

ВОЗНИКНОВЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ ЗАРОДЫШЕЙ В ПЕРЕНАСЫЩЕННОМ ТВЕРДОМ РАСТВОРЕ

Л. А. Максимов, А. И. Рязанов, В. Л. Цымбаленко

Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 января 1996 г.

Рассмотрена задача о развитии диссипативной структуры в системе зародышей стабильной фазы шаровой формы в пересыщенном твердом растворе. На начальном этапе, когда все зародыши имеют размеры, близкие друг к другу, получено аналитическое решение, которое показывает, что период структуры с течением времени монотонно убывает сначала как $1/t$, а затем как $1/\sqrt{t}$. В дальнейшем, как показывает численный расчет, часть зародышей полностью растворяется и возникает структура из сферических оболочек с растущими зародышами, расстояние между которыми стабилизируется.

1. ВВЕДЕНИЕ

Образование диссипативных структур в процессе фазового перехода в твердом теле впервые наблюдалось в работе [1], где была обнаружена сверхрешетка вакансионных пор, образовавшаяся после облучения молибдена ионами азота с энергией 2 Мэв при высоких температурах. Период сверхрешетки порядка сотен ангстрем. Аналогичные явления наблюдаются в кинетике химических реакций в твердых телах [2-4]. Все эти явления характеризуются процессами роста кластеров (зародышей выделений новых фаз, вакансионных пор), связанного с поглощением и испарением на их поверхности отдельных атомов или точечных дефектов. Около каждого зародыша стабильной фазы существует неоднородное распределение пересыщенного раствора атомов («диффузионные облака»). Перекрывание диффузионных облаков от разных зародышей приводит к возникновению дальнедействующего диффузионного взаимодействия между ними (см. [5, 6]). В ансамбле диффузионно-взаимодействующих зародышей возникает экранирование [7]. В работах [8, 9] это диссипативное взаимодействие было предложено в качестве механизма возникновения и стабилизации сверхрешетки пор.

Целью настоящей работы является выход за рамки качественных соображений работ [5-9] и построение кинетической теории образования и развития структуры в системе пересыщенного твердого раствора. В качестве частного примера рассмотрим систему, содержащую в начальный момент времени зародыши стабильной фазы внутри сферы радиуса L . В разд. 2 кратко воспроизводится система уравнений [9], которые описывают кинетику системы зародышей. В разд. 3 аналитически исследуется линеаризованная система уравнений, применимая к описанию развития диссипативной структуры на начальном этапе, когда размеры всех зародышей близки друг к другу. Показано, что в системе возникает пространственная структура, периодичность которой уменьшается со временем. В разд. 4 численно решается система основных уравнений с учетом их нелинейности. Показано, что образуется квазистационарная пространственная структура из сферических слоев, в которых зародыши либо испаряются вплоть до

полного исчезновения, либо неограниченно растут. Получено, что на этапе развитой структуры периодичность ее от времени не зависит.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Следуя классической теории Лифшица–Слезова [10], выразим изменение радиуса i -го зародыша R_i за счет диффузии атомов растворенного вещества, имеющих концентрацию $c(r)$:

$$\frac{dR_i}{dt} = D \left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=R_i}, \quad (2.1)$$

где D — коэффициент диффузии растворенного вещества. Предполагается, что зародыши растут медленно и распределение концентрации растворенного вещества в пространстве между ними можно считать квазистационарным:

$$c(r) = c_\infty + \sum_j \frac{q_j}{|r - r_j|}, \quad (2.2)$$

где r_j — координата центра j -го зародыша, а c_∞ — концентрация вдали от системы зародышей. Уравнения (2.1), (2.2) дают выражение для скорости роста i -го зародыша

$$\frac{dR_i}{dt} = -D \frac{q_i}{R_i^2}. \quad (2.3)$$

У поверхности зародыша концентрация является термодинамически равновесной и определяется кривизной поверхности зародыша

$$c(R_i) = c_T \left(1 + \frac{R_T}{R_i} \right), \quad (2.4)$$

где c_T — термодинамически равновесная концентрация растворенного вещества для плоской границы раздела фаз, а параметр $R_T = 2\sigma\omega_0/T$ (σ — поверхностное натяжение, ω_0 — объем, приходящийся на одну молекулу стабильной фазы, T — температура). Из (2.2) имеем

$$c(R_i) = c_\infty + \frac{q_i}{R_i} + \phi_i, \quad (2.5)$$

где ϕ_i — концентрационное «кулоново поле» в точке r_i , созданное системой растущих зародышей с «зарядами» q_j :

$$\phi_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{|r_i - r_j|} = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{\rho_{ij}}. \quad (2.6)$$

В формулах (2.4) и (2.6) предполагается, что выполнено неравенство $\alpha \ll R_i \ll \rho_{ij}$.

Будем рассматривать систему зародышей, в которой их радиусы плавно зависят от координаты r_i . В этом случае дискретные уравнения (2.3)–(2.6) можно заменить на

дифференциальные уравнения, в которых размеры зародышей R , «заряды» q и «поля» ϕ есть непрерывные функции координаты r .

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{q}{R^2}, \quad (2.7)$$

$$1 - \eta R = q + R\phi, \quad (2.8)$$

$$\Delta\phi = -q\theta(R). \quad (2.9)$$

Тэта-функция введена для исключения «зарядов» испарившихся зародышей. Здесь введены безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \bar{R} &= R/R_*, & \bar{q} &= q/R_T c_T, & \bar{t} &= tDR_T c_T/R_*^3, \\ \bar{\phi} &= \phi R_*/R_T c_T, & \bar{r} &= r\sqrt{4\pi R_* n_{nuc}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

и опущен знак « \sim ». Величина n_{nuc} — плотность зародышей. Коэффициент η равен

$$\eta = \frac{R_*}{R_T} \left(\frac{c_\infty}{c_T} - 1 \right). \quad (2.11)$$

Если система зародышей погружена в пересыщенный раствор ($c_\infty > c_T$), то в качестве R_* естественно выбрать критический размер зародышей

$$R_c = R_T \left(\frac{c_\infty}{c_T} - 1 \right)^{-1}. \quad (2.12)$$

Тогда $\eta = 1$. Если вокруг зародышей находится насыщенный раствор ($c_\infty = c_T$), то в качестве R_* удобно выбрать средний начальный размер зародышей и $\eta = 0$. В дальнейшем для определенности примем $\eta = 1$ (зародыши в пересыщенном растворе).

Поле $\phi(r)$ учитывает влияние диффузионных облаков окружающих зародышей на скорость роста зародыша в точке r . Растущие зародыши ($q < 0$) уменьшают концентрацию атомов растворенного вещества, понижают $\phi(r)$ (см. (2.6)) и, следовательно, в силу (2.7), (2.8) замедляют рост зародыша в точке r . Роль испаряющихся зародышей противоположна.

В следующем разделе будет показано, что поле ϕ приводит к неустойчивости однородного распределения зародышей и развитию диссипативной структуры.

3. ЭВОЛЮЦИЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ЗАРОДЫШЕЙ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим эволюцию системы зародышей, которые в начальный момент имели одинаковый размер $R \simeq 1$ и постоянную плотность в сферической области радиуса $L \gg 1$. В такой системе все величины зависят только от расстояния от центра шара. Поле ϕ запишем в виде

$$\phi = \frac{L\chi}{r} \quad (3.1)$$

и вместо трехмерного уравнения Пуассона (2.9) будем решать одномерное уравнение

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} = -\frac{r}{L}q \quad (3.2)$$

с граничными условиями

$$\chi|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{d\chi}{dr} \right|_{r=L} = 0. \quad (3.3)$$

Первое условие тривиально, второе следует из непрерывности ϕ и $d\phi/dr$ на границе $r = L$ и требования

$$\phi = \frac{\text{const}}{r}, \quad r > L. \quad (3.4)$$

Проанализируем начальный этап эволюции, линеаризовав уравнения (2.7) и (2.8) относительно малых отклонений от стационарного состояния $q_0 = 0$, $R_0 = 1$, $\phi_0 = 1 - \eta$. После подстановки в (2.7)–(2.9) выражений

$$R = 1 + \xi, \quad \phi = \phi_0 + \frac{L\chi}{r} \quad (3.5)$$

получаем искомую линеаризованную систему уравнений

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} = -\frac{rq}{L}, \quad \dot{\xi} = -q, \quad \xi + q + \frac{L\chi}{r} = 0. \quad (3.6)$$

Эта система уравнений примет еще более простой вид, если в качестве начального условия выбрать

$$\xi|_{t=0} = \xi_0(x) = C \exp(-\alpha x), \quad |C| \ll 1, \quad x = L - r, \quad \alpha L \gg 1. \quad (3.7)$$

Для определенности примем $\alpha > 1$. В этом случае все процессы разыгрываются вблизи границы системы $x \ll L$ и вместо (3.6) можно рассматривать систему уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = -q, \quad \dot{\xi} = -q, \quad \xi + q + \chi = 0. \quad (3.8)$$

Эти уравнения указывают на неустойчивость однородного состояния зародышей. Подставив в (3.8) волну $\exp(pt + ikx)$, легко находим

$$p = \frac{k^2}{k^2 + 1}. \quad (3.9)$$

Если в (3.8) формально пренебречь полем χ , то вместо (3.9) мы получим инкремент роста, не зависящий от волнового вектора ($p = 1$). В этом случае волны возмущения любой длины волны растут одинаково быстро и пространственная структура не возникает. Учет поля χ приводит к тому, что длинноволновые возмущения ($k < 1$) растут медленнее, чем коротковолновые ($k > 1$). Отсюда следует, что в системе зародышей должна возникать структура с периодом λ порядка единицы, или в обычных единицах (см. (2.10))

$$\lambda \sim (4\pi n_{\text{нuc}} R_*)^{-1/2}. \quad (3.10)$$

Этот результат впервые был опубликован в [8, 9].

Рассмотрим роль несферически-симметричных возмущений. Разложим начальное возмущение по сферическим гармоникам:

$$\xi|_{t=0} = \sum_{l,m} \xi_{lm}(r, t) Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (3.11)$$

При этом система уравнений (2.7)–(2.9) в линейном приближении распадается на подсистемы

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{lm} &= -q_{lm}, \\ -q_{lm} &= \xi_{lm} + \phi_{lm}, \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 \phi_{lm}) - \frac{l(l+1)}{r^2} \phi_{lm} &= -q_{lm}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Пусть амплитуды $\xi_{lm}(r, 0)$ так же, как и (3.7), отличны от нуля только вблизи границы системы $r = L$. Тогда в последнем уравнении (3.12) «центробежную энергию» можно заменить на константу $l(l+1)/L^2$. Вместо результата (3.9) получаем для инкремента роста p_{lm} гармоники lm выражение

$$p_{lm} = \frac{k^2}{k^2 + 1 + l(l+1)/L^2}. \quad (3.13)$$

Это означает, что гармоники с небольшими орбитальными моментами ($l \ll L$) развиваются так же быстро, как и сферически-симметричное возмущение. Отсюда следует, что на линеаризованном этапе эволюции зародышей соотношение между сферической и несферической частями возмущения с течением времени остается на постоянном уровне. На нелинейном этапе эволюции гармоники не разделяются и развивается слоистая структура со сферическими границами между слоями. Таким образом, несферичность не играет принципиальной роли в развитии системы.

Обычно (см., например, [10]) спектр показателя неустойчивости имеет максимум при некотором k_0 , и период диссипативной структуры определяется положением максимума, $\lambda \sim 1/k_0$, независимо от вида начального возмущения. В нашем случае все волны с $k \geq 1$ развиваются одинаково быстро и, следовательно, характер возникающей диссипативной структуры должен в существенной мере зависеть как от начальных, так и от граничных условий. Роль начального условия (3.7) можно проиллюстрировать частным решением системы (3.8):

$$\xi_N(t, x) = C \exp(p_\alpha t - \alpha x), \quad p_\alpha = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}, \quad \chi_N = \frac{\xi_N}{\alpha^2 - 1}, \quad q_N = p_\alpha \xi_N. \quad (3.14)$$

Однако это решение не удовлетворяет граничному условию (3.3)

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (3.15)$$

Как мы увидим ниже, именно «зеркальное отражение» от границы $x = 0$ приводит к развитию слоистой структуры. Но прежде обсудим рамки применимости линеаризованной системы (3.8).

Согласно (3.14) возмущения остаются малыми при $t \ll t_1$, где

$$t_1 \simeq |\ln C|. \quad (3.16)$$

Если начальное возмущение $|C|$ достаточно мало, то время t_1 достаточно велико, для того чтобы на линеаризованном этапе успела развиться достаточно сложная диссипативная структура.

Для ее изучения воспользуемся преобразованием Лапласа,

$$f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (3.17)$$

Уравнения (3.8) принимают вид

$$p\xi(p, x) - \xi_0(x) = -q(p, x) = \xi(p, x) + \chi(p, x), \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2 \chi(p, x)}{\partial x^2} - \beta^2 \chi(p, x) = \frac{\xi_0(x)}{p-1}, \quad (3.19)$$

где введено обозначение

$$\beta(p) = \sqrt{\frac{p}{p-1}}, \quad \operatorname{Re} \beta \geq 0. \quad (3.20)$$

Уравнение (3.19) решается с граничными условиями

$$\chi(p, \infty) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \chi(p, 0) = 0. \quad (3.21)$$

Частное решение неоднородного уравнения (3.19) есть образ Лапласа от (3.14):

$$\chi_N(p) = \frac{1}{p^2-1} \xi_N(p), \quad \xi_N(p) = \frac{C}{p-p_\alpha} e^{-\alpha x}, \quad q_N(p) = p_\alpha \xi_N(p). \quad (3.22)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям (3.21), следует добавить к (3.22) однородное решение:

$$\chi_H(p) = \frac{C}{\alpha^2-1} \frac{1}{p-p_\alpha} \left(-\frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta x} \right), \quad (3.23)$$

$$\xi_H(p) = C \left(\frac{1}{p-p_\alpha} - \frac{1}{p-1} \right) \left(-\frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta x} \right), \quad (3.24)$$

$$q_H(p) = C \left(\frac{p_\alpha}{p-p_\alpha} - \frac{1}{p-1} \right) \left(-\frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta x} \right). \quad (3.25)$$

Эволюция структуры зародышей от времени дается обратным преобразованием Лапласа

$$f(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(p, x) e^{pt} dp, \quad \sigma > p_\alpha. \quad (3.26)$$

При малых временах, $0 < t \ll 1$, и больших $x \gg 1$ определяющую роль играет область больших $|p| \gg 1$. В этой области

$$\beta = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2p} \quad (3.27)$$

и, например, для (3.23) получаем

$$\chi_H(t) \simeq -\frac{\alpha C e^{-x}}{\alpha^2 - 1} \int e^{pt} \frac{1}{p} e^{-x/2p} dp = -\frac{\alpha C e^{-x}}{\alpha^2 - 1} J_0(\sqrt{2xt}), \quad (3.28)$$

где J_0 — функция Бесселя.

Мы видим, что уже при малых временах в системе зародышей возникает осциллирующая структура с масштабом

$$x \simeq 1/t, \quad (3.29)$$

амплитуда которой экспоненциально быстро убывает при удалении от границы области.

При больших временах, $1 \ll t \ll t_1$, структура системы зародышей определяется асимптотическим поведением функций (3.26). Произведем стандартное смещение контура интегрирования влево с обходом полюса p_α и разреза на отрезке $(0, 1)$. Сравнение формул (3.23)–(3.25) с (3.22) показывает, что вклад в полные решения

$$\chi_N + \chi_H, \quad \xi_N + \xi_H, \quad q_N + q_H \quad (3.30)$$

от полюса p_α равен нулю, так как $\beta(p_\alpha) = \alpha$. В окрестности отрезка $(0, 1)$, где $p = u + iv$, $0 < u < 1$, $|v| \ll 1$ имеем

$$\beta = \sqrt{\frac{u}{1-u}} (|v| - i \operatorname{sign}(v)) \quad (3.31)$$

и интеграл (3.26) сводится к интегралу по единичному отрезку

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \operatorname{Im} f(u - i0) e^{ut} du. \quad (3.32)$$

При $t \gg 1$ этот интеграл набирается на верхнем пределе. Полагая $u = 1 - z^2$, $0 < z \ll 1$, получаем, например

$$q(t) \simeq 2\alpha \frac{C}{\pi} e^t \operatorname{Re} \int_0^\infty \exp\left[-\left(tz^2 + \frac{iz}{z}\right)\right] dz \simeq \frac{2\alpha C}{\sqrt{3\pi}} e^{t-\mu} \cos(\sqrt{3}\mu), \quad (3.33)$$

где $\mu = 3(2tx^2)^{1/3}/4$. Мы видим, что при больших временах масштаб структуры меняется по закону

$$\Delta x \sim 1/\sqrt{t} \quad (3.34)$$

и фронт возмущения ($\mu = t$) распространяется от внешней границы к центру линейно $x \sim t$. При временах, выходящих за рамки (3.16), или, если с самого начала имеет место более общее начальное условие по сравнению с (3.7), линеаризованную систему уравнений (3.8) использовать нельзя и необходимо исследовать систему нелинейных уравнений (2.7)–(2.9) численными методами.

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ СИСТЕМЫ

Для численного решения системы (2.3)–(2.6) приведем ее к интегродифференциальному виду. Уравнения после перехода к безразмерным переменным (2.10) имеют вид

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{q}{R^2}, \quad (4.1)$$

$$q + R_c \sqrt{4\pi R_c n} R \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}} = 1 - R. \quad (4.2)$$

В уравнении (4.2) заменяем сумму интегралом и преобразуем его с учетом сферической симметрии. Для потока q получаем неоднородное уравнение Фредгольма второго рода:

$$q(r, t) + \int_0^L q(r', t) \mathcal{K}(r, r', t) dr' = 1 - R(r, t) \quad (4.3)$$

с ядром $\mathcal{K}(r, r')$:

$$\mathcal{K}(r, r', t) = R(r, t) \frac{r'}{r} \frac{r + r' - |r - r'|}{2} \theta [R(r')]. \quad (4.4)$$

В начальный момент $t = 0$ задавалась зависимость радиусов зародышей $R_0(r)$ от расстояния до центра системы. Затем решалось уравнение (4.3) и находился поток $q(r)$. Метод решения уравнения Фредгольма взят из [11]. По известному потоку из уравнения (4.1) определялась функция $R(r, t)$ на следующем временном слое. Тэта-функция

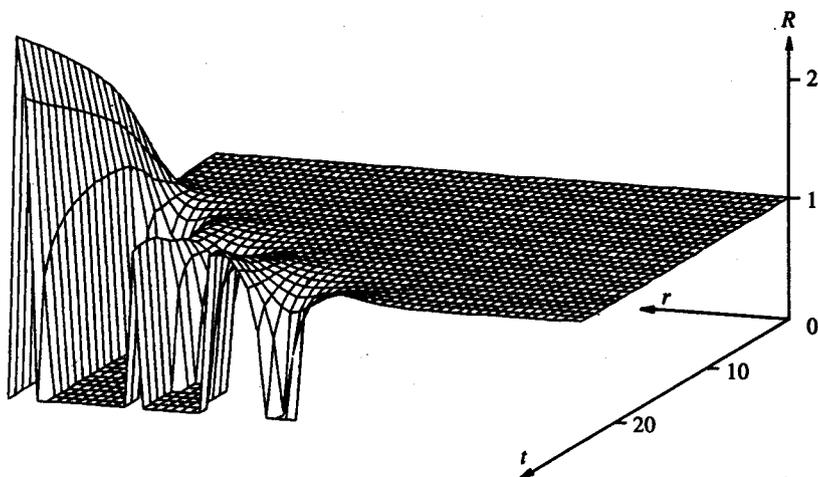


Рис. 1. Эволюция сферически-симметричной системы зародышей. Параметры: $L = 20$, $C = -0.001$. Видно появление к моменту $t = 24$ трех слоев, свободных от зародышей

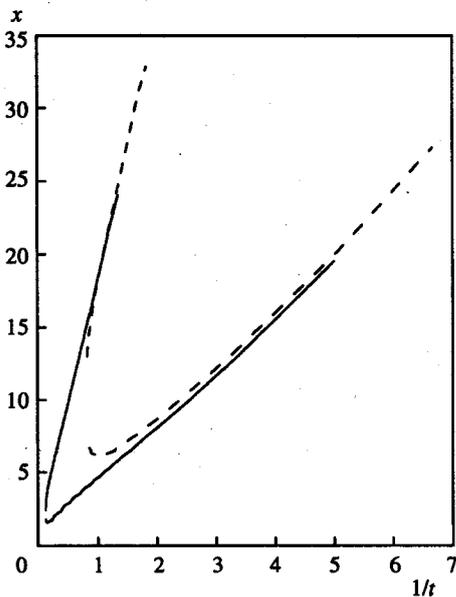


Рис. 2. Изменение масштаба структуры во времени при различных начальных условиях. Штриховые линии — $C = -0.1$, сплошные — $C = -0.0001$; $L = 35$

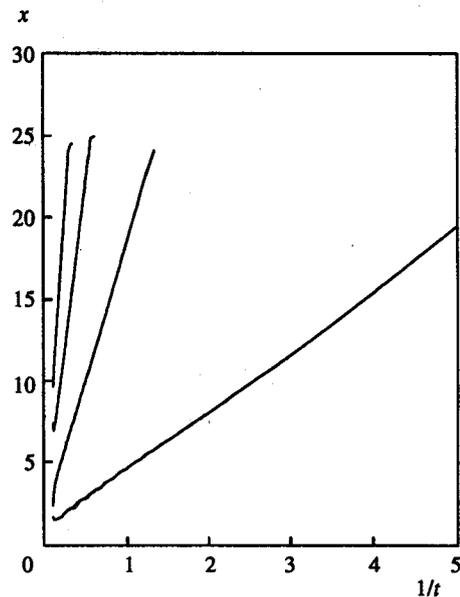


Рис. 3. Временное изменение масштаба структуры при малом начальном возмущении. Параметры $L = 35$, $C = -0.0001$. Видно, что при малых отклонениях выполняется закон $x \sim 1/t$

учитывает то обстоятельство, что на нелинейном этапе эволюции системы часть зародышей полностью исчезла.

На рис. 1 приведен график функции $R(r, t)$, полученный при значениях параметров $L = 20$, $C = -10^{-4}$ и $\alpha = 10$. Видно, что за время $t = 24$ в системе образовались три оболочки с растущими зародышами, разделенные промежутками, в которых зародыши полностью растаяли. Намечается формирование четвертой оболочки. Заметим, что положение растущих оболочек после образования промежутков стабилизируется. Численное решение дает для периода структуры λ (3.10) значение $\lambda \simeq 6(4\pi n_{\text{нuc}} R_x)^{-1/2}$.

Временная эволюция структуры и ее зависимость от начального условия (3.7) изучалась по смещению положений нулей функции $q(r, t)$. На рис. 2 приведены зависимости первых двух появившихся нулей этой функции при начальной амплитуде возмущения $C = -0.1$ (штриховые линии) и $C = -0.0001$ (сплошные линии). Параметр L для данного расчета равен 35. Видно, что на начальном этапе, когда применимо линейное приближение (3.6), масштаб структуры изменяется со временем по закону $x \sim 1/t$ (3.29), причем положение нулей не зависит от амплитуды начального возмущения, как и следует из выражения (3.26). Отклонение от этой зависимости начинается в нелинейной области при формировании в данном случае первого промежутка, свободного от зародышей.

На рис. 3 приведена зависимость масштаба структуры, рассчитанной при значениях параметров $L = 35$ и $C = -0.0001$. Малая величина начального возмущения дала возможность проследить за четырьмя нулями функции $q(r, t)$. Видно, что линейная за-

висимость хорошо выполняется. Наклон n -й прямой пропорционален квадрату n -го корня функции Бесселя нулевого порядка, как и следует из соотношения (3.29).

В работе предложена теория образования пространственно-неоднородной структуры зародышей новой фазы. Физический механизм образования пространственного расщепления в системе растущих зародышей обусловлен диффузионным взаимодействием зародышей на стадии их испарения и роста. Перекрытие диффузионных облаков приводит к тому, что растущие зародыши (сверхкритические) ускоряют испарение подкритических зародышей на характерных расстояниях порядка радиуса экранирования λ . Возникающая пространственная волна в росте одних и испарении других приводит к формированию пространственной слоистой структуры зародышей.

Авторы благодарны Российскому фонду фундаментальных исследований (грант № 96-02-18511а), Международному научному фонду и фонду ИНТАС (грант № 83-285) за финансовую поддержку исследования. Выражаем также глубокую благодарность доктору К. Х. Хайнегу (Россендорф, Германия) за обсуждение ряда аспектов данной проблемы.

Литература

1. J. H. Evans, *Nature* **229**, 403 (1971).
2. R. Feeney, S. L. Schmidt, P. Strickholm et al., *J. Chem. Phys.* **78**, 1293 (1983).
3. A. Maheshwari and A. J. Ardell, *Scripta Metall. Mater.* **27**, 943 (1992).
4. S. Reiss, K. H. Heinig, R. Weber, and W. Skorupa, *Nucl. Inst. and Meth. B* **89**, 337 (1994).
5. Л. А. Максимов, А. И. Рязанов, *ФММ* **41**, 284 (1976).
6. P. Benoist and G. Marten, *Proceedings of Gatlinburg Intern. Conf. on Fundamental Aspects of Radiation Damage in Metals*, Paris (1976), p. 1236.
7. Л. А. Максимов и А. И. Рязанов, *Rad. Eff.* **51**, 197 (1980).
8. А. И. Рязанов и Л. А. Максимов, *Rad. Eff.* **51**, 175 (1980).
9. Л. А. Максимов, А. И. Рязанов, *ЖЭТФ* **79**, 2311 (1980).
10. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979), с. 509.
11. Н. Н. Калиткин, *Численные методы*, Наука, Москва (1978), с. 452.