). \tag{11}$$

Легко проверить, что подстановка (11) в (10) приводит к исходному уравнению (7). По-видимому, наиболее удовлетворительным выбором ядра  $\hat{K}$  является такой, при котором вспомогательная функция  $M(R, \tau)$  совпадала бы с усредненной функцией Грина  $\langle G(1, 2) \rangle$ . Действительно, свободный член  $M(1 - 2) = \langle G(1, 2) \rangle$ , по определению, описывает конвективный перенос примесных частиц в турбулентной среде. Таким образом,

уравнение (11) для  $M(R, \tau)$  должно быть замкнутым уравнением для усредненной функции Грина  $\langle G(1, 2) \rangle$ . Стохастические уравнения (6) и (7) являются линейными уравнениями. Легко, однако, видеть, что, усредняя эти уравнения, мы не получаем отдельных уравнений для  $\langle n(r, t) \rangle$  или  $\langle G(1, 2) \rangle$  — всегда будут члены типа  $\langle u(1) \nabla n'(1) \rangle$  или  $\langle u(1) \nabla G'(1, 2) \rangle$ . Ситуация аналогична той, которая возникает при выводе уравнений Рейнольдса для средней скорости — средние значения зависят от вклада флуктуаций, а те, в свою очередь, определяются распределением усредненных величин. Стремление написать отдельное уравнение для  $\langle G(1, 2) \rangle$  приводит к иерархии нелинейных по  $\langle G(1, 2) \rangle$  уравнений. Подробно процедура вывода этой иерархии дана в [1]. Таким образом, ядро  $\hat{K}$  в (11) зависит от  $\langle G \rangle$  и может быть представлено в виде бесконечного ряда членов со все возрастающими степенями  $\langle G \rangle$ . Первый член этого ряда имеет вид

$$\hat{K}^{(1)}(1-2) = \langle (-u(1) \nabla^{(1)}) \langle G(1, 2) \rangle (-u(2) \nabla^{(2)}) \rangle. \quad (12)$$

Подстановка этого ядра в (11) приводит к простейшему нелинейному уравнению из иерархии уравнений для  $\langle G(1, 2) \rangle \equiv g(1-2)$ :

$$g(1-2) = G_m(1-2) + \int d^3 \int d^4 G_m(1-3) \langle u(3) \nabla^{(3)} g(3-4) u(4) \nabla^{(4)} \rangle g(4-2). \quad (13)$$

Это знаменитое нелинейное уравнение, предложенное Крайчнаном [11] и Робертсом [12] для описания турбулентного переноса (Direct Interaction equation, DIA-equation). Впоследствии Крайчнан [13, 14], сравнивая результаты численного моделирования переноса примесных частиц с решением этого уравнения, показал, что они хорошо согласуются друг с другом.

Таким образом, уже первое из уравнений иерархии хорошо описывает конвективный перенос частиц и может быть использовано в качестве свободного члена в перенормированном уравнении (10). Подстановка итераций уравнения (10) в (5) приводит тогда к ряду типа

$$D_T = \frac{w_0^2 \tau_0}{3} \left[ \frac{a}{1 + d\xi_0} + \frac{b\xi_0^2}{(1 + e\xi_0)^3} + \dots \right]. \quad (14)$$

Этот ряд имеет хорошую асимптотическую сходимость для всех значений параметра  $0 \leq \xi_0 < \infty$ . Ряд (14) можно рассматривать как аналог метода Куммера [15] улучшения сходимости первоначального ряда (9). Первый член в (14) получается при подстановке в (5) свободного члена  $M \equiv g$  перенормированного уравнения (10). Этот член полностью учитывает вклад в  $D_T$  всех видов и степеней двухточечных корреляторов (1). Второй член в (14) описывает вклад оставшихся корреляторов четвертого порядка и т.д. Конечно, формально выбор ядра  $\hat{K}$  в (11) произволен, но, по-видимому, физически обусловленный выбор его в виде (12) является достаточно удачным. С физической точки зрения ясно, что вклады в  $D_T$  от корреляторов скорости более высокого порядка, описывающие детали турбулентных пульсаций, должны быть гораздо менее значимы, чем вклады двух- и четырехточечных корреляторов.

Приведем явный вид первых двух членов ряда  $D_T = D_T^{(0)} + D_T^{(1)} + \dots$ , получающийся в результате подстановки в (5) свободного члена  $M = g$  и первой итерации уравнения (10) (мы рассматриваем здесь только стационарные значения  $D_T$  при  $t \rightarrow \infty$ ):

$$D_T^{(0)} = \frac{1}{3} \int_0^\infty dp \int_0^\infty d\tau E(p, \tau) \bar{g}(p, \tau), \quad (15)$$

$$D_T^{(1)} = \frac{1}{24} \int_0^\infty dp p \int_0^\infty dq q \int_{-1}^1 d\mu \mu (1 - \mu^2) \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_3 \times \\ \times E(p, \tau_1 + \tau_2) E(q, \tau_2 + \tau_3) \bar{g}(p, \tau_1) \bar{g}(q, \tau_3) \bar{g}(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|, \tau_2). \quad (16)$$

Здесь  $\mathbf{p}q = pq\mu$ ,  $\bar{g}(p, \tau)$  является фурье-образом  $g(R, \tau)$  по переменной  $\mathbf{R}$ :

$$\bar{g}(p, \tau) = \int d\mathbf{R} \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{R}) g(R, \tau). \quad (17)$$

При вычислении (16) корреляторы скорости четвертого порядка считались гауссовскими, т. е. принимались равными сумме всевозможных произведений корреляторов второго порядка.

Мы приводим здесь результаты расчетов  $D_T^{(0)}$  и  $D_T^{(1)}$  для двух предельных видов спектров —  $\delta$ -образного и очень широкого (колмогоровского типа):

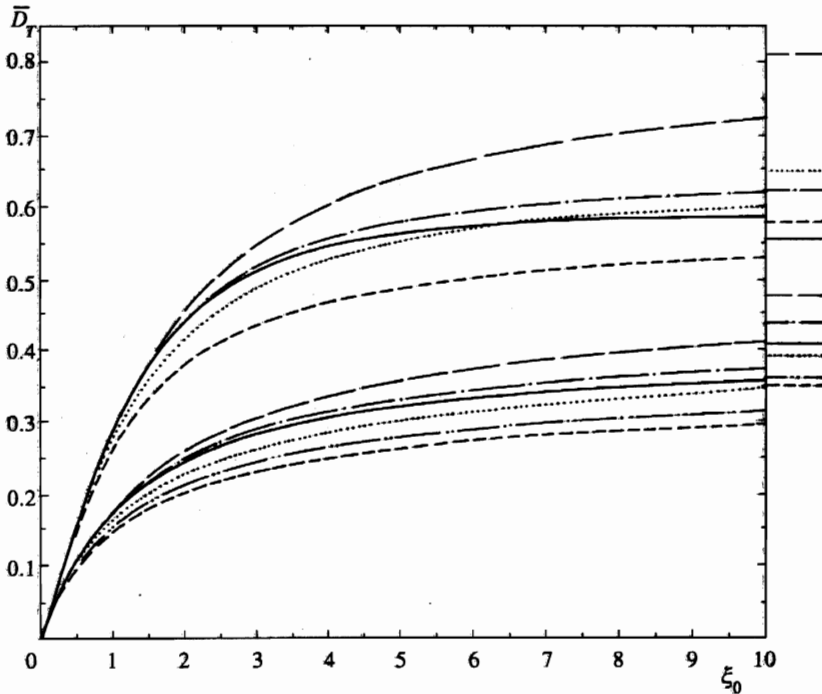
$$E_1(p, \tau) = u_0^2 \delta(p - p_0) \exp(-\tau/\tau_0), \\ E_2(p, \tau) = (u_0^2/p_0) 0.65159x^4 / (1 + x^{17/3}) \exp(-\tau/\tau_0), \quad (18)$$

где  $x = p/p_0$ . При  $x \gg 1$  спектр  $E_2 \propto p^{-5/3}$ , т. е. является колмогоровским. Эти результаты позволяют оценить точность предлагаемых методов для промежуточных типов спектров.

Значения  $D_T^{(0)}(\xi_0)$  и  $D_T^{(0)}(\xi_0) + D_T^{(1)}(\xi_0)$  представлены на рисунке. Видно, что вклад корреляторов скорости четвертого порядка монотонно растет от 0% при  $\xi_0 = 0$  до 4.1% для спектра  $E_2$  и до 5.5% для спектра  $E_1$  при  $\xi_0 = 10$ . Точные значения  $\bar{D}_T^{(0)}$  и  $\bar{D}_T^{(1)}$  для замороженной турбулентности ( $\xi_0 \rightarrow \infty$ ) получены в [16], где они обозначены как  $\underline{\underline{D}}_T^{(0)}$  и  $\underline{\underline{D}}_T^{(1)}$ . Для спектра  $E_1$  имеем  $\bar{D}_T^{(0)}(\infty) = 0.6222$  и  $\bar{D}_T^{(1)}(\infty) = -0.0691$ , т. е. поправка  $\bar{D}_T^{(1)}$  составляет 11.1% от  $\bar{D}_T^{(0)}$ . Для  $E_2$ -спектра имеем  $\bar{D}_T^{(0)}(\infty) = 0.4359$  и  $\bar{D}_T^{(1)}(\infty) = -0.0291$ , т. е. для этого широкого спектра поправка меньше 6.7%.

Эти результаты показывают, что главный вклад в  $D_T$  дают двухточечные корреляторы скорости, описывающие крупномасштабную структуру турбулентных пульсаций. Вклад четырехточечных корреляторов  $\leq 10\%$ , что соответствует сравнительно малому влиянию на диффузию мелкомасштабных турбулентных движений. Интересно заметить, что поправка  $D_T^{(1)} < 0$ . Это представляется физически естественным, так как наличие мелкомасштабных вихрей, очевидно, означает, что не все примесные частицы увлекаются средой на далекие расстояния. Из-за большой громоздкости формул трудно оценить вклад  $D_T^{(2)}$  корреляторов шестого порядка, описывающих еще более мелкие вихревые движения. Если, однако, считать, что относительный темп уменьшения членов ряда (14) хотя бы для первых членов одинаков, то максимальный вклад корреляторов шестого порядка будет  $\leq 1\%$  от величины  $D_T^{(0)}$  при  $\xi_0 \rightarrow \infty$ . При  $\xi_0 \rightarrow 0$  вклад всех поправок  $D_T^{(1)}, D_T^{(2)}, \dots$  стремится к нулю.

Результаты, полученные с использованием нелинейного уравнения (13) и итераций перенормированного уравнения (10), являются физически и математически наиболее обоснованными. Прямое численное моделирование турбулентной диффузии [13] для спектра  $E_1$  это подтверждает. Поэтому мы будем считать значения  $D_T^{(0)} + D_T^{(1)}$  наиболее близкими к точному  $D_T$  и сравнивать результаты вычислений  $D_T$  по различным приближенным методам именно с этими «эталонными» значениями.



Стационарные значения коэффициентов турбулентной диффузии. Верхнее семейство кривых соответствует  $\delta$ -образному спектру  $E_1(p, \tau)$ , а нижнее — спектру колмогоровского типа  $E_2(p, \tau)$ . Штрихпунктирные кривые представляют  $\bar{D}_T^{(0)}(\xi_0)$ , а сплошные — значения  $\bar{D}_T^{(0)}(\xi_0) + \bar{D}_T^{(1)}(\xi_0)$ . Пунктирные кривые дают  $\bar{D}_T^{(m)}(\xi_0)$ . Штриховые и длинноштриховые кривые соответствуют величинам  $\bar{D}_T^{(s)}(\xi_0)$  и  $\bar{D}_T^{(s)}(\infty, \xi_0)$ . Штрихи с двумя точками представляют комбинированный самосогласованный способ  $\bar{D}_T^{(sa)}(\xi_0)$ . Уровни справа соответствуют коэффициентам  $\bar{D}_T$  в пределе  $\xi_0 \rightarrow \infty$  (замороженная турбулентность)

### 3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ $D_T$

#### 3.1. Использование асимптотик нелинейного уравнения (13)

Численное нахождение решений нелинейного уравнения (13) является сравнительно сложной задачей. Наиболее удобно использовать фурье-образ по  $\mathbf{R}$  и лаплас-образ по  $\tau$  (берем  $D_m = 0$ ):

$$\tilde{g}(p, s) = \int d\mathbf{R} \int_0^\infty d\tau \exp(-s\tau) \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{R}) g(p, \tau), \tag{19}$$

$$\tilde{g}(p, s) = \left[ s + \frac{p^2}{4} \int_0^\infty dq \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu^2) \int_0^\infty d\tau E(q, \tau) \tilde{g}(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \tau) \exp(-s\tau) \right]^{-1}. \tag{20}$$

Легко видеть, что итерации (20) являются непрерывной дробью с положительными членами. Это означает, что две последовательные итерации представляют точное значение

$\tilde{g}(p, s)$  с недостатком  $\tilde{g}_{<}(p, s)$  и избытком  $\tilde{g}_{>}(p, s)$ . Так, очевидно,  $\tilde{g}_{>}(p, s) = 1/s$  представляет  $\tilde{g}(p, s)$  с избытком. Подстановка этого выражения в (20) приводит к

$$\tilde{g}_{<}(p, s) = \left[ s + \frac{u_0^2 \tau_0 p^2}{3(s\tau_0 + 1)} \right]^{-1}.$$

Однако эти функции слишком грубо представляют точное значение  $\tilde{g}(p, s)$ . Более точное представление дается асимптотикой  $\tilde{g}(p, s)$  для  $p \gg p_0$ :

$$\tilde{g}_a(p, s) \equiv \tilde{g}_{<}(p, s) = 2 \left[ s + (s^2 + 4u_0^2 p^2/3)^{1/2} \right]^{-1}. \quad (21)$$

Подстановка (21) в (13) приводит к  $\tilde{g}_{>}(p, s)$ :

$$\tilde{g}_{>}(p, s) = \left[ s + \frac{p^2}{4} \int_0^\infty dq \int_0^\infty d\tau \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu^2) E(q, \tau) \tilde{g}_{<}(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \tau) \exp(-s\tau) \right]^{-1}. \quad (22)$$

Среднее значение  $g_m = (g_{<} + g_{>})/2$  сравнительно хорошо представляет точное значение  $g$ . Подстановка  $g_m$  в (5) дает для случая  $E(p, \tau) = E(p) \exp(-\tau/\tau_0)$  следующее выражение:

$$D_T^{(m)}(\xi_0) = \frac{\tau_0}{6} \int_0^\infty dp E(p) \left\{ 2 \left[ 1 + (1 + 4u_0^2 \tau_0^2 p^2/3)^{1/2} \right]^{-1} + \left[ 1 + \left( \frac{p\tau_0}{2} \right)^2 \int_0^\infty dq E(q) \int_{-1}^1 d\mu \frac{1 - \mu^2}{1 + (1 + u_0^2 \tau_0^2 (\mathbf{p} - \mathbf{q})^2/3)^{1/2}} \right]^{-1} \right\}. \quad (23)$$

Вычисление  $D_T$  по этой формуле не представляет затруднений.

Результаты вычислений  $D_T^{(m)}(\xi_0)$  для спектров (18) представлены на рисунке (пунктирные кривые). Видно, что для обоих спектров кривые  $D_T^{(m)}$  близки к значениям  $D_T^{(0)} + D_T^{(1)}$ . Для спектра  $E_2(p, \tau)$  максимальное отличие  $\simeq 12\%$  наблюдается при  $\xi_0 \simeq 5$ , а для  $\xi_0 \rightarrow \infty$  оно уменьшается до 4%. Для случая пикообразного спектра  $E_1(p, \tau)$  максимальное отличие  $\simeq 13\%$  имеет место при  $\xi_0 \rightarrow \infty$ .

Таким образом, сравнительно простая формула (23) представляет  $D_T$  достаточно удовлетворительно, особенно для замороженной турбулентности с широким спектром. По-видимому, можно найти более точные приближенные формулы для функции Грина  $g(R, \tau)$  и использовать их для вычисления  $D_T$ .

### 3.2. Самосогласованный способ

Мы уже говорили, что крупномасштабные турбулентные движения дают наибольший вклад в  $D_T$ . С другой стороны, для таких масштабов функция Грина  $\langle G(1, 2) \rangle$  хорошо описывается диффузионной формулой (8), где вместо  $D_m$  надо брать сумму  $D = D_m + D_T \simeq D_T$ . Поэтому естественно использовать в (15) в качестве  $\tilde{g}(p, \tau)$  диффузионное выражение  $\tilde{g}(p, \tau) = \exp(-D_T^{(s)} p^2 \tau)$  с неизвестным пока коэффициентом диффузии  $D_T^{(s)}(\xi_0)$ :

$$D_T^{(s)}(\xi_0) = \frac{1}{3} \int_0^\infty dp \int_0^\infty d\tau E(p, \tau) \exp \left[ -D_T^{(s)}(\xi_0) p^2 \tau \right]. \quad (24)$$



Выражение (24) является нелинейным уравнением для нахождения самосогласованного  $D_T^{(s)}(\xi_0)$ . По-видимому, впервые это выражение было предложено в работе [17].

Результаты вычислений  $D_T^{(s)}(\xi_0)$  представлены на рисунке (штриховые линии). Для  $\delta$ -образного спектра  $E_1(p, \tau)$  максимальное отличие от  $D_T^{(0)} + D_T^{(1)}$  составляет 15% при  $\xi_0 = 3$ , а затем различие уменьшается (9.5% при  $\xi_0 = 10$  и 4% для  $\xi_0 \rightarrow \infty$ ). Для широкого спектра  $E_2(p, \tau)$  различие больше — 19%, 17% и 15% соответственно для  $\xi_0 = 3, 10$  и  $\infty$ . Для многих случаев и такая точность является вполне приемлемой.

### 3.3. Комбинированный самосогласованный способ

Более точный результат дает способ, в котором для  $p \leq p_*$  используется диффузионная функция Грина  $\tilde{g}(p, \tau) = \exp(-D_T^{(sa)} p^2 \tau)$ , а для  $p \geq p_*$  — асимптотика (21). Для спектров  $E(p, \tau) \propto \exp(-\tau/\tau_0)$  такой комбинированный метод дает

$$D_T^{(sa)} = \frac{\tau_0}{3} \int_0^{p_*} dp \frac{E(p)}{1 + D_T^{(sa)} p^2 \tau_0} + \frac{2\tau_0}{3} \int_{p_*}^{\infty} dp \frac{E(p)}{1 + (1 + 4p^2 u_0^2 \tau_0^2 / 3)^{1/2}}. \quad (25)$$

Условие непрерывности комбинированной функции Грина в точке  $p_*$  дает

$$p_* = [(u_0^2 \tau_0 - 3D_T^{(sa)}) / 3(D_T^{(sa)})^2 \tau_0]^{1/2}. \quad (26)$$

Результаты вычислений по этому методу для спектра  $E_2(p, \tau)$  даны на рисунке (двухточечно-штриховая кривая). Видно, что этот метод дает значения более близкие к  $D_T^{(0)} + D_T^{(1)}$ , чем чисто самосогласованный метод. Для  $\delta$ -образного спектра  $E_1(p, \tau)$  этот метод совпадает с чисто самосогласованным методом.

### 3.4. Самосогласованный метод с зависящим от времени коэффициентом диффузии

Стационарные значения  $D_T(\xi_0)$  можно вычислять также как предел  $t \rightarrow \infty$  зависящего от времени коэффициента турбулентной диффузии  $D_T(t, \xi_0)$ . Самосогласованный способ вычисления  $D_T(t, \xi_0)$  следует из (5), если в качестве функции Грина взять диффузионную функцию Грина с зависящим от времени коэффициентом диффузии. В итоге получаем

$$D_T^{(s)}(t, \xi_0) = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} dp \int_0^t d\tau E(p, \tau) \exp \left[ - \int_0^t d\tau' D_T^{(s)}(\tau', \xi_0) p^2 \right]. \quad (27)$$

Если здесь взять  $D_T^{(s)}(t, \xi_0) \equiv D_T^{(s)}(\xi_0)$  и устремить  $t \rightarrow \infty$ , то (27) переходит в (24). Величина  $D_T^{(s)}(t, \xi_0)$  принимает свое стационарное значение, если  $t \gg \tau_0$  для  $\xi_0 \ll 1$  и  $t \gg t_0 = 1/u_0 p_0$  для  $\xi_0 \gg 1$ , т. е. процесс определяется наименьшим из характерных времен.

Результаты вычислений  $D_T^{(s)}(\infty, \xi_0)$  даны на рисунке (длинный штрих). Видно, что для  $\xi_0 \leq 1$  кривые практически совпадают с  $D_T^{(0)} + D_T^{(1)}$ . Затем разница увеличивается монотонно и для  $\xi_0 = 10$  достигает 23% для  $\delta$ -образного спектра  $E_1(p, \tau)$  и 15% для широкого спектра  $E_2(p, \tau)$ . В пределе  $\xi_0 \rightarrow \infty$  различие еще больше, соответственно  $\simeq 48\%$  и 17%. Сравнение формул (24) и (27) показывает, что  $D_T^{(s)}(t, \xi_0) > D_T^{(s)}(\xi_0)$ . Рисунок это подтверждает. Значения  $D_T^{(0)} + D_T^{(1)}$  лежат между кривыми  $D_T^{(s)}(\infty, \xi_0)$  и

$D_T^{(s)}(\xi_0)$ , которые можно рассматривать как верхний и нижний пределы для реального коэффициента турбулентной диффузии  $D_T(\xi_0)$ . Более того, среднее значение  $D_T^{(sm)} = (D_T^{(s)}(\infty, \xi_0) + D_T^{(s)}(\xi_0)) / 2$  этих коэффициентов представляет  $D_T^{(0)} + D_T^{(1)}$  с очень хорошей точностью. Для широкого спектра  $E_2(p, \tau)$  отличие этого среднего от  $D_T^{(0)} + D_T^{(1)}$  составляет 3%, 1.5% и 1.2% соответственно для  $\xi_0 = 5, 10$  и  $\infty$ , т. е.  $D_T^{(sm)}$  в этом случае даже точнее, чем  $D_T^{(m)}$ . Однако для  $\delta$ -образного спектра  $E_1(p, \tau)$  различие больше и составляет 0.1%, 7% и 25% соответственно для тех же значений  $\xi_0$ . Для этого спектра при  $\xi_0 > 10$  более точным является значение  $D_T^{(s)}(\xi_0)$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнение рассмотренных выше методов приводит к следующим выводам.

1. Метод, основанный на численном решении нелинейного уравнения (13) и итерации перенормированного уравнения (10), является наиболее точным методом вычисления коэффициентов турбулентной диффузии.

2. Из всех рассмотренных приближенных методов наиболее точен и предпочтителен способ, основанный на использовании приближенного выражения для решения нелинейного уравнения (13) и дающий выражение (23).

3. Для турбулентности, характеризуемой широким спектром, среднее значение  $D_T^{(sm)}$  стационарного и нестационарного самосогласованных значений  $D_T$  также представляет  $D_T(\xi_0)$  с хорошей точностью.

4. Все рассмотренные методы можно обобщить для вычисления нестационарных коэффициентов диффузии  $D_T(t, \xi_0)$ . Для малых времен хорошим приближением является  $\bar{D}_T(t, \xi_0) \simeq t/3t_0$  вплоть до  $t/t_0 \leq \xi_0$  для турбулентности с  $\xi_0 \ll 1$  и вплоть до  $t/t_0 \leq 1$  для  $\xi_0 \gg 1$ . Напомним, что величина  $t_0 = 1/u_0 p_0 \simeq R_0/u_0$ . При  $\xi_0 \ll 1$  величина  $D_T(t, \xi_0)$  достигает стационарного значения при  $t/t_0 \simeq 2-3$ , а для  $\xi_0 \gg 1$  — при  $t/t_0 \simeq 10-20$ .

Автор благодарит Фонд фундаментальных исследований Российской академии наук за поддержку работы.

#### Литература

1. Н. А. Силантьев, ЖЭТФ 101, 1216 (1992).
2. A. Z. Dolginov and N. A. Silant'ev, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 63, 139 (1992).
3. F. Richardson, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 110, 209 (1926).
4. G. K. Batchelor, Proc. Cambridge Philosoph. Soc. 48, 345 (1952).
5. *Survey in Mechanics*, ed. by G. K. Batchelor, Cambridge Univer. Press, Cambridge (1956), p. 352.
6. H. G. E. Hentschel and I. Procaccia, Phys. Rev. A 29, 1461 (1984).
7. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, т. 1, 2, Наука, Москва (1967).
8. *Turbulence*, ed. by P. Bradshaw, Springer Verlag, Berlin (1978).
9. E. N. Parker, *Cosmical magnetic fields*, Clarendon Press, Oxford (1979).
10. G. I. Taylor, Proc. Lond. Math. Soc. A 20, 196 (1921).
11. R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. 5, 497 (1959).

12. P. H. Roberts, *J. Fluid Mech.* **11**, 257 (1961).
13. R. H. Kraichnan, *Physics of Fluids* **13**, 22 (1970).
14. R. H. Kraichnan, *J. Fluid Mech.* **81**, 385 (1977).
15. Г. М. Фихтенгольц, *Курс математического анализа*, т. 2, Физматгиз, Москва (1962).
16. N. A. Silant'ev, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **75**, 183 (1994).
17. R. Phythian and W. D. Curtis, *J. Fluid Mech.* **89**, 241 (1978).