

## ФОРМИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СОЛИТОНОВ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В ФОТОРЕФРАКТИВНЫХ КРИСТАЛЛАХ

*В. А. Выслоух, В. Кутузов, В. М. Петникова, В. В. Шувалов*

*Международный лазерный центр  
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова  
119899, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 21 июля 1996 г.,  
после переработки 17 сентября 1996 г.

Построена аналитическая модель, на микроскопическом уровне описывающая дрейфовый и диффузионный механизмы формирования нелинейного отклика (локальная и нелокальная нелинейности) фоторефрактивных кристаллов. Найдены новые типы устойчивых самоогласованных распределений интенсивности светового поля — пространственных солитонов. Рассчитаны траектории их движения (self-bending) и показана возможность наблюдения в фоторефрактивных кристаллах нового нелинейно-оптического эффекта — формирования пространственных ударных волн. Проведен анализ модуляционной неустойчивости, возникающей при распространении в фоторефрактивных кристаллах плоской волны, и определены характерные пространственные масштабы формирующегося из-за самовоздействия распределения светового поля (fanning). Результаты анализа подкреплены данными компьютерного моделирования.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из интереснейших проблем современной нелинейной оптики является исследование процессов самоорганизации (фазовых переходов) в системах, состоящих из нелинейной среды и светового поля. Если при этом устойчивые самоогласованные решения задач такого типа (солитоны) в средах с пространственно-локализованным (локальным) нелинейным откликом (случай так называемой керровской нелинейности [1]) изучены уже достаточно хорошо, то с пониманием физики формирования аналогичных пространственно-временных структур в самонакачивающихся системах на основе нелокальной нелинейности фоторефрактивного типа дела пока обстоят значительно хуже. Актуальность исследования таких систем определяется тем, что фоторефракция является одним из наиболее сильных механизмов нелинейности, ощутимые проявления которого наблюдаются при интенсивности света уже всего в несколько мВт/см<sup>2</sup> [2].

Для фоторефрактивных кристаллов характерна инерционность, которая позволяет управлять временем формирования нелинейного отклика в диапазоне от десятков секунд до единиц миллисекунд и менее [3]. Однако еще более важным является то, что за счет его нелокальной составляющей можно реализовать и принципиально новые типы нелинейного преобразования оптических сигналов, такие как двухлучковый энергообмен, перенос фазовой информации и др. [4]. Среди всех этих процессов совершенно особое место занимает эффект обращения волнового фронта, который может наблюдаться и в самонакачивающихся схемах, являющихся, по существу, четырехфотонными и часто беззеркальными параметрическими генераторами света [5]. В подоб-

ных системах генерация обращенных волн возможна даже при некогерентных волнах накачки [6]. Фактически, процесс ее развития и является одним из примеров такой самоорганизации — фазового перехода, проходящего в системе «нелинейная среда — световое поле» [7].

На сегодняшний день физика процессов, протекающих при пространственно-неоднородном освещении фоторефрактивных кристаллов, хорошо известна [8]. Интерференция внешних и/или генерируемых в фоторефрактивных кристаллах световых полей приводит к пространственно-неоднородной фотогенерации свободных носителей. Далее следует их пространственная диффузия и дрейф в статическом электрическом поле. В результате последующего захвата этих носителей дефектами и примесями («ловушками») формируется пространственно-неоднородное распределение внутреннего электрического поля. Проявление этого поля через линейный электрооптический эффект приводит к пространственно-неоднородному распределению показателя преломления. Рассеяние света на возникшей таким образом динамической голограмме замыкает петлю двумерной обратной связи, формируя полную самосогласованную задачу.

Хотя система материальных уравнений, необходимая для описания явления фоторефракции [8], и возможность реализации на основе фоторефрактивных кристаллов различных генерационных схем [9] известны уже достаточно давно, до настоящего времени на микроскопическом уровне описывался лишь стационарный режим генерации [5] и переходные процессы при нелинейном взаимодействии в фоторефрактивных кристаллах плоских волн [10]. Оценивался порог генерации самонакачивающихся схем и характерное время их выхода на стационарный режим. Основная причина этой, на первый взгляд, парадоксальной ситуации достаточно проста. Дело в том, что при постановке задачи на микроскопическом уровне необходимо решить весьма сложную нелинейную систему уравнений. К сожалению, для ее численного интегрирования необходимо использовать слишком мелкую сетку по времени и пространственным координатам [11]. Серьезные проблемы возникают и при интерпретации сложной структуры нестационарных нелинейных волновых полей, полученных в результате компьютерного моделирования. При аналитическом подходе [12], когда эти проблемы снимаются, всегда проводится регуляризация задачи, что резко обедняет возможный пространственный спектр взаимодействующих световых полей. При статистическом описании [13] задача линейризуется за счет использования целой серии весьма ограничивающих ее общность допущений. Поля накачек считаются заданными, не учитывается роль процессов самовоздействия и дифракции в высшие порядки и т. д. Фактически проводится усреднение системы нелинейных уравнений, что некорректно в условиях столь сильной нелинейности. Таким образом, адекватного описания процессов формирования устойчивых решений в самонакачивающихся системах на основе сред с фоторефрактивной нелинейностью на сегодняшний день практически не существует. Отметим также, что задача преобразования динамических изображений, т. е. волновых фронтов с регулярной динамической пространственной модуляцией, может приводить и к принципиально новым эффектам типа устойчивых пространственно-временных автоволновых решений [14].

В процессе формирования нелинейных волновых полей в фоторефрактивных кристаллах весьма важную роль играют солитонные эффекты, теоретическому анализу которых посвящена пионерская работа [15]. Экспериментальная реализация солитонного режима распространения световых пучков в фоторефрактивных кристаллах была впервые продемонстрирована в работах [16, 17]. Дальнейший прогресс в этой области во

многим связан с анализом таких новых типов солитонных решений как «темные» [18], «серые» [19], «векторные» [20], «vortex» [21] солитоны и т. д.

Целью настоящей работы являлось исследование процессов формирования и распространения известных стационарных волновых пакетов солитонного типа, а также нового самосогласованного пространственного распределения светового поля — пространственных ударных волн — в системах с локальной и нелокальной компонентами нелинейного отклика. Нам удалось построить физически наглядную и достаточно общую модель, основанную на микроскопическом описании процессов, протекающих в системе «нелинейная среда — световое поле». При этом мы смогли отказаться от целого ряда традиционных приближений, ограничивающих общность получаемых решений, и корректно описать достаточно сложную и необычную пространственную структуру распространяющихся в такой нелинейной среде самосогласованных световых пучков.

## 2. ИСХОДНАЯ МОДЕЛЬ

В основу использованной нами модели нелинейного отклика фоторефрактивных кристаллов была положена классическая система материальных уравнений для внутреннего электрического поля  $E_{sc}(x, t)$  [8], записанная для двумерного случая без учета фотовольтаического эффекта:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{\partial N_d^+}{\partial t} - \frac{1}{e} \frac{\partial j}{\partial x}, \\ \frac{\partial N_d^+}{\partial t} &= s(I + I_0)(N_d - N_d^+) - \gamma_R n N_d^+, \\ j &= e\mu n(E_0 + E_{sc}) - \mu\Theta \frac{\partial n}{\partial x}, \\ \frac{\partial E_{sc}}{\partial x} &= \frac{4\pi e}{\epsilon}(n + N_a - N_d^+). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $n$ ,  $N_d$ ,  $N_d^+$  и  $N_a$  — концентрации соответственно свободных носителей, доноров, ионизированных доноров и акцепторов;  $s$  — сечение процесса фотоионизации;  $I(x, t)$  — интенсивность излучения;  $I_0$  — параметр, описывающий темновую проводимость фоторефрактивных кристаллов и определяющий скорость темновой ионизации доноров как  $sI_0$ ;  $\gamma_R$  — константа парной рекомбинации;  $e$  и  $\mu$  — заряд и подвижность свободных носителей с учетом их знака, т. е. отрицательные для электронов и положительные для дырок;  $\epsilon$  — статическая диэлектрическая проницаемость фоторефрактивного кристалла;  $\Theta$  — его температура в энергетических единицах. Предполагается, что в поперечном направлении (вдоль оси  $x$ ) к фоторефрактивному кристаллу приложено внешнее статическое электрическое поле  $E_0$ , поэтому в системе уравнений (1) учтены как дрейфовая, так и диффузионная компоненты плотности тока  $j$  по этому направлению. Считается, что оптическое излучение распространяется вдоль оси  $z$ .

Система материальных уравнений (1) решалась совместно со стандартным укороченным волновым уравнением для комплексной амплитуды светового поля  $A(x, z, t)$ :

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + k \frac{\delta\eta}{\eta} A, \quad (2)$$

записанным в параксиальном приближении без учета поглощения. Здесь  $k$  — волновое число;  $\delta\eta = (1/2)r_{eff}\eta^3 E_{sc}(x, z, t)$  — нелинейная добавка к показателю преломления  $\eta$ ;

$\tau_{eff}$  — эффективный электрооптический коэффициент. В (2) опущено однородное по  $x$  изменение показателя преломления, обусловленное статическим полем  $E_0$ . Уравнения (1) и (2) формируют самосогласованную задачу, в которой учитывается взаимное влияние процессов перераспределения интенсивности света и электрического поля в объеме фоторефрактивного кристалла. Такая модель хорошо описывает эксперименты с так называемыми шелевыми пучками [22], которые широко используются на практике при исследованиях солитонных эффектов в фоторефрактивных кристаллах из-за сильной анизотропии нелинейного отклика последних.

### 3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система материальных уравнений (1) решалась в стационарном приближении  $\partial/\partial t \rightarrow 0$ ,  $j = j(x)$ . При этом из нее исключаются  $j$  и  $N_d^+$  и

$$En - E_0 n_0 = \frac{\Theta}{e} \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (3)$$

$$n = s(I_0 + I)(N_d - N_a) \left(1 + a\chi \frac{\partial E}{\partial x}\right) / \gamma_R N_a \left(1 - a \frac{\partial E}{\partial x}\right). \quad (4)$$

Здесь  $n_0$  — темновая концентрация свободных носителей. В (4) введены следующие обозначения:

$$a = \frac{\epsilon}{4\pi e N_a}, \quad E = E_0 + E_{sc}, \quad \chi = \frac{N_a}{N_d - N_a} \quad (5)$$

и считается, что  $N_a \gg n$ . Для фоторефрактивных кристаллов с большой темновой проводимостью, т. е. при выполнении неравенства  $I_0 \gg I$ , система уравнений (3) и (4) линеаризуется по  $I$ ,  $E_{sc}$  и  $n$ . При этом в предположении  $a\partial E/\partial x \ll 1$  ее удастся свести к единственному линейному уравнению второго порядка относительно  $E_{sc}$

$$\frac{\partial^2 E_{sc}}{\partial x^2} - \frac{eE_0}{\Theta} \frac{\partial E_{sc}}{\partial x} - \frac{e}{\Theta a(\chi+1)} E_{sc} = \frac{1}{a(\chi+1)I_0} \left( \frac{eE_0}{\Theta} I - \frac{\partial I}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Его решение может быть представлено в форме

$$E_{sc} = -\frac{1}{a(\chi+1)I_0(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[ \lambda_1 \int_{-\infty}^x I(\xi) \exp[\lambda_2(x-\xi)] d\xi + \lambda_2 \int_x^{\infty} I(\xi) \exp[\lambda_1(x-\xi)] d\xi \right], \quad (7)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{eE_0}{2\Theta} \pm \sqrt{\left(\frac{eE_0}{2\Theta}\right)^2 + \frac{e}{a\Theta(\chi+1)}},$$

которая и определяет нелинейную добавку к показателю преломления в правой части уравнения (2).

При интегрировании (7) функцию  $I(\xi)$  можно разложить в ряд в окрестности точки  $x$ , что позволяет записать решение (7) в виде разложения по производным интенсивности излучения

$$E_{sc} = \frac{1}{aI_0(\chi+1)(\lambda_1 - \lambda_2)} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2^{m+1}} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1^{m+1}} \right) \frac{\partial^m I(x)}{\partial x^m}. \quad (8)$$

Еще более наглядна связь пространственных распределений внутреннего поля и интенсивности излучения в спектральном представлении. Легко убедиться, что при формировании пространственного спектра распределения внутреннего поля  $E_{ac}(\kappa)$  фото-рефрактивный кристалл фактически играет роль фильтра пространственных частот  $\kappa$  с коэффициентом передачи

$$T(\kappa) = -\frac{E_0}{I_0} \frac{1 + i\kappa\Theta/eE_0}{1 - i\kappa a E_0(\chi + 1) + \kappa^2 a \Theta(\chi + 1)/e} \quad (9)$$

по отношению к пространственному спектру распределения интенсивности света  $I(\kappa)$ . Выражения для  $T(\kappa)$  в случаях «чистого» дрейфа свободных носителей и их «чистой» пространственной диффузии легко могут быть получены из (9) при предельных переходах  $\Theta \rightarrow 0$  и  $E_0 \rightarrow 0$ :

$$T_{dr}(\kappa) = -\frac{E_0}{I_0} \frac{1}{1 - i\kappa a E_0(\chi + 1)}, \quad (10)$$

$$T_{df}(\kappa) = -i\kappa \frac{\Theta}{eI_0} \frac{1}{1 + \kappa^2 a \Theta(\chi + 1)/e}. \quad (11)$$

Отметим, что выражения (10) и (11) можно существенно упростить, если пренебречь в их знаменателях членами, пропорциональными  $\kappa$  и  $\kappa^2$ , либо разложить  $T_{dr}(\kappa)$  и  $T_{df}(\kappa)$  в степенной ряд по  $\kappa$ , ограничившись учетом линейных членов. Причем последнее можно сделать практически всегда, поскольку в условиях любого реального эксперимента при внешних полях до 10 кВ/см и  $\Theta \sim 300$  К все следующие члены становятся существенными лишь для пространственных масштабов изменения светового поля менее длины волны. Фактически это означает, что в разложении (8) могут быть также сохранены лишь два первых члена, пропорциональных  $I(x)$  и  $\partial I/\partial x$ , которые в дальнейшем мы и будем называть локальной и нелокальной компонентами нелинейного отклика.

#### 4. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СОЛИТОНЫ И «УДАРНЫЕ ВОЛНЫ»

Обсудим ряд весьма важных решений самосогласованной задачи, сформированной уравнениями (2) и (8). Попытаемся найти решения, отвечающие случаю разделения переменных

$$A(x, z) = Y(x) \exp(-i\nu z), \quad (12)$$

где вещественная функция  $Y(x)$  задает распределение поля по поперечной координате  $x$ , а положительная константа  $\nu$  определяет нелинейный фазовый набег решения по  $z$ . Таким образом, речь пойдет о попытке отыскать стационарные по  $z$  и  $t$  распределения интенсивности. Легко убедиться, что подстановка (12) в (2) приводит к уравнению для пространственного профиля амплитуды в виде

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} - 4 \frac{\alpha k E_0}{I_0} \left[ \frac{\Theta}{e E_0} + a(\chi + 1) E_0 \right] Y^2 \frac{dY}{dx} + 2k \left( \frac{\alpha E_0}{I_0} Y^3 - \nu Y \right) = 0, \quad (13)$$

где  $\alpha = kr_{eff}\eta^2/2$  и сохранены два первых члена разложения (8) (см. выше). В случае фокусирующей керровской нелинейности ( $\delta\eta > 0$ ) в (13) удобно ввести безразмерные координаты  $\xi = x/x_0$ ,  $\zeta = z/L_d$  и нормированную амплитуду светового поля

$\rho(\xi) = Y(\xi)\sqrt{R/I_0}$ , где  $x_0$  определяется характерным поперечным масштабом задачи, например, шириной входного пучка;  $L_d = kx_0^2$  — соответствующая  $x_0$  дифракционная длина;  $R = L_d/L_r > 0$ ;  $L_r = 1/\alpha E_0$  — длина нелинейной рефракции. При этом (13) переходит в уравнение

$$\frac{d^2\rho}{d\xi^2} + 2\gamma\rho^2\frac{d\rho}{d\xi} + 2(\rho^3 - \beta\rho) = 0, \quad (14)$$

где параметр

$$\gamma = -2\frac{\alpha k E_0}{R} \left[ \frac{\Theta}{e E_0} + a(\chi + 1)E_0 \right] x_0$$

характеризует величину нелокальной компоненты нелинейного отклика;  $\beta = L_d\nu$ . Далее мы остановимся на случае  $\gamma > 0$ , который может быть реализован при соответствующем выборе ориентации фоторефрактивного кристалла и направления  $E_0$ .

#### 4.1. Модуляционная неустойчивость

Легко убедиться, что, как и в среде с чисто керровской нелинейностью, тривиальным решением уравнения (14) является плоская волна с амплитудой  $\rho(\xi) = \rho_0$  при  $\beta = \rho_0^2$ . Рассмотрим устойчивость этого решения относительно малых ( $\delta\rho_0 \ll 1$ ) гармонических возмущений распределения  $\delta\rho(\xi) = \delta\rho_0 \cos(\Omega\xi)$  на безразмерной пространственной частоте  $\Omega = \kappa x_0$ . При этом, используя технику линеаризации, развитую Беспаловым и Талановым [23], и результаты, полученные в работе [24], легко показать, что амплитуда такого возмущения экспоненциально нарастает при увеличении  $\zeta$  с инкрементом

$$g = \text{Im} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\Omega^2(\Omega^2 - 4\rho_0^2) + i\gamma\Omega\rho_0^2} \right). \quad (15)$$

Отметим, что в пределе  $\gamma \rightarrow 0$  из (15) следует хорошо известный результат для среды с нелинейностью керровского типа. Как известно [23], в последнем случае экспоненциальное увеличение амплитуды возмущений происходит лишь в ограниченной полосе пространственных частот  $0 < \Omega < \Omega_b = 2\rho_0$ , а максимальное значение  $g$  реализуется при  $\Omega = \Omega_m = \sqrt{2}\rho_0$ . Появление в уравнении (14) члена, пропорционального  $d\rho/d\xi$ , расширяет полосу модуляционной неустойчивости до бесконечности, но даже при  $\gamma \approx 1$  ее полуширина близка к полуширине полосы неустойчивости для случая керровской нелинейности, а частота, на которой достигается максимум усиления, близка к  $\Omega_m$  (рис. 1).

Итак, в среде с нелокальной нелинейностью плоские волны, хотя и отвечают классу решений с разделяющимися переменными, являются неустойчивыми. При случайной сколь угодно малой затравочной модуляции с достаточно широким спектром такая плоская волна по мере своего распространения «распадается» на сравнительно тонкие «нити» со средним безразмерным пространственным периодом  $\Lambda = 2\pi/\Omega_m$  и средней толщиной, равной обратной ширине полосы неустойчивости. О первом экспериментальном наблюдении эффекта модуляционной неустойчивости в фоторефрактивном кристалле сообщалось в работе [24].

#### 4.2. Пространственные солитоны

В предельном случае керровской нелинейности ( $\gamma = 0$ ) уравнение (14) имеет хорошо известное односолитонное решение вида  $\rho(\xi) = \text{sech}(\xi)$ , выписанное здесь для  $\beta = 1/2$ .

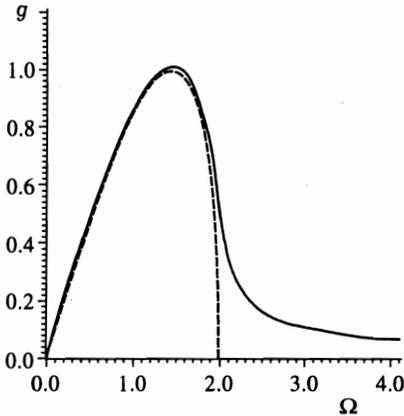


Рис. 1. Зависимость инкремента нарастания малого возмущения от безразмерной пространственной частоты затравочной модуляции  $\Omega$ : локальная (керровская) нелинейность — штриховая линия, фоторефрактивные кристаллы с локальным и нелокальным откликом ( $\rho_0 = 1, \gamma = 1$ ) — сплошная линия

Хотя известно, что это решение и является устойчивым [22], в реальных экспериментах необходимая одномерность процессов дифракции и самовоздействия достигается лишь за счет использования щелевых пучков, имеющих однородное распределение поля в направлении, ортогональном оси  $\xi$ . При этом необходимо считаться с возможностью развития на длине кристалла модуляционной неустойчивости, приводящей к филаментации пучка в этом направлении. Заметим, что устойчивость двумерных солитонов достигается за счет эффекта насыщения нелинейности.

Рассмотрим вопрос о влиянии нелокальной компоненты нелинейного отклика на распространение в фоторефрактивном кристалле солитонов такой формы. Отметим сразу, что этот вопрос непосредственно связан с явлением самоискривления лазерных пучков (self-bending) [25–28]. Поэтому вернемся к уравнению (2), введя в нем по аналогии с (14) нормированную комплексную амплитуду  $q(\xi, \zeta) = A(\xi, \zeta)\sqrt{R/I_0}$ :

$$i \frac{\partial q}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} + \frac{\gamma q}{2} \frac{\partial |q|^2}{\partial \xi} + |q|^2 q. \quad (16)$$

Полагая теперь, что  $\gamma < 1$ , будем искать решение уравнения (16) в автомодельном виде

$$q_s(\xi, \zeta) = K \operatorname{sech}[K(\xi - V\zeta)] \exp[i\Phi(\xi, \zeta)], \quad (17)$$

$$\Phi(\xi, \zeta) = -V\xi + \frac{1}{2}(V^2 - K^2)\zeta.$$

Здесь формфактор  $K(\zeta)$  описывает зависимость амплитуды солитона и его ширины от продольной координаты  $\zeta$ , а параметр  $V(\zeta)$  определяет угол между текущим направлением распространения солитона и осью  $\zeta$ . Пользуясь аппаратом теории возмущений [1], можно показать, что в первом порядке малости по  $\gamma$  амплитуда солитона остается неизменной, а  $V(\zeta)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dV}{d\zeta} = -\frac{8}{15}\gamma K^2 \quad (18)$$

с начальным условием  $V(0) = 0$ . Из (18) следует, что в фоторефрактивном кристалле вершина солитона (17) с координатой  $\xi_s$  движется по параболической траектории

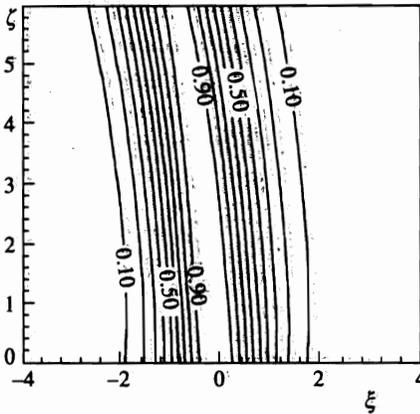


Рис. 2. Самоискривление (self-bending) траекторий движения пространственных солитонов: изолинии распределения нормированной интенсивности на плоскости  $(\xi, \zeta)$  с шагом 0.1

$\xi_s = -4\gamma K^2 \zeta^2 / 15$ . Этот аналитический результат прекрасно согласуется и с данными прямого численного интегрирования уравнения квазиоптики с начальным условием  $q(\xi, 0) = \text{sech}(\xi)$ , приведенными на рис. 2 в виде изолиний интенсивности на плоскости  $(\xi, \zeta)$ . Так, например, при  $\gamma = 0.1$  и  $\zeta = 6$  погрешность аналитического определения текущей координаты вершины солитона не превышает 5%. Рост нелокальной компоненты отклика приводит лишь к незначительному уменьшению амплитуды солитона в выходной плоскости. Таким образом, появление в уравнении (16) члена, ответственного за нелокальный нелинейный отклик, выводит односолитонные решения из класса решений с разделяющимися переменными.

### 4.3. Пространственные ударные волны

Рассмотрим теперь достаточно необычные стационарные пространственно-неограниченные решения, появляющиеся в среде с отличной от нуля нелокальной компонентой нелинейного отклика. Особенности решений этого типа, которые мы назвали пространственными ударными волнами, удобно проанализировать на фазовом портрете уравнения (14), т. е. на плоскости  $(\rho, \partial\rho/\partial\xi)$ . При этом можно воспользоваться прямой математической аналогией между характером зависимости  $\rho(\xi)$ , заданным уравнением (14), и нелинейными колебаниями осциллятора в потенциале

$$U(\rho) = \frac{1}{2}\rho^4 - \beta\rho^2 \tag{19}$$

с нелинейным затуханием, описываемым членом  $2\gamma\rho^2 d\rho/d\xi$ . Потенциальная энергия такого осциллятора имеет три локальных экстремума, соответствующих трем особым точкам фазового портрета. Два лежащих на оси  $\rho$  минимума  $U(\rho)$  с координатами  $\rho_{1,2} = \pm\sqrt{\beta}$  представляют собой точки устойчивого равновесия — фокусы, а единственный максимум ( $\rho = d\rho/d\xi = 0$ ) является точкой неустойчивого равновесия — узлом. Линеаризация (14) в окрестности узла приводит к уравнению

$$d^2\rho/d\xi^2 - 2\beta\rho = 0, \tag{20}$$

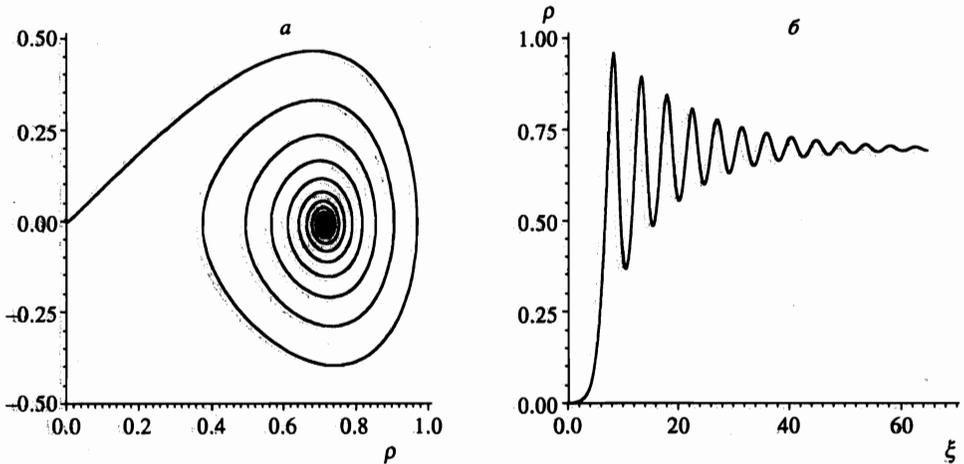


Рис. 3. Профиль пространственной ударной волны при  $\beta = 0.5$  и  $\gamma = 0.15$ : на фазовой плоскости (а) и в координатном пространстве (б)

которое кроме тривиального ( $\rho = 0$ ) имеет и экспоненциально нарастающие решения  $\rho(\xi) \propto \exp(\sqrt{2\beta}\xi)$ . Та же процедура в окрестности любого из фокусов дает уравнение затухающих колебаний

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + 2\gamma\beta\frac{du}{d\xi} + 4\beta u = 0 \quad (21)$$

для малых смещений  $u(\xi) = \rho(\xi) - \rho_{1,2}$  от положения равновесия. Решения уравнения (21) отвечают периодическому ( $\gamma < 2/\sqrt{\beta}$ , частота  $\omega = \sqrt{4\beta - (\gamma\beta)^2}$ ) либо аperiodическому ( $\gamma \geq 2/\sqrt{\beta}$ ) выходу в точку соответствующего фокуса при  $\xi \rightarrow \infty$ .

Хотя точное решение уравнения (14) записать в элементарных функциях и не удастся, характер зависимости  $\rho(\xi)$  достаточно хорошо описывается приведенными выше приближенными решениями. Это подтвердило численное интегрирование (14). При этом начальные условия задавались в точке  $\xi_0 \ll 0$  исходя из асимптотики  $\rho(\xi_0) = \exp(\sqrt{2\beta}\xi_0)$ ,  $d\rho/d\xi = \sqrt{2\beta}\exp(\sqrt{2\beta}\xi_0)$ , что на фазовой плоскости отвечает окрестности узла. Соответствующая фазовая траектория, изображенная на рис. 3а, имеет вид спирали, скручивающейся к устойчивому фокусу  $\rho_1$ . Профиль амплитуды пространственной ударной волны  $\rho(\xi)$  показан на рис. 3б. Отчетливо видны характерные особенности этого типа решений — резкий, экспоненциально нарастающий от нуля фронт пространственной ударной волны сменяется плато с затухающими по  $\xi$  осцилляциями амплитуды при выходе на стационарное значение  $\rho_1$ . Частота этих осцилляций и коэффициент затухания хорошо согласуются со значениями, предсказываемыми уравнением (21). При больших значениях  $\gamma$  выход на значение  $\rho_1$  становится аperiodическим.

Аналитическое исследование устойчивости полученных решений при распространении по  $\zeta$  (эволюционное уравнение (16)) вызывает определенные затруднения ввиду отсутствия явного выражения для пространственного распределения поля. Асимптотический переход при  $\xi \rightarrow \infty$  ударной волны в плоскую дает основания полагать, что в этой области возможно развитие модуляционной неустойчивости. Тем не менее результаты компьютерного моделирования убедили нас в возможности эксперименталь-

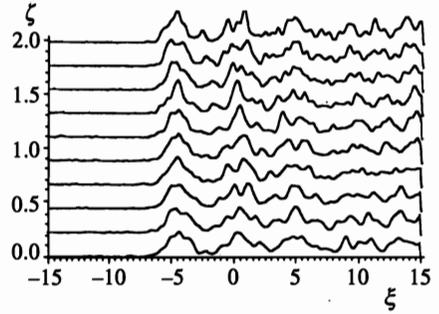
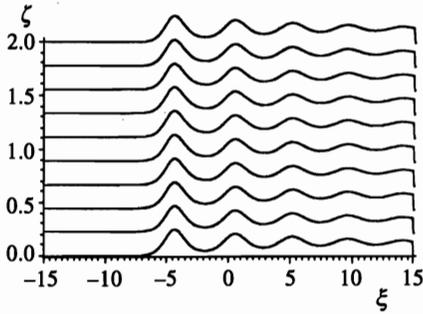


Рис. 4. Профиль пространственной ударной волны при  $\beta = 0.5$  и  $\gamma = 0.15$  в последовательных по  $\zeta$  поперечных сечениях фоторефрактивных кристаллов: в отсутствие возмущений (а) и при уровне шума 20% по интенсивности (б)

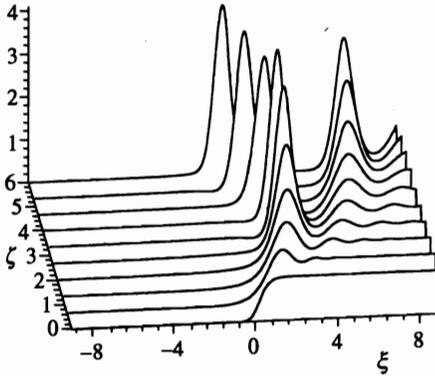


Рис. 5. Формирование пространственных солитонов и пространственных ударных волн из ступенчатого распределения интенсивности: профили интенсивности в последовательных по  $\zeta$  поперечных сечениях кристалла при  $\gamma = 0.1$

ной реализации этого нового типа волн в фоторефрактивных кристаллах. Рис. 4а иллюстрирует устойчивое распространение невозмущенной (с точностью до «компьютерного шума») пространственной ударной волны на расстояние  $\zeta = 2$ , что в реальном масштабе соответствует длине фоторефрактивного кристалла около 1 см. Рис. 4б показывает ее структурную устойчивость при существенном (20% по интенсивности) возмущении входного профиля амплитуды поля гауссовским шумом. Таким образом, пространственные ударные волны в фоторефрактивных кристаллах представляют собой новый тип решений солитонного типа, принадлежащих к классу решений с разделяющимися переменными.

#### 4.4. Эволюция ступенчатого распределения интенсивности

Чтобы проиллюстрировать важность полученных выше частных решений в структуре нелинейных волновых полей, формирующихся в общем случае, приведем в качестве примера данные прямого компьютерного моделирования эволюции лазерного пучка со ступенчатым входным профилем амплитуды  $q(\xi, 0) = [1 + \text{th}(\xi)]/2$  в фоторефрактивном кристалле с локальной и нелокальной нелинейностью. На рис. 5 показаны пространственные профили интенсивности  $|q(\xi)|^2$  в последовательных поперечных сечениях кристалла для значения  $\gamma = 0, 1$ . По мере распространения излучения на фронте начального распределения интенсивности формируется дифракционный выброс, кото-

рый за счет локальной компоненты нелинейности превращается в солитон. Одновременно он постепенно отклоняется от оси  $\zeta$  за счет нелокальной компоненты отклика. При дальнейшем распространении пучка от фронта распределения интенсивности отщепляются следующие солитоны. При этом остающаяся часть пучка все время имеет структуру, близкую к пространственной ударной волне. Таким образом, хотя в компьютерном эксперименте мы и имеем дело с весьма сложной нелинейной суперпозицией полей, понимание структуры полученных выше элементарных самосогласованных решений существенно облегчает ее анализ.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги работы, кратко перечислим ее основные результаты и сформулируем некоторые выводы. Итак, исходя из весьма общей микроскопической модели формирования нелинейного отклика фоторефрактивных кристаллов, мы получили его достаточно простое и физически наглядное разложение как в координатном (8), так и в спектральном (9) представлениях. С учетом нелокальной компоненты нелинейного отклика нам удалось уточнить физическую картину развития модуляционной неустойчивости (fanning) в фоторефрактивных кристаллах [24]. Аналитический и численный анализ роли этой компоненты отклика в динамике распространения пространственных солитонов показал, что в первом порядке теории возмущений она приводит к самоискривлению траекторий движения солитонов (self-bending) [25], а во втором — к уменьшению их амплитуды и увеличению ширины.

Нам впервые удалось получить решения в виде пространственных ударных волн в фоторефрактивных кристаллах. Проведенные при этом численные эксперименты показали, что подобные элементарные решения не только являются физически реализуемыми, но и отчетливо прослеживаются в структуре нелинейных волновых полей, формирующихся в фоторефрактивных кристаллах из входного излучения с произвольным поперечным распределением интенсивности.

Завершая работу, необходимо упомянуть и о возможных направлениях дальнейших исследований. Ближайшие перспективы мы связываем как с анализом процессов самоорганизации, протекающих в условиях дефокусирующей нелинейности и приводящих к формированию так называемых темных солитонов [18], так и со стохастическими обобщениями рассмотренных выше регулярных задач [28].

Настоящая работа была выполнена при финансовой поддержке со стороны Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-2-16238) и US Army Research Lab (контракт № DAAL01-95-R-2008).

## Литература

1. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988).
2. *Photorefractive materials and applications*, ed. by P. Gunter and J.-P. Huignard, Topics in applied physics, **61**, Springer, Heidelberg (1988).
3. *Photorefractive materials and applications*, ed. by P. Gunter and J.-P. Huignard, Topics in applied physics, **62**, Springer, Heidelberg (1989).
4. М. П. Петров, С. И. Степанов, А. В. Хоменко, *Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике*, Наука, С.-Петербург (1992).
5. С. Г. Одулов, М. С. Соскин, А. И. Хижняк, *Лазеры на динамических решетках*, Наука, Москва (1990).
6. M. Cronin-Colomb, B. Fisher, J. O. White, and A. Yariv, IEEE J. Quant. Electr. **QE-20**, 12 (1984).
7. D. Engin, S. Orlov, M. Segev et al., Phys. Rev. Lett. **74**, 1743 (1995).
8. N. Kukhtarev, V. Markov, S. Odulov et al., Ferroelectrics **22**, 949 (1979).
9. J. Feinberg, Opt. Lett. **7**, 486 (1982).
10. А. А. Зозуля, КЭ **19**, 733 (1992).
11. В. А. Выслоух, В. Кутузов, В. В. Шувалов, КЭ **23**, 157 (1996).
12. A. V. Mamaev and A. A. Zozulya, Opt. Commun. **79**, 373 (1990).
13. Н. И. Бельдюгина, В. В. Шкунов, КЭ **21**, 234 (1994).
14. М. А. Vorontsov, ICONO'95 Technical Digest, Russia, St.-Petersburg **1**, 345 (1995).
15. M. Segev, B. Crosignani, and A. Yariv, Phys. Rev. Lett. **68**, 923 (1992).
16. M. D. Iturbe Castillo, P. A. Marquez Aguilar, J. J. Sanchez Mondragon et al., Appl. Phys. Lett. **64**, 408 (1994).
17. G. Duree, J. Shultz, G. Salamo et al., Phys. Rev. Lett. **71**, 533 (1994).
18. G. C. Valley, M. Segev, B. Crosignani et al., Phys. Rev. A **50**, R4457 (1994).
19. D. N. Christodoulides and M. I. Carvalho, JOSA B **12**, 1628 (1995).
20. M. Segev, G. C. Valley, S. R. Singh et al., Optics Lett. **20**, 1764 (1995).
21. G. Duree, M. Morin, G. Salamo et al., Phys. Rev. Lett. **74**, 1978 (1995).
22. G. Duree, G. Salamo, M. Segev et al., Optics Lett. **19**, 1195 (1994).
23. В. И. Беспалов, В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ **3**, 471 (1966).
24. D. Iturbe Castillo, M. Torres Cisneros, J. J. Sanchez Mondragon et al., Optics Lett. **20**, 1 (1995).
25. J. Feinberg, JOSA **72**, 46 (1982).
26. D. N. Christodoulides and M. J. Carvalho, Opt. Lett. **19**, 1714 (1994).
27. A. A. Zozulya, M. Saffman, and D. Z. Anderson, Phys. Rev. Lett. **73**, 818 (1994).
28. О. В. Любомудров, В. В. Шкунов, КЭ **21**, 561 (1994).