

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СПИНОВЫХ ВОЛН В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ С ПОМОЩЬЮ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРОДОЛЬНОЙ НАКАЧКИ

Ю. В. Гуляев, П. Е. Зильберман, А. В. Луговской

*Институт радиотехники и электроники Российской академии наук
141120, Фрязино, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 31 мая 1996 г.

Выведены уравнения движения для медленно меняющихся комплексных амплитуд спиновых волн, параметрически возбуждаемых в пространственно-локализованном продольном магнитном поле накачки. Получено решение выведенных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным и граничным условиям. Показано, что начиная с некоторого определенного уровня накачки, который можно назвать порогом регенерации, диссипативные потери спиновых волн уменьшаются по мере увеличения уровня накачки. Потери обращаются в нуль и меняют знак на пороге неустойчивости. Оба указанных порога сильно зависят от линейных размеров области локализации накачки L — увеличиваются при уменьшении L . Существование регенерации приводит к тому, что длина диссипации спиновых волн неограниченно возрастает по мере приближения к порогу неустойчивости. Вследствие этого вносимые границами возмущения однородного состояния проникают ко всем внутренним точкам зоны, как бы велика ни была длина L . В результате вся картина параметрической неустойчивости сильно зависит от границ зоны: 1) пространственное распределение амплитуд волн становится неоднородным везде внутри зоны; 2) скорость нарастания амплитуд при неустойчивости уменьшается в любой точке зоны, после того как возмущения, вносимые границами, при своем распространении достигают этой точки; 3) порог неустойчивости не зависит от величины отстройки частоты спиновых волн от частоты параметрического резонанса. Рассчитанная зависимость минимального порога неустойчивости от магнитного поля смещения (кривая «бабочка») меняет свой вид при изменении L , что согласуется с известными экспериментальными результатами.

1. ВВЕДЕНИЕ

Явление параметрической неустойчивости спиновых волн, открытое и первоначально исследованное в ферромагнетиках в 50-х и 60-х годах [1–8], остается объектом исследований и в наши дни. В сравнительно недавнем обзоре [9] отмечалось, что можно выделить два этапа развития этих исследований. На первом этапе при теоретическом описании явления во внимание не принимались границы образца или области действия накачки (см., например, [4, 8]). Это допущение основывалось, по-видимому, на том, казалось бы, очевидном соображении, что во внутренних областях достаточно протяженной и однородной по своим свойствам системы амплитуды параметрически возбуждаемых волн не должны зависеть от пространственных координат. О таком подходе далее мы будем говорить как об однородной модели. Теоретические результаты, полученные в рамках однородной модели, находились в хорошем соответствии с экспериментами того времени.

Второй этап исследований, согласно [9], был стимулирован развитием технологии и появлением высококачественных сферических образцов железо-иттриевого граната

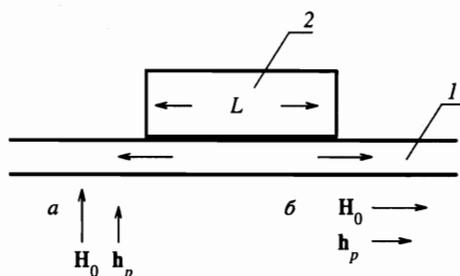


Рис. 1. Типичная экспериментальная ситуация при возбуждении бегущих спиновых волн с помощью локализованной в пространстве накачки: 1 — пленка ЖИГ; 2 — локализованный возбудитель спиновых волн; L — примерный размер зоны локализации накачки. Стрелки внутри пленки 1 показывают направления распространения возбужденных спиновых волн. В нижней части рисунка показаны два типа ориентации магнитного поля смещения H_0 и продольного поля магнитной накачки h_p относительно зоны, в которой локализована накачка; *a* — поперечно-локализованная накачка; *б* — продольно-локализованная накачка

(ЖИГ). В работе [10] впервые наблюдалась тонкая структура спектра дополнительного поглощения, вызванная влиянием границ сферического образца — отражениями от этих границ параметрически возбуждаемых спиновых волн и установлением в образце стоячих волн. Влияние границ на спектр параметрического поглощения наблюдалось и в экспериментах с антиферромагнетиками [11]. Аналогичный эффект в ферритовых пленках был исследован экспериментально и теоретически в ряде последующих работ [12–14].

Если вслед за работой [9] продолжить классификацию исследований по параметрической неустойчивости и учесть при этом работы последнего времени, то можно отметить начало нового (третьего) этапа. Этот последний этап вызван успехами выращивания монокристаллических пленок ЖИГ методом жидкофазной эпитаксии. Благодаря этим успехам, с 70-х годов объектом экспериментальных исследований стали бегущие спиновые волны, искусственно возбуждаемые в пленках ЖИГ с помощью прикладываемых к пленке локальных возбудителей — проводников с СВЧ током, диэлектрических резонаторов и др. Типичная экспериментальная ситуация показана на рис. 1. Ее отличительные особенности таковы: 1) возбуждающие спиновые волны магнитное СВЧ поле локализовано вблизи возбудителя в пространственной области с линейным размером порядка L и 2) возбуждаемые спиновые волны могут при своем распространении покидать эту область локализации. При достаточно большой амплитуде возбуждающего магнитного поля в области его локализации может возникнуть параметрическая неустойчивость. Таким образом, мы сталкиваемся с новой ситуацией, когда размер образца по некоторому направлению может быть сколь угодно большим, но размер области

локализации накачки по тому же направлению ограничен¹⁾.

Экспериментально параметрическая неустойчивость в такой новой ситуации была исследована в работах [19, 20], в которых были применены несколько различающиеся способы создания локализованной накачки и регистрации параметрической неустойчивости. Однако основные выводы этих работ совпали — порог неустойчивости зависит от размера L области локализации накачки, причем, как правило, возрастает по мере уменьшения L . Этот эффект был объяснен в работах [19, 20] на основе теории, развитой ранее в [21]. Согласно этой теории, порог неустойчивости возрастает потому, что при своем распространении волна может выносить энергию из зоны действия накачки.

Однако многие принципиальные вопросы теории оставались до сих пор необсужденными, например: 1) как зависят от координат и времени амплитуды параметрически возбуждаемых спиновых волн; 2) как ведут себя эти амплитуды в пределе $L \rightarrow \infty$; 3) как зависит порог неустойчивости от величины отстройки частот спиновых волн от частоты параметрического резонанса $\omega_p/2$; 4) как выглядит при конечных значениях L зависимость минимального порога неустойчивости от поля смещения (кривая «бабочка»). Задача данной работы — получить ответы на указанные вопросы.

Кроме того, существует одна весьма общая проблема, которую мы хотели бы здесь обсудить. Впервые эта проблема была поставлена в теории параметрической неустойчивости волн в плазме (см., например, [22]), однако разъяснения ее не было дано. Дело в том, что, как следует из теории [22], порог параметрической неустойчивости не просто зависит от L , но при $L \rightarrow \infty$ может не стремиться к своему значению в однородной модели. Какова физическая причина этого? Мы постараемся показать в настоящей работе, что это явление представляет собой прямое следствие параметрической неустойчивости. Возмущения, вносимые границами, в неустойчивой системе не могут быть локализованы вблизи этих границ, но эффективно проникают ко всем точкам системы. По этой причине влияние границ должно сказываться на всей картине параметрической неустойчивости, сколь бы велика ни была длина L .

2. ИССЛЕДУЕМАЯ СИСТЕМА, ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ

В данной работе типичная экспериментальная ситуация (см. рис. 1) несколько схематизируется. Вместо протяженной ферритовой пленки мы рассмотрим безграничный во всех направлениях ферромагнетик. Следует ожидать, что такая модель будет наилучшим образом соответствовать эксперименту в тех случаях, когда граничные условия

¹⁾ В связи с этим нужно сделать следующее разъяснение. Проводник с СВЧ током, прижатый к поверхности пленки, в принципе, может излучать достаточно длинные дипольные или дипольно-обменные спиновые волны в линейном режиме на частоте тока ω_p . Эти волны распространяются в пленке вдоль ее поверхности и могут при этом уходить далеко за пределы ближней зоны возбудителя, а затем сами могут играть роль накачки, вызывая параметрическую неустойчивость на частотах, близких к $\omega_p/2$. Такие процессы исследовались экспериментально [15] и теоретически [16–18]. Однако в данной работе, говоря о параметрической неустойчивости в поле локализованной накачки, мы будем иметь в виду только неустойчивость в ближней зоне. Такая неустойчивость в ряде случаев остается единственно возможной, например, если магнитное поле накачки h_p параллельно статическому смещающему полю H_0 (продольная накачка) или если частота ω_p лежит значительно выше границ дипольного спектра пленки.

на поверхностях пленки обеспечивают либо полное поглощение падающих волн, либо их диффузное рассеяние.

Предположим, кроме того, что ферромагнетик находится в однородном насыщающем поле смещения \mathbf{H}_0 и в поле накачки $\mathbf{h}_p(\mathbf{r}, t)$, зависящем от времени t и радиус-вектора \mathbf{r} . Пусть накачка локализована в пределах слоя, границы которого перпендикулярны некоторому вектору \mathbf{L} («вектору локализации», имеющему $|\mathbf{L}| = L$).

Существенное значение имеет взаимная ориентация векторов \mathbf{H}_0 , \mathbf{h}_p и \mathbf{L} . В экспериментах [19, 20] были реализованы следующие две ориентации: 1) $\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{h}_p \perp \mathbf{L}$ и 2) $\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{h}_p \parallel \mathbf{L}$. Таким образом, накачка всегда была продольной, но локализация могла быть либо поперечной, либо продольной. Для определенности, в данной работе подробно рассмотрим случай поперечной локализации. Основные особенности продольной локализации обсудим в конце статьи.

Переходя к уравнениям движения, заметим, что, по существу, речь идет здесь об описании спин-волновой турбулентности в неоднородной среде. Общий вывод соответствующих уравнений движения, исходящий из гамильтониана системы, выполнен в [23, 24]. Согласно этим работам, если неоднородность достаточно плавная, а длины возбуждаемых волн короткие²⁾, то справедливы динамические уравнения для статистических средних амплитуд волн, которые можно получить также и из стандартных уравнений прецессии Ландау и Лифшица и уравнений магнитостатики. Поэтому последние уравнения могут быть и будут взяты нами как исходные для дальнейшего расчета.

Пренебрежем для простоты влиянием анизотропии ферромагнетика и представим векторы полного магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ и намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ в виде сумм:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}_p(\mathbf{r}, t) + \delta\mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}_0 + \delta\mathbf{M}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где статические значения $\mathbf{H}_0 = -H_0\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{M}_0 = -M_0\mathbf{e}_z$, причем $H_0 > 0$, $M_0 > 0$, \mathbf{e}_z — единичный вектор оси z , а $\delta\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ и $\delta\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ — переменные добавки, вызываемые действием накачки. Предполагая, что отклонения от равновесных значений достаточно малы и накачка мала, так что

$$|\delta\mathbf{H}|, |\delta\mathbf{M}| \ll |\mathbf{h}_p| \ll M_0, \quad (2)$$

запишем линеаризованную систему уравнений движения (прецессии и магнитостатики) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \delta\mathbf{M}}{\partial t} + [\mathbf{M}_0, \delta\mathbf{H}_{eff}] + [\delta\mathbf{M}, (\mathbf{H}_0 + \mathbf{h}_p)] &= 0, \\ \delta\mathbf{H}_{eff} &= \delta\mathbf{H} + A\Delta\delta\mathbf{M} - \frac{\omega_d}{(\gamma M_0)^2} \frac{\partial \delta\mathbf{M}}{\partial t}, \\ [\nabla, \delta\mathbf{H}] &= 0, \quad \nabla(\delta\mathbf{H} + 4\pi\delta\mathbf{M}) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\gamma > 0$ — гиромагнитное отношение, A — постоянная неоднородного обмена, а ω_d — частота релаксации [25]. Последняя также считается достаточно малой, а именно

$$\varepsilon_d \equiv \frac{\omega_d}{\gamma M_0} \ll 1. \quad (4)$$

²⁾ Формальное условие применимости совпадает с (7).

Поле накачки, меняющееся во времени с частотой ω_p , записывается в виде

$$\mathbf{h}_p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [h(\mathbf{r})e^{-i\omega_p t} + h^*(\mathbf{r})e^{i\omega_p t}] \mathbf{e}_z, \quad (5)$$

а решения системы (3) отыскиваются в виде бловских функций

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) &= e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \sum_{n=0}^{\infty} \delta \mathbf{M}_n(\mathbf{r}, t) e^{-in\omega_p t}, \\ \delta \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \sum_{n=0}^{\infty} \delta \mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t) e^{-in\omega_p t}, \end{aligned} \quad (6)$$

где частота ω и волновой вектор \mathbf{q} связаны дисперсионным соотношением для спиновых волн. Предполагается, что амплитуда накачки $h(\mathbf{r})$ может меняться в пространстве лишь достаточно медленно, так что

$$\varepsilon_L \equiv \frac{|\nabla h|}{q|h|} \ll 1. \quad (7)$$

Тогда вследствие малости (см. (2)) параметра взаимодействия с накачкой

$$\varepsilon_h \equiv \frac{|h|}{M_0} \ll 1 \quad (8)$$

комплексные амплитуды гармоник $\delta \mathbf{M}_n(\mathbf{r}, t)$ и $\delta \mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ также могут лишь медленно меняться с \mathbf{r} и t .

Без ограничения общности можно считать, что комплексная амплитуда накачки $h(y)$ зависит только от координаты y , а вектор \mathbf{q} лежит в плоскости yz , т. е. $\mathbf{q} = q_y \mathbf{e}_y + q_z \mathbf{e}_z$ и $q_y/q_z = \tan \theta$ (вектор локализации $\mathbf{L} \parallel \mathbf{e}_y$). Подставляя при этих предположениях выражения (5) и (6) в (3) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых экспонентах, получаем следующую систему уравнений для нахождения $\delta \mathbf{M}_n$ и $\delta \mathbf{H}_n$:

$$\begin{aligned} a_n \delta M_{nx} + b \delta M_{ny} - \delta H_{ny} &= \frac{1}{\gamma M_0} \frac{\partial \delta M_{nx}}{\partial t} + 2i A q_y \frac{\partial \delta M_{ny}}{\partial y} + i \varepsilon_n \delta M_{ny} + \\ &+ \frac{h(y)}{2M_0} \delta M_{n-1,y} + \frac{h^*(y)}{2M_0} \delta M_{n+1,y}, \\ b \delta M_{nx} - a_n \delta M_{ny} &= \frac{1}{\gamma M_0} \frac{\partial \delta M_{ny}}{\partial t} + 2i A q_y \frac{\partial \delta M_{nx}}{\partial y} + i \varepsilon_n \delta M_{nx} + \\ &+ \frac{h(y)}{2M_0} \delta M_{n-1,x} + \frac{h^*(y)}{2M_0} \delta M_{n+1,x}, \\ i q_y \delta H_{nz} - i q_z \delta H_{ny} &= \frac{\partial \delta H_{nz}}{\partial y}, \quad \delta M_{nz} = 0, \quad \delta H_{nx} = 0, \\ i q_y (\delta H_{ny} + 4\pi \delta M_{ny}) + i q_z \delta H_{nz} &= - \frac{\partial (\delta H_{ny} + 4\pi \delta M_{ny})}{\partial y}, \end{aligned} \quad (9)$$

где введены обозначения

$$a_n = \frac{i(\omega + n\omega_p)}{\gamma M_0}, \quad b = \frac{H_0}{M_0} + A q^2, \quad \varepsilon_{dn} = \frac{\omega_d(\omega + n\omega_d)}{(\gamma M_0)^2} \ll 1. \quad (10)$$

В систему уравнений (9), полученную для амплитуд гармоник с индексом n , вследствие влияния накачки входят амплитуды гармоник с индексами $n + 1$ и $n - 1$. Поэтому, в принципе, все гармоники связаны друг с другом. Однако в силу малости параметра ε_h (8) эта связь оказывается слабой.

В правой части уравнений (9) собраны слагаемые первого порядка малости по параметрам ε_h (8), ε_L (7) и ε_d (4). Отбрасывая эти слагаемые в нулевом порядке теории возмущений, получаем ряд невзаимодействующих гармоник. Параметр q при заданном ω подберем из условия обращения в нуль определителя уравнений (9) для гармоники с $n = 0$. Это означает, что данную гармонику всегда будем считать собственной волной, а q и ω связанными дисперсионным соотношением для этой волны

$$\omega^2 = \left(\omega_H + \bar{A}q^2\omega_m \right) \left(\omega_H + \bar{A}q^2\omega_m + \omega_m \sin^2 \theta \right), \quad (11)$$

где $\omega_H = \gamma H_0$, $\omega_m = 4\pi\gamma M_0$ и $\bar{A} = A/4\pi$. Теперь подберем ω из условия обращения в нуль еще одного определителя для гармоники с номером $n \neq 0$. Тем самым гармонику с этим номером n тоже сделаем собственной. Это произойдет на частоте параметрического резонанса $\omega = -n\omega_p/2$. Только две гармоники из фигурирующих в (6) могут одновременно быть собственными.

Связь между двумя собственными гармониками с номерами 0 и n осуществляется накачкой через, вообще говоря, ряд возбуждаемых вынужденных гармоник с промежуточными номерами от ± 1 до $\pm(|n| - 1)$. Такая связь оказывается порядка параметров $\varepsilon_h^{(|n|)}$, $\varepsilon_L^{(|n|)}$, $\varepsilon_d^{(|n|)}$. При $n = \pm 1$ связь получается наиболее сильной. Далее мы ограничимся рассмотрением только такой сильной связи между собственными гармониками с номерами 0 и (-1) на частотах, близких к $\omega_p/2$.

В первом порядке по ε_h , ε_L и ε_d в уравнениях для 0-й гармоники можно отбросить слагаемые с амплитудами (+1)-й гармоники, δM_{1x} и δM_{1y} , а в уравнениях для (-1)-й гармоники — слагаемые с амплитудами (-2)-й гармоники, δM_{-2x} и δM_{-2y} . Тогда получим замкнутую систему из восьми уравнений в частных производных для определения восьми неизвестных функций.

3. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АМПЛИТУД ПАРАМЕТРИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ СПИНОВЫХ ВОЛН

Даже после указанных упрощений уравнения (9) остаются громоздкими. Это и неудивительно, поскольку они содержат почти полную информацию о структуре спиновых волн. Между тем в нулевом приближении по параметрам ε_h , ε_L и ε_d структура волн может считаться известной [26]. Дополнительно требуется выяснить два вопроса: во-первых, как меняются в пространстве и времени амплитуды спиновых волн при их взаимодействии через накачку и, во-вторых, каковы вызванные накачкой малые поправки к структуре волн. Для ответа на эти вопросы достаточно в духе метода «вторичного квантования» получить уравнения только для амплитуд.

Стандартный путь получения таких уравнений основан на введении амплитуд с помощью преобразований Хольстейна–Примакова [23, 24]. Возможен, в принципе, и другой, более элементарный, путь, который сводится к прямому преобразованию уравнений (9). Далее мы воспользуемся этим вторым путем.

Запишем вытекающие из (9) уравнения для амплитуд 0-й и (-1)-й гармоник в виде

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \hat{Q} \frac{\partial \vec{e}}{\partial y} + \hat{R} \vec{e} + \hat{E} \vec{e} &= \hat{P} \vec{f}, \\ \hat{\Omega} \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \hat{Q} \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} - \hat{R} \vec{f} + \hat{F} \vec{f} &= \hat{P}^* \vec{e}, \end{aligned} \tag{12}$$

где неизвестные функции \vec{e} и \vec{f} — четырехкомпонентные векторы-столбцы

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \delta M_{0x} \\ \delta M_{0y} \\ \delta H_{0y} \\ \delta H_{0z} \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} \delta M_{-1x} \\ \delta M_{-1y} \\ \delta H_{-1y} \\ \delta H_{-1z} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

а коэффициенты в уравнениях (12) — матрицы 4×4 :

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \begin{pmatrix} a_0 & b & -1 & 0 \\ b & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iq_z & iq_y \\ 0 & 4\pi iq_y & iq_y & iq_z \end{pmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{pmatrix} a_{-1} & b & -1 & 0 \\ b & -a_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iq_z & iq_y \\ 0 & 4\pi iq_y & iq_y & iq_z \end{pmatrix}, \\ \hat{\Omega} &= \frac{1}{\gamma M_0} \hat{A}, \quad \hat{Q} = -2iAq_y \hat{B}, \quad \hat{R} = -i\varepsilon_{d0} \hat{B}, \quad \hat{P} = \frac{h}{2M_0} \hat{B}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Частота ω может быть слабо отстроена от параметрического резонанса, т. е. $\omega = \omega_p/2 + \Delta\omega$, где $\Delta\omega/\omega_p \sim \varepsilon_h, \varepsilon_L, \varepsilon_d$. В таком случае матрица $\hat{F} = \hat{F}_0 + \delta\hat{F}$, где

$$\hat{F}_0 \equiv \hat{F}(\omega)|_{\omega=\omega_p/2}, \quad \delta\hat{F} = -\frac{i\Delta\omega}{\gamma M_0} \hat{A}. \tag{15}$$

Будем искать решение (12) в виде

$$\vec{e} = C \vec{e}_0 + \delta \vec{e}, \quad \vec{f} = D \vec{f}_0 + \delta \vec{f}, \tag{16}$$

где \vec{e}_0 и \vec{f}_0 — решения невозмущенной задачи

$$\hat{E} \vec{e}_0 = 0, \quad \hat{F}_0 \vec{f}_0 = 0, \tag{17}$$

C и D — амплитуды спиновых волн, медленно меняющиеся с g и t , которые, вообще говоря, не малы, а $\delta \vec{e}$ и $\delta \vec{f}$ — малые и медленно меняющиеся добавки к решению, которые как раз и описывают поправки к «структуре» волны. Поскольку определители матриц \hat{E} и \hat{F}_0 равны нулю, то для однозначности одну из компонент каждого из векторов \vec{e}_0 и \vec{f}_0 будем полагать равной единице. Кроме того, в векторах $\delta \vec{e}$ и $\delta \vec{f}$ одну

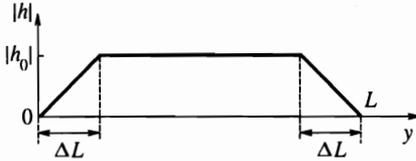


Рис. 2. Пространственный профиль амплитуды накачки

из компонент приравняем нулю, чтобы сохранялось число неизвестных функций. При подстановке (16) в (12) члены нулевого порядка исчезнут в силу (17). Сохраняя лишь первый порядок по нашим малым параметрам ε_h , ε_L и ε_d , можно отбросить производные от малых и медленно меняющихся функций $\delta \vec{e}$ и $\delta \vec{f}$. Тогда после исключения этих функций из системы (12) получаем окончательно два уравнения для амплитуд C и D :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + V_1 \frac{\partial C}{\partial y} + \gamma_1 C &= g_1(y)D + \gamma_1 C_0, \\ \frac{\partial D}{\partial t} + V_2 \frac{\partial D}{\partial y} + \gamma_2 D &= g_2(y)C + \gamma_2 D_0, \end{aligned} \quad (18)$$

где параметры $V_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$ и $g_{1,2}$ имеют смысл соответственно проекций групповых скоростей на ось y , коэффициента диссипации и коэффициента параметрической связи волн. Для этих коэффициентов получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} V_1 = -V_2 \equiv V, \quad V &= 2k \frac{\omega_m \sin \theta}{q} \left[\tilde{A}q^2 + \frac{\cos^2 \theta}{2k \left(k + \frac{\omega_m \sin^2 \theta}{\omega_p} \right)} \right], \\ \gamma_1 = \gamma \Delta H k, \quad \gamma_2 &= \gamma \Delta H k - 2i\Delta\omega, \quad g_1(y) = -i\gamma h(y) \frac{\sin^2 \theta}{2} \frac{\omega_m}{\omega_p}, \\ g_2(y) = g_1^*(y), \quad k &= \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_m}{\omega_p} \sin^2 \theta \right)^2}, \quad \Delta H = \frac{\omega_d \omega_p}{2\gamma^2 M_0}. \end{aligned} \quad (19)$$

Чтобы учесть тот факт, что в отсутствие накачки у волн может существовать некая исходная (шумовая) амплитуда, в правые части (18) добавлены дополнительные слагаемые $\gamma_1 C_0$ и $\gamma_2 D_0$ — «источники» шума. Тогда при отсутствии накачки амплитуды волн равны $C = C_0$ и $D = D_0$. При включении накачки в момент $t = 0$ потребуем, чтобы выполнялись начальные условия

$$C(y, t = 0) = C_0, \quad D(y, t = 0) = D_0. \quad (20)$$

Накачка $h(y)$ считается локализованной в интервале $0 < y < L$ (рис. 2). На краях этого интервала она меняется на расстояниях $\Delta L \ll L$, удовлетворяющих условиям

$$\Delta L \left| \frac{\partial C}{\partial y} \right| \ll |C|, \quad \Delta L \left| \frac{\partial D}{\partial y} \right| \ll |D|. \quad (21)$$

Внутри указанного интервала накачка постоянна и равна h_0 . Заметим, что налагавшееся ранее условие (7) эквивалентно $q\Delta L \gg 1$. Таким образом, величина ΔL в нашем

расчете ограничена как сверху, так и снизу. Учет теперь, что волны входят в зону взаимодействия с накачкой, распространяясь навстречу друг другу, поскольку $V_1 = -V_2$ (19). Поэтому на границах зоны амплитуда входящей волны должна быть шумовой, т. е., как и в работе [22], должны выполняться следующие граничные условия

$$C(y = 0, t) = C_0, \quad D(y = L, y) = D_0. \quad (22)$$

Оставаясь в рамках однородной модели, мы должны были бы в уравнениях (18) положить $\partial C/\partial y \equiv \partial D/\partial y \equiv 0$. Тогда решение этих уравнений представляло бы собой линейную комбинацию функций $\exp(p_1 t)$ и $\exp(p_2 t)$, где показатели

$$p_{1,2} = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)^2 + g_1 g_2} \quad (23)$$

и параметры связи g_1 и g_2 взяты внутри зоны. Условие неустойчивости для такого решения, $\text{Re } p_1 > 0$, с учетом (19) можно записать в виде

$$\sqrt{g_1 g_2} > \sqrt{(\text{Re } \gamma_1)^2 + (\Delta\omega)^2}. \quad (24)$$

Допустим теперь, что $\text{Re } \gamma_1 \neq \text{Re } \gamma_2$. Согласно (19), такое неравенство выполняться не может. Однако в более сложных ситуациях оно выполняется. Например, оно справедливо при параметрической генерации волн в плазме или при генерации пары различных по своей природе волн (спиновой и акустической) в ферромагнетике. Допустив формально, что указанное неравенство выполняется, при $\Delta\omega = 0$ получим следующее условие неустойчивости:

$$\sqrt{g_1 g_2} > \sqrt{\text{Re } \gamma_1 \text{Re } \gamma_2}. \quad (25)$$

Условия (24) и (25) будет полезно сравнить с условиями неустойчивости, получаемыми далее вне рамок однородной модели, т. е. для решений уравнений (18) с граничными условиями (22).

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АМПЛИТУД ВОЛН. УСЛОВИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

С помощью преобразования Лапласа по времени t с учетом условий (20) запишем (18) в виде обыкновенных дифференциальных уравнений для изображений $C(y, p)$ и $D(y, p)$. Решение этих уравнений, учитывающее (22), будет

$$C(y, p) = \frac{U(y, p)}{p(p - p_1)(p - p_2)\Delta(p)}, \quad (26)$$

где

$$\Delta(p) = \text{ch } \frac{\beta L}{V} + \frac{\alpha}{\beta} \text{sh } \frac{\beta L}{V}, \quad (27)$$

причем $\alpha = p + (\gamma_1 + \gamma_2)/2$, $\beta = \sqrt{\alpha^2 - g_1 g_2}$ и

$$U(y, p) = [g_1 D_0 + (p + \gamma_1) C_0] \left\{ (p + \gamma_2) \Delta(p) - \frac{g_1 g_2}{\beta} \operatorname{sh} \frac{\beta y}{V} \exp \left[\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \frac{L - y}{V} \right] \right\} - \\ - g_1 [g_2 C_0 + (p + \gamma_2) D_0] \left[\operatorname{ch} \frac{\beta(L - y)}{V} + \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} \frac{\beta(L - y)}{V} \right] \exp \left[-\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \frac{y}{V} \right]. \quad (28)$$

Выражение для $D(y, p)$ получается из (26)–(28) заменой $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2$, $C_0 \rightarrow D_0$, $g_1 \rightarrow g_2$ и $y \rightarrow L - y$.

Для вычисления оригиналов необходимо выяснить аналитические свойства функций $C(y, p)$ и $D(y, p)$ в комплексной плоскости лапласовской переменной p . В принципе, этот вопрос уже обсуждался в литературе (см. [22, 27]). Однако некоторые детали требуют дальнейшего рассмотрения. Заметим, прежде всего, что в точках $p = p_{1,2}$ (23) изображения $C(y, p)$ и $D(y, p)$ не имеют никаких особенностей при любых, в том числе и при сколь угодно больших, длинах L . Чтобы убедиться в этом, можно провести прямое, хотя и несколько громоздкое, преобразование выражения (28) и показать, что функция $U(y, p)$ регулярна в плоскости p и вблизи $p = p_{1,2}$ представима в виде $U(y, p) = (p - p_{1,2})U'(y, p)$, где $|U'(y, p_{1,2})| < \infty$ при любых L . Таким образом, изображения $C(y, p)$ и $D(y, p)$ могут иметь особенности только при $p = 0$ и в точках p , являющихся корнями уравнения

$$\Delta(p) = 0. \quad (29)$$

Для отыскания решений уравнения (29), следуя работе [22], введем вместо p новую комплексную переменную φ равенствами

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{g_1 g_2}}, \quad \operatorname{sh} \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{g_1 g_2}}, \quad (30)$$

где $\varphi = u + i(v + \pi\nu)$, u и v — вещественны, ν — целое число. Тогда для определения u и v из (30) получаем уравнения

$$u + \lambda(-1)^\nu \operatorname{sh} u \cos v = 0, \\ v + \lambda(-1)^\nu \operatorname{ch} u \sin v = 0, \quad (31)$$

причем параметр $\lambda = \sqrt{g_1 g_2} L/V$. Достаточно найти только решения (u, v) с $u \geq 0$ и $v \geq 0$. Тогда остальные решения будут: $(-u, v)$, $(u, -v)$ и $(-u, -v)$. Полученные численно неотрицательные решения (31) как функции от λ представлены на рис. 3. Различные ветви решений удобно нумеровать с помощью числа ν : $u_\nu(\lambda)$ и $v_\nu(\lambda)$. Тогда искомые корни $p = p_\nu(\lambda)$ уравнения (29) будут

$$p_\nu(\lambda) = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} + (-1)^\nu \sqrt{g_1 g_2} \operatorname{ch} [u_\nu(\lambda) + i v_\nu(\lambda)], \quad \nu = 3, 4, 5, \dots \quad (32)$$

Перейдем к анализу корней (32). Пусть $u \neq 0$. Тогда (32) с помощью (31) можно переписать в эквивалентном виде

$$p_\nu(\lambda) = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - \frac{1}{\lambda} \sqrt{g_1 g_2} \left(\frac{u}{\operatorname{th} u} + i v \operatorname{th} u \right),$$

из которого ясно, что всегда $\operatorname{Re} p_\nu < 0$. Таким образом, все корни с $u \neq 0$ описывают устойчивые, т. е. затухающие со временем, вклады в амплитуды $C(y, t)$ и $D(y, t)$. Этот

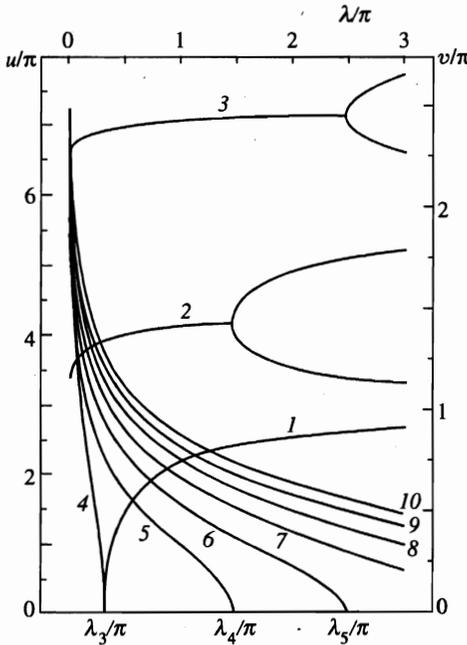


Рис. 3. Результаты численного решения уравнения (31). Кривые 1, 2, 3 представляют функции $v_\nu(\lambda)$ соответственно для номеров $\nu = 3, 4, 5$, причем $v_3(\lambda) \equiv 0$ при $\lambda < \lambda_3$, а в точках $\lambda = \lambda_\nu$ с номерами $\nu \geq 4$ происходит раздвоение функций $v_\nu(\lambda)$. Кривые 4, 5, ..., 10 представляют функции $u_\nu(\lambda)$ соответственно для номеров $\nu = 3, 4, \dots, 9$, причем $u_\nu(\lambda) \equiv 0$ для $\lambda > \lambda_\nu$.

вывод совпадает с полученным ранее в [22]. Рассмотрим теперь корни с $u = 0$. Первое уравнение (31) удовлетворяется тождественно. Исключая v из второго уравнения (31) и из (32), получаем окончательно

$$\begin{aligned} \text{Im } p_\nu(\lambda) &= -\frac{1}{2} (\text{Im } \gamma_1 + \text{Im } \gamma_2), \\ \text{Re } p_\nu(\lambda) &= \frac{1}{2} (\text{Re } \gamma_1 + \text{Re } \gamma_2) \Gamma_\nu(\lambda), \end{aligned} \tag{33}$$

причем безразмерный инкремент

$$\Gamma_\nu(\lambda) = -1 + \frac{\zeta_\nu(\lambda)}{|\zeta_\nu(\lambda)|} \frac{\eta}{\sqrt{1 + \zeta_\nu^2(\lambda)}}, \tag{34}$$

где $\zeta_\nu(\lambda)$ — вещественные корни уравнения

$$\lambda = \frac{\sqrt{1 + \zeta_\nu^2(\lambda)}}{|\zeta_\nu(\lambda)|} [\pi(\nu - 3) - \text{arctg } \zeta_\nu(\lambda)], \tag{35}$$

$\nu = 3, 4, 5, \dots$, $|\text{arctg } \zeta_\nu(\lambda)| \leq \pi/2$ и вводится безразмерная накачка $\eta = 2\sqrt{g_1 g_2} \times (\text{Re } \gamma_1 + \text{Re } \gamma_2)^{-1}$. Удобно ввести также безразмерную длину действия накачки $\xi = L(\text{Re } \gamma_1 + \text{Re } \gamma_2)/2V$, так что параметр $\lambda = \xi\eta$.

Из (34) видно, что неустойчивость может иметь место, только если существуют корни, для которых $\zeta_\nu(\lambda) > 0$. Для таких корней в плоскости параметров системы (ξ, η) можно получить семейство кривых, разделяющих области устойчивости и неустойчивости. Полагая в (34) $\Gamma_\nu(\lambda) = 0$, что должно иметь место на границе устойчивости,

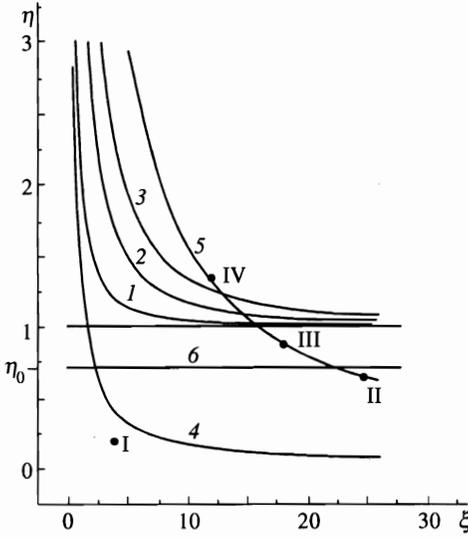


Рис. 4. Плоскость (η, ξ) — накачка-длина локализации: 1, 2, 3 — семейство кривых (36) соответственно для номеров $\nu = 4, 5, 6$; 4 — гипербола $\xi\eta = \pi/2$; 5 — гипербола $\xi\eta = \lambda$ при $\lambda = 5\pi$; 6 — линия $\eta = \eta_0 \equiv 2\sqrt{\text{Re } \gamma_1 \text{ Re } \gamma_2} / (\text{Re } \gamma_1 + \text{Re } \gamma_2)$ при произвольной величине отношения $\text{Re } \gamma_1 / \text{Re } \gamma_2$

получаем $\zeta_\nu(\lambda) = \sqrt{\eta^2 - 1} > 0$. Подставляя это в (35), получаем следующие уравнения для кривых указанного семейства:

$$\xi = \frac{\pi(\nu - 3) - \text{arctg } \sqrt{\eta^2 - 1}}{\sqrt{\eta^2 - 1}}, \quad \nu = 4, 5, \dots \tag{36}$$

Вид кривых (36) показан на рис. 4. Поскольку кривая с $\nu = 4$ лежит ниже всех остальных, то она играет особую роль — представляет порог неустойчивости. По существу, выражение (36) при $\nu = 4$ дает количественную связь между пороговой накачкой и степенью ее локализации. Согласно (36) и рис. 4, пороговое значение накачки возрастает по мере усиления локализации (уменьшения ξ). Этот вывод согласуется с предыдущими работами [19–21]. Вместе с тем нужно отметить, что при $\xi \rightarrow \infty$ пороговая накачка $\eta \rightarrow 1$, так что условие неустойчивости при любых допустимых отстройках $\Delta\omega$ и декрементах $\text{Re } \gamma_1$ и $\text{Re } \gamma_2$ принимает вид

$$\sqrt{g_1 g_2} > \frac{1}{2}(\text{Re } \gamma_1 + \text{Re } \gamma_2). \tag{37}$$

Это условие отличается от условий (24) и (25) в двух отношениях: 1) порог не зависит от отстройки, что контрастирует с (24), и 2) при $\text{Re } \gamma_1 \neq \text{Re } \gamma_2$ и $\Delta\omega = 0$ порог равен среднему арифметическому из коэффициентов диссипации, а не среднему геометрическому, как в (25). На рис. 4 порог (37) представлен горизонтальной линией $\eta = 1$, а порог (25) — линией $\eta = \eta_0 \leq 1$. Таким образом, даже в пределе $L \rightarrow \infty$ выражение для порогового значения накачки может не совпадать с получаемым в рамках однородной модели. Причины этого несовпадения ранее не обсуждались. Мы постараемся выявить их в следующем разделе.

В заключение данного раздела рассмотрим подробнее зависимость инкремента от накачки, $G_4(\eta)$, вытекающую из (34) и (35). Семейство таких зависимостей при различных фиксированных значениях длины локализации представлено на рис. 5. Обращает

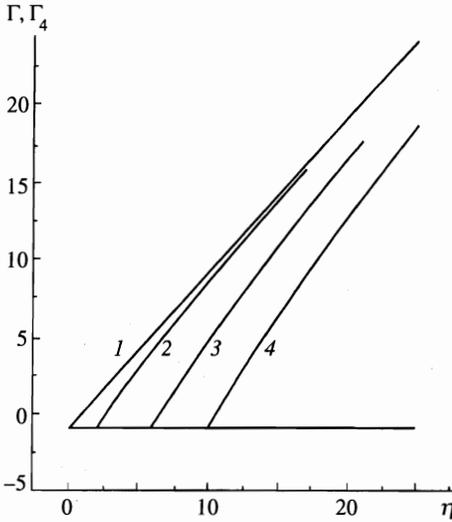


Рис. 5. Зависимость инкрементов от накачки: 1 — инкремент, рассчитанный в рамках однородной модели по формуле (23) при $\text{Re } \gamma_1 = \text{Re } \gamma_2$ и $\Delta\omega = 0$, т. е. по формуле $\Gamma(\eta) = \text{Re } p_1 / \text{Re } \gamma_1 = -1 + \eta$; 2, 3, 4 — инкременты $\Gamma_4(\eta)$, рассчитанные для системы с границами по формулам (34) и (35) соответственно для $\xi = \pi/4, \pi/12, \pi/20$

на себя внимание, что параметрическая регенерация системы, т. е. частичная компенсация диссипативных потерь за счет накачки, носит пороговый характер, если ξ конечно. На пороге регенерации $\Gamma_4 = -1$ и растет с η . Согласно (34), это соответствует параметру $\lambda = \pi/2$, когда появляется положительный корень $\zeta_4 = \infty$. Построим кривую $\xi\eta = \pi/2$, показанную на рис. 4. По существу, эта кривая представляет зависимость порога регенерации от длины локализации. Отметим, что на пороге регенерации инкремент растет с накачкой быстрее, чем в однородной модели — на рис. 5 линия 1 имеет при $\Gamma = -1$ производную $d\Gamma/dy = 1$, а все линии, 2, 3, 4 и другие, имеют при $\Gamma_4 = -1$ одинаковые производные $d\Gamma_4/dy = \lambda = \pi/2 > 1$. Таким образом, хотя начальные наклоны $\Gamma_4(\eta)$ не зависят от степени локализации, они отнюдь не совпадают с вычисляемым в однородной модели. Лишь по мере увеличения накачки зависимость $\Gamma_4(\eta)$ асимптотически приближается к таковой в однородной модели, $\Gamma(\eta)$. При этом, чем меньше длина локализации (меньше ξ), тем больше должна быть накачка η , чтобы зависимости $\Gamma_4(\eta)$ и $\Gamma(\eta)$ были близки друг к другу.

5. ЗАВИСИМОСТЬ АМПЛИТУД ВОЛН ОТ КООРДИНАТЫ И ВРЕМЕНИ. ОБСУЖДЕНИЕ

Изображения $C(y, p)$ и $D(y, p)$ (см. (26)–(28)) не имеют иных особенностей в p -плоскости кроме полюсов в точке $p = 0$ и в точках $p = p_\nu(\lambda)$ (32). Поэтому, вычисляя амплитуды $C(y, t)$ и $D(y, t)$ с помощью обратного преобразования Лапласа, мы могли воспользоваться теоремой о вычетах. При этом учитывалось, что полюсы второго порядка появляются: 1) при $p = 0$, если $\Delta\omega = 0$ и один из корней $p_\nu(\lambda)$ находится на пороге неустойчивости, и 2) при $p = p_\nu(\lambda)$, если параметр λ соответствует точке раздвоения кривых на рис. 3. В остальных случаях полюсы имеют первый порядок. При малых временах t может потребоваться учет слишком большого числа полюсов в сумме по вычетам. Тогда более удобным оказывается прямой численный расчет интегралов, выражающих амплитуды.

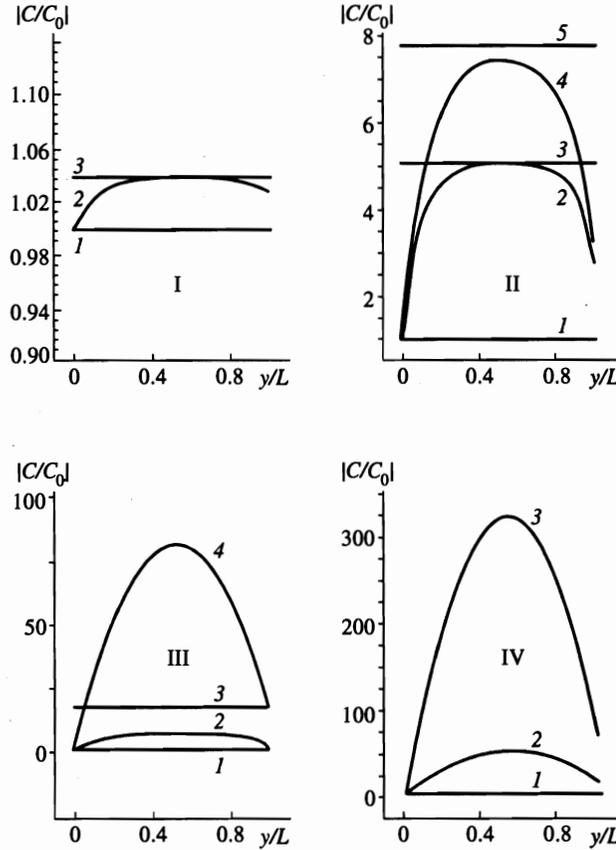


Рис. 6. Модуль относительной амплитуды $|C/C_0|$ в зависимости от безразмерной координаты y/L в различные моменты времени для характерных точек типа I, II, III и IV на рис. 4. Принимаются следующие значения параметров для точек различного типа: I — $\xi = 3\pi$, $\eta = 0.16$, $Vt/L = 0$ (кривая 1) и $Vt/L = \infty$ (кривые 2 и 3); II — $\xi = 5.5\pi$, $\eta = 0.9091$, $Vt/L = 0$ (кривая 1), $Vt/L = 0.6$ (кривые 2 и 3) и $Vt/L = \infty$ (кривые 4 и 5); III — $\xi = 4.95\pi$, $\eta = 1.0101$, $Vt/L = 0$ (кривая 1), $Vt/L = 1.4$ (кривые 2 и 3) и $Vt/L = \infty$ (кривая 4); IV — $\xi = 4.75\pi$, $\eta = 1.0526$, $Vt/L = 0$ (кривая 1), $Vt/L = 2$ (кривая 2) и $Vt/L = 5$ (кривая 3). Для всех рисунков принято, что $\Delta\omega = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2$, $g_{1,2} = g_{1,2}^*$ и $C_0 = D_0$. Горизонтальными линиями для сравнения показаны модули относительных амплитуд, рассчитанные в рамках однородной модели

На рис. 6 представлены результаты такого вычисления амплитуд. Расчеты выполнены для четырех характерных типов точек I, II, III и IV, показанных на рис. 4. На первом этапе расчетов считалось для простоты, что $\text{Re } \gamma_1 = \text{Re } \gamma_2$ и отстройки нет, т. е. $\Delta\omega = 0$.

Точка I характерна тем, что лежит ниже как порога неустойчивости, так и порога регенерации — ниже соответственно кривых 1 и 4 на рис. 4. Из кривых на рис. 6, построенных для точки типа I, видно, что по истечении времени $t > L/V$ достигается некоторое стационарное распределение амплитуды в пространстве. Это распределение совпадает с получаемым в рамках однородной модели почти на всей длине действия накачки, кроме приграничных участков, длина которых порядка «длины диссипации»

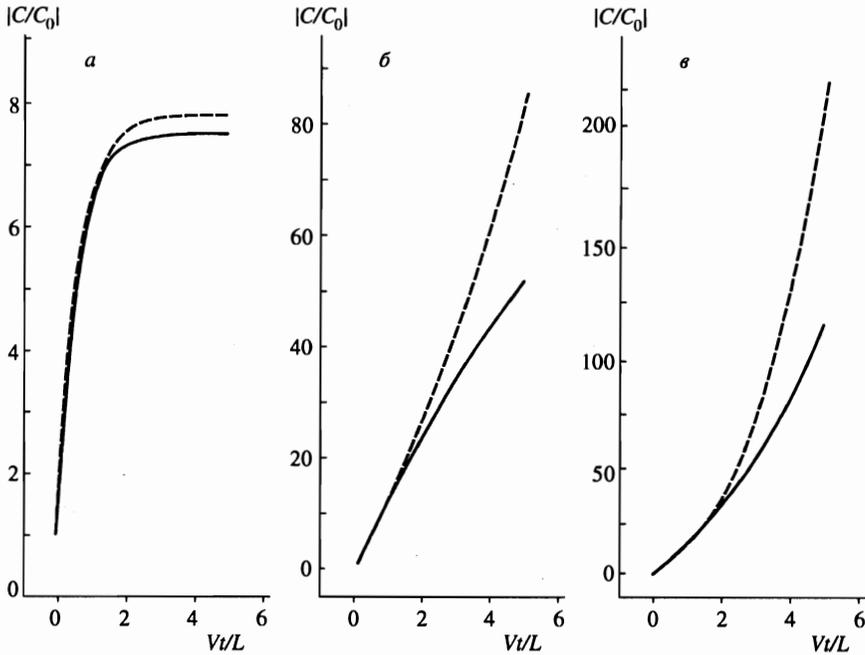


Рис. 7. Модуль относительной амплитуды $|C/C_0|$ в зависимости от безразмерного времени Vt/L в центре зоны возбуждения $y = L/2$: *a* — для точки типа II, $\xi = 5.5\pi$, $\eta = 0.9091$; *b* — для точки типа III, $\xi = 4.95\pi$, $\eta = 1.0101$; *c* — для точки типа IV, $\xi = 4.75\pi$, $\eta = 1.0526$. Принято, что $\Delta\omega = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2$, $g_{1,2} = g_{1,2}^*$ и $C_0 = D_0$. Сплошными линиями представлены результаты расчета для системы с границами, штриховыми линиями — расчет в рамках однородной модели

$L_d = 2V/(\text{Re } \gamma_1 + \text{Re } \gamma_2)$. В точках типа I, как мы видим, однородная модель вполне адекватно описывает ситуацию, если $L \gg L_d$.

В точке II мы оказываемся выше порога регенерации (кривой 4 на рис. 4), но ниже порога неустойчивости как для реальной системы с границами (кривой 1 на рис. 4), так и в рамках однородной модели (кривой б на рис. 4). Из рис. 6 для точки II видно, что с течением времени влияние границ проникает в глубь зоны возбуждения гораздо дальше, чем для точки I. Это, естественно, объясняется частичной компенсацией потерь и соответствующим ростом эффективной длины диссипации. Интересно, что теперь стационарное распределение является существенно неоднородным по всей зоне возбуждения и ни в одной точке не совпадает с таковым, полученным в рамках однородной модели. Точка III отличается от точки II лишь тем, что лежит выше кривой б на рис. 4. Соответственно, в этой точке стационарное распределение в однородной модели вообще не достигается, а в системе с границами достигается (кривая 3). Наконец, точка IV лежит выше порога неустойчивости. Согласно рис. 6 для точки IV, распределение амплитуды при этом неоднородно, стационарное распределение не достигается. Отметим, что для всех рассмотренных точек максимум $|C/C_0|$ смещен вправо от центра зоны возбуждения. Для амплитуды $|D/D_0|$ этот максимум смещен влево.

Обсудим теперь зависимость амплитуды волны от времени в фиксированной пространственной точке. Удобно взять центр зоны возбуждения, точку $y = L/2$. На рис. 7

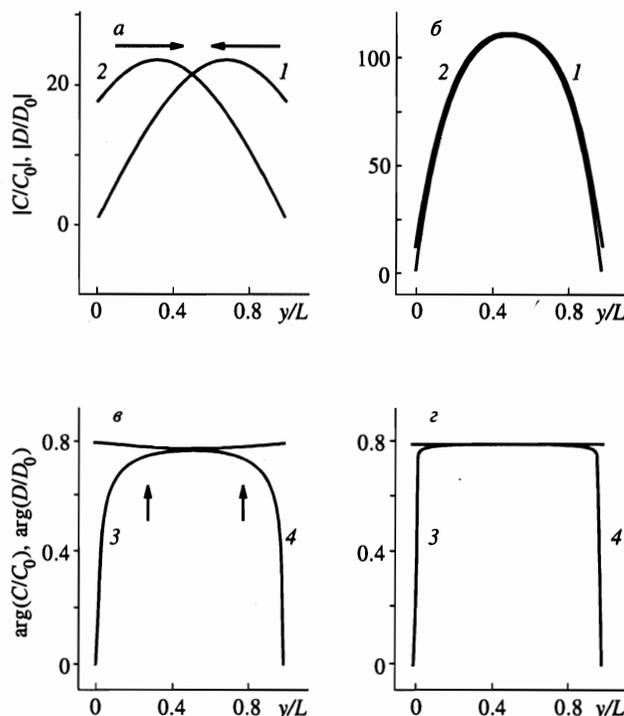


Рис. 8. Стационарные зависимости комплексных амплитуд волн от пространственной координаты при $\Delta\omega = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2$, $g_{1,2} = g_{1,2}^*$ и $C_0 = D_0$. Линии 1 и 2 представляют соответственно $|C/C_0|$ и $|D/D_0|$ при: а — $\xi = 0.7\pi$, $\eta = 1.43$ и б — $\xi = 14.98\pi$, $\eta = 1.001$. Линии 3 и 4 представляют соответственно $\arg(C/C_0)$ и $\arg(D/D_0)$ при: в — $\xi = 0.7\pi$, $\eta = 1.43$ и з — $\xi = 14.98\pi$, $\eta = 1.001$

показаны результаты расчета, выполненного для трех точек в плоскости параметров на рис. 4 — точек типа II, III и IV. Мы видим, что существует временной интервал $0 \leq t \leq L/2V$, в течение которого зависимость амплитуды от времени не отличается от получаемой в однородной модели — штриховые и сплошные линии на рис. 7 сливаются. Это происходит из-за конечности скорости V , с которой распространяются возмущения в системе. В результате вокруг центральной точки $y = L/2$ существует сужающийся со временем участок, в котором влияние границ не проявляется. При $t > L/2V$ и при достаточной степени регенерации системы, необходимой для того, чтобы волны не затухали при распространении в зоне, границы оказывают влияние на всю зону возбуждения, какова бы ни была ее длина L . На рис. 7 это проявляется в расщеплении штриховых и сплошных линий. В точке II обе линии с ростом времени стремятся к некоторым (различным) стационарным уровням. В точке III стационарный уровень достигается только благодаря влиянию границ. В точке IV стационарный уровень вообще не достигается — развивается параметрическая неустойчивость.

Таким образом, существование границ зоны действия накачки оказывает заметное влияние на всю картину параметрической неустойчивости при любом L (даже при $L \rightarrow \infty$). Однако сама величина порога неустойчивости для спиновых волн при $L \rightarrow \infty$ совпадает с получаемой в однородной модели, если только отстройка $\Delta\omega = 0$. В самом

деле, согласно (18), для спиновых волн $\text{Re } \gamma_1 = \text{Re } \gamma_2$, и поэтому на рис. 4 линии $\eta = 1$ и $\eta = \eta_0$ совпадают. Поскольку экспериментально чаще всего измеряется именно порог, то понятно, что многие особенности реальной картины при этом маскируются. Интересно понять, почему при столь различающихся картинах развития неустойчивости в пространстве и во времени пороги могут совпадать. Причину совпадения порогов помогает понять рис. 8.

Если длина локализации накачки не слишком велика, как на рис. 8а, в, то распределения модулей и фаз амплитуд C и D получаются различными, хотя и симметричными относительно центральной точки $y = L/2$. При этом в любой точке внутри зоны действия накачки выполняется хотя бы одно из двух неравенств, $\partial C/\partial y \neq 0$ и $\partial D/\partial y \neq 0$. По мере увеличения длины L происходит деформация распределений амплитуд в направлениях, указанных стрелочками на рис. 8а, в. В результате при достаточно больших L , как на рис. 8б, г, распределения амплитуд C и D сливаются, причем в центральной части зоны образуется плоский участок, в точках которого одновременно $\partial C/\partial y = 0$ и $\partial D/\partial y = 0$. Образование такого плоского участка явилось следствием симметрии параметров волн в системе и того факта, что при $L \rightarrow \infty$ распределения амплитуд волн не могут зависеть от направления их распространения. Внутри плоского участка фактически можно отбросить производные по координате в уравнениях (18), после чего эти уравнения немедленно приводят к порогу неустойчивости, совпадающему с таковым в однородной модели.

Следует еще раз подчеркнуть, что предыдущий вывод получился только в симметричной ситуации, когда $\text{Re } \gamma_1 = \text{Re } \gamma_2$ и $\Delta\omega = 0$. Если $\Delta\omega \neq 0$, то симметрия параметров волн нарушается, поскольку $\gamma_1 \neq \gamma_2$ (19). Расчет показывает, что тогда распределение амплитуд волн также несимметрично даже при $L \rightarrow \infty$ и вблизи порога ни в одной точке нельзя пренебречь производными $\partial C/\partial y$ и $\partial D/\partial y$ в (18). В результате условие неустойчивости получается в виде (37), где следует полагать $\text{Re } \gamma_1 = \text{Re } \gamma_2$. Таким образом, в отличие от однородной модели, в системе с границами порог получается не зависящим от отстройки $\Delta\omega$, разумеется, в допустимых пределах ее изменения (напомним, что $\Delta\omega/\omega \sim \varepsilon_h, \varepsilon_L, \varepsilon_d \ll 1$).

6. ОСОБЕННОСТИ ПРОДОЛЬНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ

Как уже отмечалось в разд. 2, в экспериментах с локализованной накачкой в работах [19, 20] исследовались два типа локализации: поперечная локализация, при которой $L \perp \mathbf{H}_0$, и продольная локализация, при которой $L \parallel \mathbf{H}_0$. До сих пор в данной статье мы ограничивались рассмотрением только поперечной локализации. Рассмотрим теперь кратко особенности продольной локализации.

Изложенный в предыдущих разделах путь построения теории по существу не изменяется. Следуя этим путем, мы приходим к уравнениям для амплитуд волн вида (18), в которых, однако, нужно провести замены

$$V_1 \frac{\partial C}{\partial y} \rightarrow V_1' \frac{\partial C}{\partial z}, \quad V_2 \frac{\partial D}{\partial y} \rightarrow V_2' \frac{\partial D}{\partial z},$$

где V_1' и V_2' — проекции групповых скоростей на ось z и по-прежнему считается, что поле \mathbf{H}_0 направлено вдоль оси z . Формулы для коэффициентов (19) остаются в силе,

но для вновь появившихся скоростей получается $V'_1 = -V'_2 \equiv V'$, где

$$V' = 2k \frac{\omega_m \cos \theta}{q} \left[\tilde{A}q^2 - \frac{\sin^2 \theta}{2k(k + \omega_m \sin^2 \theta / \omega_p)} \right]. \quad (38)$$

Как видно из (38), при $\theta = \pi/2$ скорость $V' = 0$. Согласно дисперсионному соотношению (11), волны с $\theta = \pi/2$, бегущие перпендикулярно полю \mathbf{H}_0 , действительно существуют при достаточно малых H_0 , а именно, при

$$H_0 < H_{0c} = \frac{\omega_p}{2\gamma} \left(k - \sqrt{k^2 - 1} \right). \quad (39)$$

При таких полях H_0 для указанных волн волновые числа $q \neq 0$ и могут быть достаточно большими³⁾. Поэтому для оценки порога неустойчивости этих волн можно применить полученные нами ранее соотношения. Введенный в разд. 4 безразмерный параметр локализации ξ в данном случае равен $\xi \equiv L\gamma_1/2V' = \infty$, поскольку $V'_1 = 0$. Согласно (36) и рис. 4, при $\xi = \infty$ порог неустойчивости минимален ($\eta = \eta_0 = 1$) и совпадает с таковым в однородной модели.

Полученный вывод опирается на выражение для скорости (38) и специфичен именно для продольной локализации. В самом деле, для поперечной локализации скорость $V = 0$ только при $\theta = 0$ (19). Волны, имеющие $\theta = 0$, бегут вдоль поля \mathbf{H}_0 и поэтому, как известно [8], не взаимодействуют с продольной накачкой. Формально это видно из наших формул (19) — при $\theta = 0$ коэффициент параметрической связи $g_1 = 0$. Таким образом, при строго поперечной локализации продольная накачка не может возбуждать волны, которые не выносят энергию из зоны действия накачки. При строго продольной локализации такие волны могут возбуждаться и именно они определяют минимальный порог неустойчивости.

Приведенное объяснение минимального порога хорошо коррелирует с экспериментальными результатами работы [20], в которой была реализована близкая к продольной локализация. В [20] наблюдались осцилляции порога с полем H_0 , причем минимумы осцилляций соответствовали возбуждению волн с нулевой проекцией групповой скорости на плоскость пленки. Такие волны не выходили из зоны действия накачки и поэтому не выносили из нее энергию.

7. КРИВАЯ «БАБОЧКА»

В данном разделе мы обсудим зависимость минимального порога параметрической неустойчивости от поля H_0 (кривую «бабочка» [28]). Интересно выяснить, как влияют границы зоны действия накачки на эту зависимость. Уже отмечалось в разд. 6, что при поперечной локализации влияние границ проявляется в наиболее широком интервале полей H_0 . Поэтому рассмотрим далее именно этот тип локализации.

Наш расчет основывается на уравнении для порога неустойчивости (36) при $\nu = 4$.

³⁾ Напомним, что данная теория, согласно (7) и условию $L \gg \Delta L$, применима при $qL \gg q\Delta L \gg 1$.

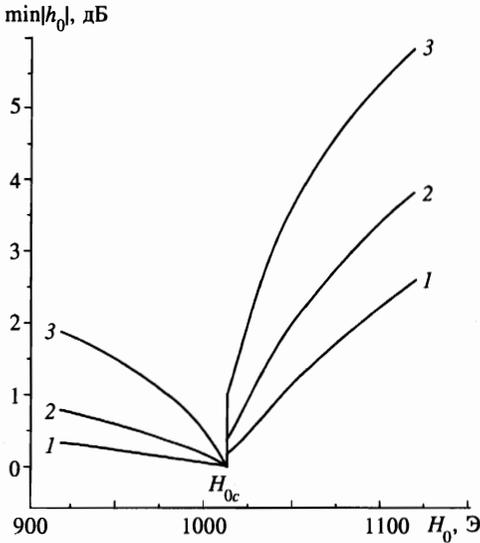


Рис. 9. Рассчитанная зависимость минимального порога неустойчивости, $\min |h_0|$, от поля смещения H_0 , выраженная в децибелах относительно порога при смещающем поле $H_0 = H_{0c}$. Поле накачки h_p продольно ($h_p \parallel H_0$) и поперечно ($L \parallel H_0$) локализовано. Кривые получены при различных длинах локализации накачки L : 1 — 3.5 мм; 2 — 2 мм; 3 — 1 мм. Параметры системы таковы: $4\pi M_0 = 1750 \text{ Э}$, $\omega_p = 2\pi \cdot 9.37 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$, $2\Delta H = 0.4 \text{ Э}$

В этом уравнении параметры ξ и η , учитывая (19), можно записать в виде

$$\xi = \frac{\gamma\Delta H}{\omega_p} \frac{qL}{\sqrt{k^2 - 1} \left[2\tilde{A}q^2 + \frac{\cos^2 \theta}{k(k + \sqrt{k^2 - 1})} \right]}, \quad \eta = \frac{|h_0|}{2\Delta H} \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k}. \quad (40)$$

Тем самым названные параметры записываются как функции q и θ . Само волновое число q можно выразить через θ с помощью дисперсионного соотношения (11), в котором следует положить $\omega = \omega_p/2$. Таким образом, получается, что основное уравнение (36) определяет модуль порогового поля $|h_0|$ как функцию угла θ при заданных M_0 , ΔH , ω_p , L и H_0 . Берутся следующие значения параметров, соответствующие экспериментальной ситуации в работе [19]: $4\pi M_0 = 1750 \text{ Гс}$, $\omega_p = 2\pi \cdot 9.37 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. Исходя из (36) численно определяются те значения угла θ , которые соответствуют минимуму порогового поля $|h_0|$ при заданном H_0 . Тогда оказывается, что если H_{0c} определяется формулой (39), то при $H_0 < H_{0c}$ существует только одно такое оптимальное значение угла, а именно, $\theta_{opt} = \pi/2$. При $H_0 > H_{0c}$ угол θ_{opt} убывает до нуля с ростом H_0 . Значение $\theta = \theta_{opt}$ подставляется в (36) и вычисляется минимальное значение порогового поля, $\min |h_0|$, в зависимости от H_0 . Семейство получаемых зависимостей при произвольных длинах L показано на рис. 9. Видно, что по мере уменьшения L порог возрастает при любом H_0 . Однако абсолютные изменения порога при $H_0 < H_{0c}$ получаются несколько меньшими, чем при $H_0 > H_{0c}$.

Интересно сравнить кривые на рис. 9 с полученными экспериментально в работе [19] для нормально намагниченной пленки ЖИГ. Геометрия эксперимента в [19] соответствовала показанной схематически на рис. 1, причем ориентация полей была близка к случаю a . Таким образом была реализована почти поперечная локализация. Можно видеть, что при $L = 0.25\text{--}0.87 \text{ мм}$ теоретические и экспериментальные кривые для $H_0 > H_{0c}$ коррелируют друг с другом. Для $H_0 < H_{0c}$ зависимость минимального порога от L экспериментально вообще не наблюдалась. В то же время на рис. 9 такая зависимость присутствует.

Мы считаем, что это расхождение отчасти вызвано тем, что рассчитанная модель не вполне соответствует экспериментам [19], поскольку поверхности пленки были скорее гладкими, чем шероховатыми и диффузно отражающими спиновые волны. Другая причина расхождения может быть связана с учетом в теории зависимости ширины линии $2\Delta H$ от волнового числа q . Необходимость учета такой зависимости отмечалась в литературе [8, 25]. При самых малых L , сравнимых с диссипативной длиной L_d или меньших L_d , порог слабо зависит от ΔH и определяется только выносом энергии волн из зоны действия накачки. В этих условиях увеличение ΔH с q не окажет существенного влияния на ход кривой «бабочка» при $H_0 < H_{0c}$. При увеличении L это влияние усиливается и в результате кривая «бабочка» смещается вверх за счет увеличения ΔH с ростом q . Следовательно, нижние кривые на рис. 9 при $H_0 < H_{0c}$ приблизятся к верхней кривой, и согласие с экспериментом улучшится.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Параметрическая неустойчивость спиновых волн в поле локализованной накачки интересна как с принципиальной, так и с прикладной точек зрения. В принципиальном отношении интересно проследить влияние границ на процессы в неустойчивой системе, что мы и старались сделать в данной статье, но только в рамках линеаризованной задачи, пренебрегая взаимодействием параметрических спиновых волн друг с другом. Выяснение роли границ на нелинейной стадии неустойчивости — привлекательное направление дальнейшего развития теории.

В прикладном отношении неустойчивость при локализованной накачке интересна потому, что именно она определяет наибольшие допустимые мощности в линейных устройствах. С этой точки зрения, при дальнейших исследованиях желательно учесть ряд факторов: 1) влияние границ ферритовой пленки, которые часто бывают отражающими, а не поглощающими или диффузно рассеивающими спиновые волны; 2) возможность параметрической генерации не только чисто обменных, но и дипольных спиновых волн, если частота $\omega_p/2$ лежит в пределах дипольного спектра; 3) реальную структуру поля локализованной накачки.

Данная работа частично поддержана Международным научным фондом (грант № MSZ000) и Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 94-0204928а). Авторы благодарны С. А. Никитову, А. Г. Темиряеву и М. П. Тихомировой за полезные обсуждения работы.

Литература

1. R. W. Damon, Rev. Mod. Phys. **25**, 239 (1953).
2. N. Bloembergen and S. Wang, Phys. Rev. **93**, 72 (1954).
3. H. J. Suhl, J. Phys. Chem. Sol. **1**, 209 (1957).
4. H. J. Suhl, J. Appl. Phys. **29**, 416 (1958).
5. E. R. Morgenthaler, J. Appl. Phys. **31**, 95S (1960).
6. E. Schloemann, J. J. Green, and U. Milano, J. Appl. Phys. **31**, 386 (1960).
7. E. Schloemann, J. Appl. Phys. **31**, 1647 (1960).

8. E. Schloemann and R. J. Joseph, J. Appl. Phys. **32**, 1006 (1961).
9. Carl E. Patton, Phys. Rep. **103**, 251 (1984).
10. W. Jantz and J. Schneider, Sol. St. Comm. **9**, 69 (1971).
11. В. Я. Котюжанский, Л. А. Прозорова, ЖЭТФ **81**, 1913 (1981).
12. И. Л. Березин, Б. А. Калиникос, Н. Г. Ковшиков и др., ФТТ **20**, 2101 (1978).
13. G. Wiese, Z. Phys. B **91**, 57 (1993).
14. G. Wiese, P. Kabos, and C. E. Patton, Phys. Rev. B **51**, 15085 (1995).
15. О. А. Чивилева, А. Г. Гуревич, А. Н. Анисимов и др., ФТТ **29**, 1774 (1987).
16. Б. А. Калиникос, Письма в ЖТФ **9**, 811 (1983).
17. B. A. Kalinikos and A. N. Slavin, IEEE Trans. Magn. **27**, 5444 (1991).
18. Г. А. Мелков, ФТТ **30**, 2533 (1988).
19. Г. А. Мелков, С. В. Шолом, ФТТ **29**, 3257 (1987).
20. П. Е. Зильберман, Н. С. Голубев, А. Г. Темиряев, ЖЭТФ **97**, 634 (1990).
21. В. С. Львов, А. М. Рубенчик, Препринт ИАЭ СО АН СССР № 31, Москва (1976).
22. Л. М. Горбунов, ЖЭТФ **67**, 1386 (1974).
23. В. Е. Захаров, В. С. Львов, ФТТ **14**, 2913 (1972).
24. В. С. Львов, А. М. Рубенчик, ЖЭТФ **72**, 127 (1977).
25. А. Г. Гуревич, *Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках*, Наука, Москва (1973).
26. А. И. Ахизер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
27. D. L. Bobroff and H. A. Haus, J. Appl. Phys. **38**, 390 (1967).
28. Я. А. Моносов, *Нелинейный ферромагнитный резонанс*, Наука, Москва (1971).