

НЕЛИНЕЙНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ В НЕСКОЛЬКО КОЛЕБАНИЙ СВЕТОВОГО ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ

С. А. Козлов*, С. В. Сазонов**

* Санкт-петербургский государственный институт точной механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Россия

** Астраханский государственный технический университет
414025, Астрахань, Россия

Поступила в редакцию 8 мая 1996 г.

На основе полуфеноменологической модели поляризационного отклика изотропно-го твердого диэлектрика без использования приближения медленно меняющейся огибающей получено новое нелинейное волновое уравнение для электрического поля, распространяющегося в данном диэлектрике фемтосекундного светового импульса. Приведены обоснования того, что найденное уравнение обладает бризероподобными решениями в области аномальной групповой дисперсии и не имеет решений типа стационарных бегущих уединенных видеоимпульсов. Найдено универсальное соотношение, связывающее минимально возможную длительность бризероподобного импульса с параметрами среды. Показано, что такой импульс содержит внутри себя примерно полтора периода световых колебаний.

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие лазерной техники сверхкоротких световых импульсов привело к созданию лазерных систем, генерирующих импульсы длительностью всего в несколько периодов колебаний светового поля [1–5]. Закономерен вопрос о том, как такие импульсы распространяются в оптических средах. Понятно, что наибольший интерес представляют нелинейные, особенно солитонные, режимы их распространения, поскольку в случае малоинтенсивного излучения из-за дисперсии эти импульсы быстро расплываются в соответствии с известными закономерностями [6, 7].

Нелинейную эволюцию световых импульсов длительностью τ_p вплоть до фемтосекундного диапазона в диэлектрических средах теоретически изучают, обычно решая волновое уравнение вида [8]

$$i \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \alpha_1 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial T^2} + i \alpha_2 \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial T^3} + \dots + \beta_0 |\varepsilon|^2 \varepsilon + i \beta_1 \frac{\partial}{\partial T} (|\varepsilon|^2 \varepsilon) + \dots = 0, \quad (1)$$

где $\varepsilon(z, T)$ — медленно изменяющаяся огибающая электрического поля E светового импульса:

$$E = \frac{1}{2} \varepsilon \exp [i(\omega T - kz)] + \text{с.с.} \quad (2)$$

Здесь ω — частота, k — волновое число, $T = t - z/v_g$ — время в сопровождающей системе координат, v_g — групповая скорость. Дисперсия линейного и нелинейного показателей преломления среды учитывается в различных приближениях теории дисперсии с помощью феноменологических, вообще говоря, комплексных коэффициентов

$\alpha_1, \alpha_2, \dots$ и β_0, β_1, \dots соответственно. Однако анализ распространения импульсов, состоящих всего из нескольких колебаний поля, становится качественно более сложным. Для таких предельно коротких импульсов уже затруднительно ввести понятие огибающей. Поэтому для описания их эволюции неприменимо плодотворное в традиционной нелинейной оптике приближение медленно меняющейся огибающей и, соответственно, неприменимо полученное в этом приближении волновое уравнение (1).

К настоящему времени известно уже значительное число работ (см., например [9–23]), посвященных анализу самовоздействия предельно коротких импульсов в оптических средах, в которых не используется приближение медленно меняющейся огибающей. Записанная не для огибающей светового импульса, а непосредственно для поля волны замкнутая система из волнового и материальных уравнений в этих работах, как правило, анализируется в приближении модели двухуровневой среды. Подобная система нелинейных уравнений, например, в виде уравнений Максвелла–Блоха, для случая предельно коротких импульсов часто значительно упрощается. Так, для очень длинных [11, 13, 16, 17, 22, 24]

$$(\omega_0 \tau_p)^2 \gg 1, \quad (3)$$

по сравнению с характерным временем протекания внутриатомных процессов ω_0^{-1} , импульсов в приближении однонаправленной волны данная система редуцируется к модифицированному уравнению Кортвега–де Вриза (МКдВ), а для очень коротких [10, 11, 13, 14, 16, 18]

$$(\omega_0 \tau_p)^2 \ll 1 \quad (4)$$

— к уравнению синус-Гордона. Однако при анализе нелинейного распространения в диэлектрике предельно коротких импульсов, спектр которых принадлежит области прозрачности среды, результаты упомянутых работ, на наш взгляд, неприменимы. Это связано, прежде всего, с двумя факторами. Во-первых, моделирование нелинейности поляризационного отклика электронной природы в рамках приближения двухуровневой среды однозначно дает отрицательное значение коэффициента нелинейного показателя преломления n_2 в диапазоне прозрачности диэлектрика [25]. В то же время экспериментально измеренные значения n_2 для стекол и кристаллов положительны [25]. Различие результатов теории и эксперимента понятно, так как в приближении двухуровневой среды по сути учитывается только один механизм нелинейности — изменение населенностей уровней. Этот механизм, как правило, не является основным при нерезонансном взаимодействии света с веществом [25]. Во-вторых, двухуровневая модель описывает нормальную дисперсию групповой скорости, но не позволяет учесть аномальную дисперсию. Тогда как из нелинейной оптики пико- и субпикосекундных импульсов известно, что характер их самовоздействия качественно отличается в зависимости от того, лежит ли спектр импульсов в области нормальной или аномальной дисперсии их групповой скорости [8].

В настоящей работе приведены материальные уравнения, адекватно описывающие дисперсию как линейного, так и нелинейного показателей преломления диэлектриков в области их прозрачности. Выведено нелинейное волновое уравнение, характеризующее эволюцию поля предельно коротких импульсов в диэлектрических средах для случая, когда спектр импульса принадлежит диапазону прозрачности среды. Представлен анализ выведенного уравнения и его решений.

2. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ОТКЛИК ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ В ПОЛЕ ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ

Поляризационный отклик диэлектрической среды в поле интенсивного светового излучения вполне корректно может быть описан в полуклассическом приближении на основе уравнений для матрицы плотности, в которых поле E представляется классическим [26]. Однако строго записать такие уравнения сложно даже для простейших сред типа газа атомов. Поэтому необходимо использовать разумные физические приближения, с одной стороны, существенно упрощающие систему материальных уравнений, а с другой, сохраняющие важнейшие для анализа рассматриваемой задачи особенности оптической среды. При изучении самовоздействия предельно коротких импульсов, т. е. импульсов с очень широким спектром, этим важнейшим требованием к материальным уравнениям является адекватный учет в них дисперсии как линейной, так и нелинейной восприимчивости диэлектрической среды практически во всем диапазоне ее прозрачности.

В работах [25, 27–30] на основе формализма матрицы плотности были выведены материальные уравнения, удовлетворяющие этому требованию. При рассмотрении линейного поляризационного отклика учитывался вклад как электронной, так и фононной подсистем диэлектрика. Это позволило описать нормальную и аномальную групповые дисперсии. При рассмотрении нелинейности отклика среды учитывались ее важнейшие в поле предельно коротких импульсов механизмы — электронный и электронно-колебательный. Каждый из этих механизмов был описан в приближении трехуровневой среды. Было доказано [31], что такое приближение — минимально необходимое для адекватного описания дисперсии нелинейного показателя преломления среды в диапазоне ее прозрачности. В работе [32] дана наглядная интерпретация полученных материальных уравнений в виде классической теории дисперсии высокоинтенсивного света. Суть ее заключается в том, что в классической теории дисперсии зависимость нелинейного показателя преломления оптической среды от частоты световой волны имеет тот же вид, что и в квантовой теории, если в модели Лоренца структурную единицу вещества рассматривать не как один, а как, по крайней мере, два параметрически связанных нелинейных осциллятора. Таким образом, было показано, что поляризационный отклик диэлектрической среды $P = P_e + P_i$ описывается системой материальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_e}{\partial t^2} + \frac{2}{T_e} \frac{\partial P_e}{\partial t} + \omega_e^2 P_e &= \alpha_e E + \beta(R_e + R_v)E, \\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial t^2} + \frac{2}{T_i} \frac{\partial P_i}{\partial t} + \omega_i^2 P_i &= \alpha_i E, \\ \frac{\partial^2 R_e}{\partial t^2} + \frac{2}{T_{e1}} \frac{\partial R_e}{\partial t} + \omega_{e1}^2 R_e &= \gamma_e (P_e + P_i)E, \\ \frac{\partial^2 R_v}{\partial t^2} + \frac{2}{T_v} \frac{\partial R_v}{\partial t} + \omega_v^2 R_v &= \gamma_v (P_e + P_i)E, \end{aligned} \quad (5)$$

где P_e и P_i — вклады в поляризацию соответственно электронной и ионной компонент; осцилляторы, описываемые динамическими переменными R_e и R_v , осуществляют нелинейно-параметрическую связь между электрическим полем импульса и средой

(при этом динамический параметр R_e ответствен за нелинейность электронной, а параметр R_v — за нелинейность электронно-колебательной (рамановской) природы; феноменологические параметры среды α_e, ω_e, T_e и α_i, ω_i, T_i характеризуют дисперсию линейного поляризационного отклика электронной и ионной (колебательной) природы, а коэффициенты $\beta, \gamma_e, \omega_{e1}, T_{e1}$ и γ_v, ω_v, T_v — дисперсию нелинейного поляризационного отклика соответственно электронной и электронно-колебательной природы). Система (5) адекватно описывает дисперсию как линейного, так и нелинейного показателей преломления диэлектрической среды практически во всем диапазоне ее прозрачности. Так, например, для кварцевых стекол при значениях $\omega_e = 2.096 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$, $\alpha_e = 3.862 \cdot 10^{31} \text{ с}^{-2}$, $\omega_i = 2.154 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$, $\alpha_i = 2.534 \cdot 10^{27} \text{ с}^{-2}$ дисперсия линейного показателя преломления в видимом и ближнем ИК диапазонах спектра описывается уравнениями (5) с точностью до четырех значащих цифр (рис. 1), а при $\omega_{e1} = 3.0 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$, $\omega_v = 8.3 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$, $\beta = 2.0 \cdot 10^{43} \text{ ед. СГСЭ}$, $\gamma_e = 2.9 \cdot 10^9 \text{ ед. СГСЭ}$, $\gamma_v = 8.0 \cdot 10^3 \text{ ед. СГСЭ}$ в хорошем согласии с известными экспериментальными результатами описывается и дисперсия малоинерционного коэффициента нелинейного показателя преломления n_2 (рис. 2). Рис. 2, разумеется, требует комментария. Кварцевое стекло — диэлектрический материал, для которого на сегодняшний день проведено наибольшее количество измерений малоинерционного n_2 , причем на разных длинах волн (см. обзор [25]). Однако, как видно из рисунка, экспериментальные результаты разных авторов (обозначены на рис. 2 квадратами) ввиду высокой сложности этого класса оптических измерений [25], существенно различаются. Поэтому их интерполяция теоретической зависимостью при приведенных выше параметрах достаточно условна, и при получении более достоверной экспериментальной информации параметры среды, определяющие n_2 в модели (5), могут быть уточнены.

Дополним систему (5) уравнением Максвелла

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (P_e + P_i), \quad (6)$$

где c — скорость света в вакууме.

Таким образом, задача о распространении оптического предельно короткого импульса с частотным спектром, попадающим в область прозрачности диэлектрической среды, сводится к исследованию замкнутой нелинейной системы материальных (5) и волнового (6) уравнений. Такая система, однако, сложна для анализа. Поэтому редуцируем ее, используя нерезонансное приближение, суть которого излагается ниже.

3. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕРЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКОГО ИМПУЛЬСА С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ

В диэлектриках собственные частоты среды, определяющие электронное и ионное поглощение, различаются обычно на порядки. В приведенном примере кварцевого стекла $\omega_e/\omega \sim 10^2$. Поэтому, если частота $\bar{\omega}$, соответствующая центру спектра предельно короткого импульса (понятие несущей частоты для столь коротких сигналов уже невозможно ввести) удовлетворяет условию

$$\omega_v^2, \omega_i^2 \ll \bar{\omega}^2 \ll \omega_e^2, \omega_{e1}^2, \quad (7)$$

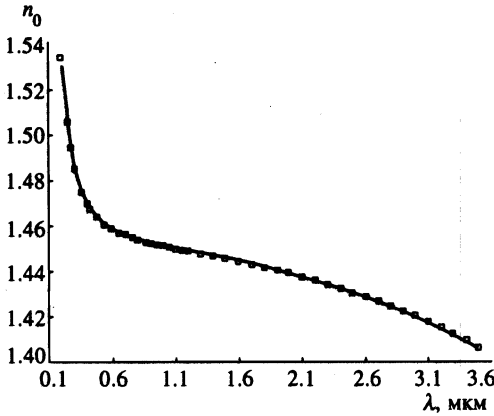


Рис. 1. Дисперсия линейного показателя преломления $n_0(\lambda)$ кварцевого стекла (λ — длина волны, точки — экспериментальные данные, сплошная кривая — дисперсия, рассчитанная по теоретической модели (5))

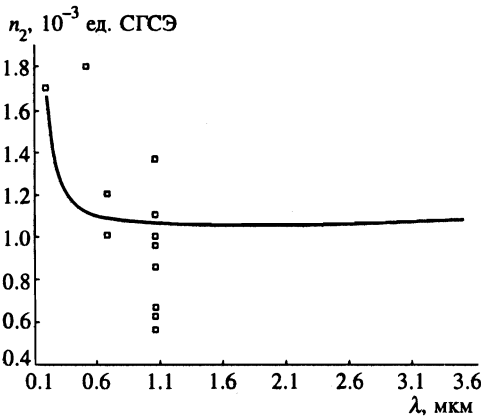


Рис. 2. Дисперсия коэффициента нелинейного показателя преломления $n_2(\lambda)$ кварцевого стекла (λ — длина волны, точки — экспериментальные данные, сплошная кривая — дисперсия, рассчитанная по теоретической модели (5))

то даже для импульсов с шириной спектра $\Delta\omega \sim \bar{\omega}$ взаимодействие излучения с веществом в приближении линейной оптики можно считать нерезонансным. Т.е. в работе не рассматривается ситуация однофотонного резонанса с сопутствующим в диэлектрике большим линейным поглощением, но учитывается возможность двухфотонных резонансов как электронной, так и рамановской природы. Причем последний случай реализуется в комбинационно-активном диэлектрике автоматически, так как широкий спектр предельно короткого импульса содержит бесконечный набор спектральных компонент, удовлетворяющих условиям ВКР-резонанса [28, 33]. Отметим, что условие (7) включает в себя оба неравенства, (3) и (4), активно использовавшиеся ранее.

Соотношение $\bar{\omega}^2 \gg \omega_i^2$ (см. (7)) подразумевает практическое отсутствие в спектре предельно короткого импульса низкочастотных компонент, т.е. накладывает на предельно короткий импульс условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E dt = 0. \tag{8}$$

Это означает, что вне рассмотрения настоящей статьи остается самовоздействие

полуволновых предельно коротких импульсов, т. е. решений в виде колоколообразных видеоимпульсов, обычно привлекающих наибольший интерес при изучении взаимодействий предельно коротких импульсов с веществом, когда собственные частоты среды перекрываются импульсным спектром [10, 11, 13, 14, 16, 18].

Проводя в первом уравнении системы (5) в соответствии с нерезонансным приближением (7) разложение по малому динамическому параметру $(\bar{\omega}/\omega_e)^2$, находим

$$P_e \simeq \frac{\alpha_e}{\omega_e^2} E - \frac{\alpha_e}{\omega_e^4} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\beta}{\omega_e^2} (R_e + R_v) E. \quad (9)$$

С учетом того что $(\bar{\omega}/\omega_i)^2 \gg 1$, из второго уравнения той же системы находим

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial t^2} \simeq \alpha_i E. \quad (10)$$

Сравнивая (9) и (10), получаем оценку

$$P_i/P_e \sim (\alpha_i/\alpha_e) (\bar{\omega}/\omega_e)^2.$$

Обычно $\alpha_i \ll \alpha_e$; учитывая также условия (7), находим $P_i \ll P_e$. Поэтому в двух последних уравнениях системы (5) можно положить $P_i = 0$. Тогда из этих уравнений, а также из (9) с учетом (7) имеем

$$P_e \approx \frac{\alpha_e}{\omega_e^2} E - \frac{\alpha_e}{\omega_e^4} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\beta \alpha_e \gamma_e}{\omega_e^4 \omega_{e1}^2} E^3 + \frac{\beta \alpha_e \gamma_v}{\omega_e^4} E \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} E^2 dt''. \quad (11)$$

Упрощенные материальные уравнения (10) и (11) по-прежнему, как и уравнения (5), содержат основные для оценки эволюции предельно коротких импульсов характеристики среды. Так, уравнение (10) учитывает вклад в аномальную групповую дисперсию ионных (решеточных) колебаний. В разложении (12) учтены нормальная групповая дисперсия, обусловленная электронной подсистемой диэлектрической среды, а также нелинейность поляризационного отклика как электронной, так и рамановской природы. Нелинейность последнего типа, как следует из (12), имеет инерционный характер. При разложении по малым динамическим параметрам в соотношениях (10) и (11) в первом приближении не учтено затухание ионного и электронного вкладов в поляризацию. Оно определяет поглощение излучения в среде, которое в случае нерезонансного взаимодействия (7) полагаем малым. Релаксацией рамановской природы также можно пренебречь, так как соответствующие характерные времена в диэлектриках значительно превышают длительность предельно короткого импульса. Например, для кварцевого стекла $T_v \simeq 70$ фс.

Подставляя далее (10) и (11) в (6) и используя приближение однонаправленного волнового распространения [7], получим замкнутое нелинейное уравнение для электрического поля импульса вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial z} - a \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + b \int_{-\infty}^{\tau} E \alpha \tau' + g E^2 \frac{\partial E}{\partial \tau} + \\ + q \frac{\partial}{\partial \tau} \left(E \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \int_{-\infty}^{\tau'} E^2 d\tau'' \right) = \frac{c}{2n_0} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\tau} E d\tau'. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь z — направление, вдоль которого распространяется импульс, Δ_{\perp} — поперечный лапласиан, $\tau = t - n_0 z/c$ — время в сопровождающей системе координат, коэффициенты a, b, g, q выражаются следующим образом через введенные ранее параметры среды:

$$\begin{aligned} a &= \frac{n_0^2 - 1}{2cn_0\omega_e^2}, & b &= \frac{2\pi\alpha_i}{cn_0}, \\ g &= \frac{3n_2}{c}, & q &= \frac{\gamma_v}{\gamma_e}\omega_{e1}^2\frac{n_2}{c}. \end{aligned} \quad (13)$$

В (13) линейный низкочастотный показатель преломления

$$n_0 = \sqrt{1 + 4\pi\alpha_e/\omega_e^2} \quad (14)$$

и коэффициент нелинейного низкочастотного показателя преломления электронной природы

$$n_2 = \frac{2\pi\beta\alpha_e\gamma_e}{n_0\omega_e^4\omega_{e1}^2} \quad (15)$$

определяют общий показатель преломления, соответствующий подсистеме электронных переходов:

$$n = n_0 + n_2 E^2. \quad (16)$$

В укороченном волновом уравнении (12) слагаемое в правой части описывает дифракцию предельно короткого импульса, второе и третье слагаемые в левой части — дисперсию линейного поляризационного отклика электронной и колебательной природы, четвертое и пятое — нелинейность отклика среды электронной и рамановской природы соответственно.

При выводе волновых уравнений (12) диэлектрическая среда предполагалась однородной. Однако, рассматривая в материальных уравнениях (5) коэффициенты α_e и α_i , а следовательно, и параметры a, b, g и q в (12) зависящими от поперечной координаты, можно анализировать и самовоздействие предельно коротких импульсов в неоднородных, например, волноведущих (волоконных) средах.

4. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Уравнение (12) позволяет сравнить влияние нелинейностей электронной и электронно-колебательной природы на эволюцию светового сигнала в среде. Полагая

$$\partial E/\partial\tau \sim \bar{\omega}E \text{ и } \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \int_{-\infty}^{\tau'} E^2 d\tau'' \sim E^2\tau_p^2,$$

для отношения нелинейных слагаемых в (12) получаем

$$\frac{q \frac{\partial}{\partial\tau} \left(E \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \int_{-\infty}^{\tau'} E^2 d\tau'' \right)}{gE^2 \frac{\partial E}{\partial\tau}} \sim \frac{\gamma_v}{3\gamma_e} (\omega_{e1}\tau_p)^2. \quad (17)$$

Для кварцевого стекла отношение (17) равно единице при $\tau_p = 35$ фс, а для импульсов длительностью $\tau_p = 10$ фс оно равняется уже 0.08. Таким образом, из (17) следует, что с уменьшением длительности предельно короткого импульса относительное влияние электронно-колебательной нелинейности среды на характер самовоздействия импульса квадратично уменьшается. Причем для предельно короткого импульса с $\tau_p \lesssim 10$ фс данной нелинейностью в первом приближении можно пренебречь. Этот вывод, справедливый для кварцевых стекол и других сред с умеренной комбинационной активностью, хорошо коррелирует и с оценкой инерционности вклада в n_2 для диэлектриков с электронно-колебательным механизмом нелинейности [25]. Поэтому ниже мы будем анализировать волновое уравнение вида

$$\frac{\partial E}{\partial z} - a \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + b \int_{-\infty}^{\tau} E d\tau' + g E^2 \frac{\partial E}{\partial \tau} = 0, \quad (18)$$

т. е. учитывать только электронную нелинейность среды, а также, как видно из (12), ограничимся случаем одномерного распространения импульса, рассматривая среду и волну поперечно однородными. Для сред с сильной комбинационной активностью слабое, описывающее электронно-колебательную нелинейность, в волновом уравнении следует оставить. В этом случае полезны также результаты работ [33–35], в которых проанализировано самовоздействие предельно коротких импульсов в модельных средах с чисто рамановской нелинейностью, т. е. пренебрежено всеми остальными рассмотренными в настоящей работе эффектами, являющимися обычно, как показано выше, основными для предельно коротких импульсов в диэлектриках.

Важно отметить, что нелинейное волновое уравнение (18), описывающее динамику поля предельно короткого импульса в предельном случае «длинных» (длительностью более десяти периодов колебаний) импульсов переходит в кубическое модифицированное с учетом высоких порядков теории дисперсии нелинейное уравнение Шредингера (1), характеризующее изменение огибающей импульса. Это несложно сделать, подставив в (18) поле в виде (2) и проведя дифференцирование обычным [7] для медленной огибающей образом, а интегрирование — многократным взятием интеграла по частям:

$$\int_{-\infty}^{\tau} E d\tau' = \frac{1}{2} \left(-i \frac{\varepsilon}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{i}{\omega^3} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\omega^4} \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \tau^3} + \dots \right) e^{i(\omega\tau - kz)} + \text{с.с.}$$

Соотношения между коэффициентами модифицированного нелинейного уравнения Шредингера (1) и волнового уравнения (18) имеют вид

$$\alpha_1 = -\frac{3a}{\omega^3}(\omega_c^4 - \omega^4), \quad \alpha_2 = -a(1 + 3\omega_c^4/\omega^4), \quad \beta_0 = -g\omega/4, \quad (19)$$

$$\beta_1 = g/4, \quad \omega_c^4 = b/3a, \quad T = \tau - 3a\omega^2 [1 + (\omega_c/\omega)^4] z.$$

Таким образом, уравнение (18) содержит в себе как частный случай уравнение (1), являясь обобщением последнего, когда приближение медленно меняющейся огибающей несправедливо.

Как и для квазимонохроматического волнового пакета (2) самовоздействие предельно коротких импульсов в диэлектрической среде существенно различается в зависимости от того, лежит ли основная часть его спектра в области нормальной или аномальной групповой дисперсии.

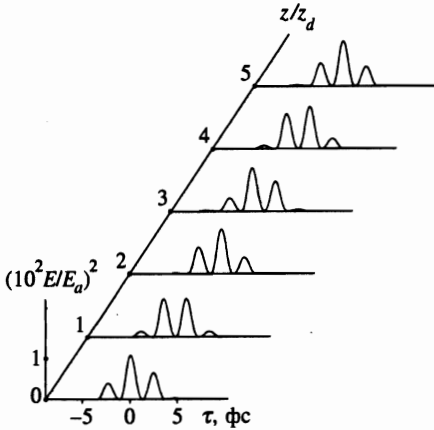


Рис. 3. Динамика предельно короткого импульса в диэлектрике. Поле E нормировано на внутриатомное поле $E_a = e/a_B^2$ (e — заряд электрона, a_B — боровский радиус), а координата z — на длину дисперсионного расплывания $z_d = \tau_p^2/2|\alpha_1|$ [8]

В первом случае дисперсия определяется в основном линейным поляризационным откликом электронной природы, т.е. вторым слагаемым в (18). А если линейным решеточным откликом, т.е. третьим слагаемым в волновом уравнении (18), можно пренебречь, то (18) принимает вид модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза

$$\frac{\partial E}{\partial z} - a \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + gE^2 \frac{\partial E}{\partial \tau} = 0. \tag{20}$$

При этом существенно, что коэффициенты a и g в (20) положительны. Поэтому самовоздействие предельно коротких импульсов в диэлектриках для анализируемого случая заключается в их временной дефокусировке, добавляющейся к линейному дисперсионному расплыванию импульсов. Длительность импульса увеличивается за счет генерации в среде новых световых колебаний [36]. Решений в виде уединенных волн (солитонов и бризеров) уравнение (20) не имеет.

В случае аномальной групповой дисперсии в уравнении (18) третьим слагаемым пренебрегать нельзя, поскольку именно оно определяет аномальную групповую дисперсию. Характер эволюции предельно короткого импульса качественно меняется.

На рис. 3 представлены результаты численного расчета нелинейного распространения предельно короткого импульса, спектр которого принадлежит области аномальной дисперсии групповой скорости [37]. Параметры уравнения (18) соответствовали кварцевому стеклу. Из рисунка видно, что длительность сформировавшегося предельно короткого импульса при распространении его в среде не изменяется, а динамика заключается в периодической эволюции внутренней структуры импульса. Этот результат коррелирует с данными работы [38], в которой численный расчет нередуцированной системы (5)–(6) также демонстрирует возможность формирования в диэлектрике предельно короткого импульса солитоноподобного (бризероподобного) типа.

Нахождение аналитических солитоноподобных решений уравнения (18) затруднительно. Это связано с тем, что нелинейное волновое уравнение (18) при $b = 0$, как было отмечено выше, не имеет солитонных решений. Поэтому при $b \neq 0$ к нему нельзя применить обычную солитонную теорию возмущений [39], в которой рассматриваются медленные вариации параметров «затравочных» решений интегрируемых уравнений. Таким образом, наличие интегрального слагаемого в (18) принципиально для существования солитоноподобных решений, и отмеченное слагаемое не может рассматриваться

как малое возмущение. Несмотря на эти трудности, количественные соотношения между параметрами бризера можно найти с помощью метода аналитического продолжения дисперсионных параметров на комплексную плоскость [40–43]. Подробное обоснование данного метода в применении к двухпараметрическим решениям дано в [43]. Суть его состоит в следующем. Пусть имеется дисперсионное соотношение $f(\omega, k) = 0$ линейаризованного уравнения, нелинейный вариант которого допускает решение в виде уединенных волн. Совершая аналитические продолжения вида

$$\omega \rightarrow \omega + i\gamma, \quad k \rightarrow k + ik$$

и подставляя затем эти замены в исходное соотношение $f(\omega, k) = 0$, после отделения действительной и мнимой частей находим два уравнения, связывающие четыре параметра. Таким образом, получаем два свободных параметра, в качестве которых можно взять, например, частоту заполнения ω и длительность $\tau_p = 2/\gamma$ импульса. Множитель 2 в последнем соотношении возник из-за того, что поле солитоноподобного импульса экспоненциально локализовано по обе стороны от его «центра масс». При этом групповая скорость импульса $v_g = \gamma/k$, а фазовая скорость осцилляций, заполняющих данный импульс, $v_{ph} = \omega/k$. Солитоноподобный импульс уравнения (18) имеет две степени свободы: внешнюю, соответствующую за его поступательное движение как единого целого, и внутреннюю, соответствующую пульсациям профиля бризера в сопутствующей системе координат. Поэтому есть основания полагать, что солитоноподобное решение уравнения (18) является двухпараметрическим.

Линеаризуя уравнение (18), находим для него дисперсионное соотношение вида

$$k = a\omega^3 - b/\omega. \quad (21)$$

Отсюда следует, что условие аномальности групповой дисперсии, когда возможно образование оптических солитонов при $n_2 > 0$,

$$\partial^2 k / \partial \omega^2 < 0 \quad (22)$$

может быть переписано в виде

$$\omega < \omega_c, \quad (23)$$

где критическая частота

$$\omega_c = \left(\frac{b}{3a} \right)^{1/4} = \left(\frac{\alpha_i}{3\alpha_e} \right)^{1/4} \omega_e. \quad (24)$$

Условие (23) справедливо для импульсов огибающей, имеющих узкую спектральную компоненту на частоте ω . Спектральная же ширина импульса, содержащего всего несколько периодов световых колебаний, существенно зависит от его длительности. Обобщим данное условие на случай предельно коротких импульсов.

Применяя к (21) предложенную выше процедуру аналитического продолжения дисперсионных параметров на комплексную плоскость, получим

$$k(\omega, \gamma^2) = a\omega^3 - 3a\omega\gamma^2 - b \frac{\omega}{\omega^2 + \gamma^2}, \quad (25)$$

$$\frac{1}{v_{ph}} = a\omega^2 - 3a\gamma^2 - \frac{b}{\omega^2 + \gamma^2}, \quad (26)$$

$$\frac{1}{v_g} - \frac{1}{v_{ph}} = 2 \left[a(\omega^2 + \gamma^2) + \frac{b}{\omega^2 + \gamma^2} \right]. \quad (27)$$

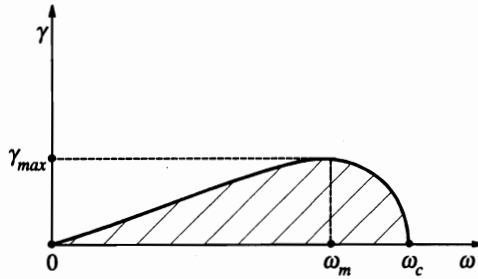


Рис. 4. Область возможных значений параметров импульса $\omega \equiv 2\pi/T_p$ и $\gamma \equiv 2/\tau_p$ уравнения (18) (заштрихована). Верхняя граница данной области описывается кривой (29). Значение $\gamma_{max} = 0.18\omega_c$ соответствует минимальной длительности $\tau_p^{min} = 11.1\omega_c^{-1}$ импульса, способного сформироваться в диэлектрике. Отношение длительности τ_p^{min} данного импульса к периоду заполняющих его оптических колебаний T_p равно 1.33 для любого твердого диэлектрика в области его прозрачности. Критическая частота ω_c определяется конкретными параметрами диэлектрика

Как и следовало ожидать, при $b = 0$ и $a < 0$ выражение (27) совпадает с соответствующим для бризера МКдВ [39], что является важным аргументом в пользу предложенного метода. Согласно (8), для решения (18) в виде уединенного импульса параметр ω всегда отличен от нуля. Поэтому данное решение не может быть однопараметрическим. Так как $a, b > 0$, то $v_g \neq v_{ph}$ (см. (27)). Следовательно, уравнение (18) не имеет решений в виде бегущих импульсов стационарного профиля.

Определим теперь область возможных значений параметров ω и $\gamma = 2/\tau_p$ солитоноподобного решения уравнения (18). Уширение спектра предельно короткого импульса соответствует вовлечению в динамику все большего числа его частотных компонент. Для формирования солитоноподобного импульса важно, чтобы эти компоненты лежали в области аномальной групповой дисперсии. Отмеченное уширение спектра предельно короткого импульса учтено в соотношении (25). Отсюда приходим к следующему обобщению условия (22) на случай предельно короткого импульса:

$$\frac{\partial^2 k(\omega, \gamma^2)}{\partial \omega^2} < 0. \tag{28}$$

Подставляя сюда (25), находим уравнение кривой на плоскости (ω, γ) , заключающей внутри себя значения ω и γ солитоноподобных импульсов:

$$(W^2 + G^2)^3 = W^2 - 3G^2, \tag{29}$$

где $W \equiv \omega/\omega_c > 0$, $G \equiv \gamma/\omega_c > 0$.

Область возможных значений ω и γ солитоноподобного импульса представлена заштрихованным участком на рис. 4. Верхняя граница данного участка определяется кривой (29). Из последнего уравнения легко видеть, что в области низких частот данная кривая имеет вид прямой: $\gamma \approx \omega/\sqrt{3}$. Отсюда, в частности, следует, что при $\omega \rightarrow 0$ длительность импульса $\tau_p = 2/\gamma \rightarrow \infty$. Это обстоятельство согласуется со сделанным выше выводом о том, что центральная частота спектра предельно короткого импульса не может быть равна нулю (см. условие (8)). Вблизи же критической частоты $\gamma \approx \sqrt{(\omega_c^2 - \omega^2)}/3$.

Численное исследование трансцендентного уравнения (29) приводит к тому, что (см. рис. 4)

$$\gamma_{max} = 0.18\omega_c, \quad \omega_m = 0.76\omega_c. \quad (30)$$

Следует особо подчеркнуть, что соотношения (30) являются универсальными для твердых изотропных диэлектриков и не зависят от их конкретной структуры, «зашифрованной» в параметре ω_c . Величина γ_{max} соответствует минимальному значению длительности импульса τ_p^{min} , который может формироваться в твердом диэлектрике. Знание величины τ_p^{min} важно с точки зрения определения максимальной скорости передачи информации в диэлектрических световодах. Период же световых колебаний, заполняющих данный бризер, можно определить как $T_p = 2\pi/\omega$. Тогда для импульса минимальной длительности отношение $\tau_p^{min}/T_p = \omega_m/\pi\gamma_{max} \approx 1.33$. Таким образом, полученный здесь результат соответствует данным наших численных экспериментов с (18), заключающимся в том, что предельно короткий бегущий импульс вмещает внутри себя примерно полтора периода световых колебаний. Используя (30), приведем численные оценки минимальной длительности импульса и соответствующей частоты его заполнения для кварцевого стекла. Из (24) и приведенных выше численных значений параметров кварцевого стекла следует, что для данного диэлектрика $\omega_c = 0.07\omega_e = 1.47 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Тогда минимальная длительность импульса $\tau_p^{min} = 7 \text{ фс}$, при этом его частота $\omega_m = 1.06 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Последней частоте соответствует длина волны $\lambda_m = 2\pi c/\omega_m = 1.8 \text{ мкм}$, лежащая в области аномальной групповой дисперсии. Оценим теперь частоту пульсаций Ω профиля электрического поля бегущего импульса в сопутствующей системе координат. Данную оценку можно провести по формуле [22]

$$\Omega \approx (c\omega/n_0) (1/v_g - 1/v_{ph}).$$

Используя далее (27), (13), а также (30), найдем для экстремально короткого импульса, соответствующего (30):

$$\Omega \approx 4.2 \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2} \left(\frac{\omega_c}{\omega_e} \right)^2 \omega_c.$$

Выше было найдено, что для кварцевого стекла $\omega_c = 0.07\omega_e = 1.47 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Подставляя сюда также $n_0 = 1.45$ [25], получим $\Omega \approx 1.5 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$, что значительно меньше соответствующей частоты заполнения импульса $\omega = 1.06 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ (см. выше). Таким образом, деформация профиля электрического поля импульса в сопутствующей системе координат изменяется достаточно медленно, так что параметр Ω/ω можно считать малым.

Проведем оценку интенсивности предельно короткого солитоноподобного импульса. Солитон есть результат взаимной компенсации нелинейности и дисперсии. Приравнивая друг другу соответствующие члены в (18), получаем для амплитуды электрического поля E_m импульса:

$$E_m \sim \frac{1}{\tau_p} \sqrt{\frac{a}{g} \left(\frac{\omega_c^4}{\omega^4} - 1 \right)}.$$

Тогда оценка его интенсивности с учетом (30) и (13) имеет вид

$$I \sim \frac{c}{n_2} (\omega_e \tau_p)^{-2}.$$

Подставляя сюда характерные значения $n_2 \sim 10^{13}$ ед. СГСЭ и $\omega_e = 2.1 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ [25] для кварцевого стекла, а также $\tau_p = 7$ фс (см. выше), найдем $I \sim 10^{13} \text{ Вт/см}^2$.

В заключение настоящего раздела отметим, что нелинейное волновое уравнение (18) может быть записано в виде вариационного принципа:

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} d\tau = 0, \quad (31)$$

где «лагранжиан»

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{a}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} \right)^2 - \frac{b}{2} \Phi^2 + \frac{g}{12} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right)^4, \quad (32)$$

а электрическое поле импульса $E = \partial \Phi / \partial \tau$.

Наличие вариационного принципа для (18) позволяет исследовать процесс формирования и распространения предельно короткого импульса при помощи приближенного метода «усредненного лагранжиана» Ритца–Уизема [44]. Необходимым условием применения данного метода является наличие медленной динамической переменной. В качестве таковой, как было показано выше, может быть выбрана частота пульсации Ω бризера в сопутствующей системе координат, так как $\Omega \ll \omega, \tau_p^{-1}$. Соответствующие исследования предполагается нами провести отдельно.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выведено нелинейное волновое уравнение (12), описывающее распространение предельно короткого импульса в диэлектриках для случая, когда спектр импульса лежит в диапазоне прозрачности материала. Учтены как дифракция и дисперсия, так и нелинейность поляризационного отклика среды. Обсуждены свойства решений этого уравнения в виде поперечно однородных волн, распространяющихся в однородных диэлектриках. Показано, что данные свойства качественно различаются в зависимости от того, лежит спектр предельно короткого импульса в области нормальной или аномальной дисперсии среды. В первом случае импульс испытывает линейную и нелинейную временные дефокусировки, во втором — может распространяться в виде солитонов. Приведены результаты численного и аналитического исследований свойств предельно коротких оптических солитонов. При этом особый интерес представляет определение области параметров ω и τ_p^{-1} солитона, которая не зависит от конкретной структуры диэлектрика. Получены также соотношения (30), определяющие минимально возможную длительность оптического солитона в диэлектрике и соответствующую данной длительности частоту заполнения через критическую частоту ω_c . Эти соотношения справедливы для любого изотропного твердого диэлектрика и в этом смысле универсальны, как и вывод о том, что импульс минимальной длительности содержит примерно полтора периода оптических колебаний. Показано также, что уравнение (18) не имеет решений в виде уединенных стационарных видеосолитонов, которые, следовательно, не могут формироваться в изотропном диэлектрике.

Однако многие вопросы нерезонансной нелинейной оптики предельно коротких импульсов по-прежнему остаются не проясненными. Отметим среди них следующие.

1. Даже для предельно короткого импульса с однородным плоским фронтом приведен лишь общий анализ решений волнового уравнения. Не обсуждено самовоздействие предельно короткого импульса, спектр которого одновременно принадлежит частично как области нормальной, так и аномальной групповой дисперсии. Не исследован характер эволюции предельно короткого импульса в зависимости от длительности и энергии импульса. Не проанализировано взаимодействие предельно коротких импульсов друг с другом.

2. Еще предстоит теоретически обсудить нелинейную эволюцию предельно короткого импульса в диэлектрических средах с учетом дифракции реальных поперечно ограниченных сигналов, причем как в однородных, так и неоднородных (включая волоконные) средах.

3. Построенная модель распространения предельно короткого импульса в диэлектрике справедлива только для линейно поляризованного излучения. Самовоздействие эллиптически поляризованных предельно коротких импульсов будет качественно отличаться, так как они в нелинейной среде индуцируют не только неоднородность показателя преломления, но и анизотропию среды [25].

4. Представленный в работе анализ по сути справедлив только для изотропных диэлектриков, в которых наименьшей является кубическая нелинейность. В диэлектрических кристаллах с отсутствием центра инверсии важную роль играет и квадратичная нелинейность.

5. Диэлектрические среды в поле предельно короткого импульса характеризуются высокой оптической прочностью. Предельные значения интенсивности, при которой еще не происходит пробоя прозрачных стекол и кристаллов, по оценкам [8] могут достигать 10^{15} Вт/см². В этих условиях важную роль, возможно, будут играть нелинейности более высоких порядков, в том числе другой природы, нежели рассмотренные в настоящей работе.

6. Представляет немалый интерес исследование математических свойств нелинейного волнового уравнения (18), обусловленный тем, что для существования солитоноподобных решений принципиально наличие интегрального слагаемого. Последнее по этой причине не может рассматриваться как малая добавка к МКдВ. Следовательно, здесь неприменима стандартная теория возмущений для солитонов. В этом случае может оказаться полезным использование вариационного принципа (31), (32).

Ответ на эти и ряд других вопросов в дополнение к результатам настоящей работы и статей, на которые мы ссылаемся, позволит заложить теоретические основы нелинейной оптики предельно коротких импульсов для случая нерезонансного взаимодействия света с веществом. Причем еще раз отметим, что термин «нерезонансное взаимодействие» здесь, как и выше в работе, мы применяем только в смысле приближения линейной оптики, полагая линейное поглощение света в диэлектриках малым из-за принадлежности спектра предельно короткого импульса диапазону прозрачности среды.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-02-19140а и № 96-02-16228а), Государственного комитета по высшему образованию (грант № 95-0-5.5-79), а также европейской ассоциации INTAS в рамках программы «Международного центра фундаментальной физики в Москве» (грант № 93-2492).

Литература

1. D. N. Auston, K. P. Cheung, J. A. Vaidmanis, and D. A. Kleinman, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1555 (1984).
2. J. A. Vaidmanis, R. L. Fork, and J. P. Gordon, *Optics Lett.* **10**, 131 (1985).
3. R. L. Fork, C. H. Brito-Cruz, P. C. Becker, and C. V. Shank, *Optics Lett.* **12**, 483 (1987).
4. P. C. Becker, H. L. Fragnito, J. Y. Bigot et al., *Phys. Rev. Lett.* **63**, 505 (1989).
5. J. T. Darrow, B. D. Hu, X. C. Zhang, and D. N. Auston, *Optics Lett.* **15**, 323 (1990).
6. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, Наука, Москва (1967).
7. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1979).
8. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988).
9. A. Kujawski, *Z. Phys. B: Condens. Matter* **66**, 271 (1987).
10. Э. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин и др., *Письма в ЖЭТФ* **47**, 442 (1988).
11. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, *Письма в ЖЭТФ* **51**, 252 (1990).
12. А. И. Маймистов, С. О. Елютин, *Опт. и спектр.* **70**, 101 (1991).
13. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ушаповский, *ЖЭТФ* **100**, 762 (1991).
14. С. В. Сазонов, *Письма в ЖЭТФ* **53**, 400 (1991).
15. A. Kujawski, *Z. Phys. B: Condens. Matter* **85**, 129 (1991).
16. S. V. Sazonov, *Laser Physics* **2**, 795 (1992).
17. А. В. Ведерко, О. Б. Дубровская, В. Ф. Марченко, А. П. Сухоруков, *Вестник МГУ, сер. 3: физ. астр.* **33**, 4 (1992).
18. S. V. Sazonov and E. V. Trifonov, *J. Phys. B* **27**, L7 (1994).
19. S. V. Sazonov and L. S. Yakupova, *J. Phys. B* **27**, 369 (1994).
20. А. И. Маймистов, *Опт. и спектр.* **76**, 636 (1994).
21. А. И. Маймистов, *Опт. и спектр.* **78**, 483 (1995).
22. С. В. Сазонов, *ФТТ* **37**, 1612 (1995).
23. А. В. Андреев, *ЖЭТФ* **108**, 796 (1995).
24. С. В. Сазонов, *Опт. и спектр.* **79**, 282 (1995).
25. А. Н. Азаренков, Г. Б. Альтшулер, Н. Р. Белашенков, С. А. Козлов, *КЭ* **20**, 733 (1993).
26. Д. Н. Клышко, *Физические основы квантовой электроники*, Наука, Москва (1986).
27. А. Н. Азаренков, Г. Б. Альтшулер, С. А. Козлов, *Опт. и спектр.* **71**, 334 (1991).
28. А. N. Azarenkov, G. B. Altshuler, and S. A. Kozlov, *Proc. SPIE* **1841**, 2 (1991).
29. А. N. Azarenkov, G. B. Altshuler, and S. A. Kozlov, *Studies in Math. Phys.* **3**, 429 (1992).
30. А. N. Azarenkov, G. B. Altshuler, S. A. Kozlov et al., *Proc. SPIE* **1983**, 879 (1993).
31. N. Bloembergen, H. Lotem, and R. T. Lynch, *Indian J. Pure and Appl. Phys.* **16**, 151 (1978).
32. С. А. Козлов, *Опт. и спектр.* **79**, 290 (1995).
33. Э. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин, И. П. Прокопович, *ЖЭТФ* **105**, 28 (1994).
34. Э. М. Беленов, В. А. Исаков, А. П. Канавин, И. В. Сметанин, *Письма в ЖЭТФ* **60**, 762 (1994).
35. Э. М. Беленов, В. А. Исаков, А. П. Канавин, И. В. Сметанин, *КЭ* **22**, 193 (1995).
36. В. И. Карпман, *Нелинейные волны в диспергирующих средах*, Наука, Москва (1973).
37. S. A. Kozlov and S. V. Sazonov, *Tech. Digest 15th Int. Conf. Coh. Nonlinear Opt. St. Petersburg*, (1995), Vol. 1, 370 (1995).
38. А. N. Azarenkov, S. A. Kozlov, P. V. Kuznetsov, and G. A. Martsinovsky, *Proc. SPIE* **1983**, 865 (1993).
39. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наук. Думка, Киев (1989).
40. E. Schlömann, *Appl. Phys. Lett.* **19**, 274 (1971).
41. В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов, А. Л. Сукстанский, *Письма в ЖЭТФ* **27**, 226 (1978).
42. С. В. Сазонов, *Изв. АН Сер. физ.* **58**, 129 (1994).
43. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **107**, 20 (1995).
44. D. Anderson, *Phys. Rev. A* **27**, 3135 (1983).