

© 1993 г.

А.В. Ильин, Л.А. Максимов, В.Л. Цымбаленко

ТЕОРИЯ ЧАЙНИКА. КИНЕТИКА КИПЕНИЯ ЧИСТОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

Решена задача о кипении чистой жидкости в поле тяжести. Сформулирован закон сохранения энергии в кипящей жидкости. Исследована зависимость функции распределения всплывающих пузырьков от высоты с учетом сохранения потока энергии. Показано, что в зависимости от степени перегрева реализуется один из двух сценариев: при малом перегреве пузырьки схлопываются на конечной высоте; после превышения критической степени перегрева устанавливается процесс, при котором весь поток энергии переносится пузырьками. Уменьшение их количества, обратно пропорциональное высоте, компенсируется ростом энергии отдельного пузырька.

1. В настоящей работе рассматривается задача о кипении чистой жидкости. Кипение жидкости есть частный случай кинетики фазовых переходов первого рода. Общая теория зародышеобразования изложена в [1 — 3]. Современное состояние проблемы обсуждается, например, в обзорах [4, 5].

В отличие от других фазовых переходов для процесса кипения важную роль играет всплывание пузырьков. Всплывание сопровождается переносом энергии. По этой причине требуется совместное решение кинетического уравнения эволюции функции распределения пузырьков и уравнения сохранения энергии.

Данная задача аналогична задаче коалесценции в пересыщенных растворах, рассмотренной Лифшицем и Слезовым [1, 2]. Процесс коалесценции идет с сохранением числа растворенных частиц, что приводит к уменьшению пересыщения раствора со временем. В нашем же случае сохраняется энергия системы пузырьков и жидкости. Соответствующий закон сохранения сформулирован в п. 2, где будет показано, что перекачивание энергии от растущих закритических пузырьков в жидкость вызывает увеличение степени перегрева. Саморазогрев может закончиться тепловым взрывом. Всплытие пузырьков стабилизирует процесс за счет переноса тепла из места разогрева. Соответствующая стационарная задача решается в п. 3 — 6. Будет показано, что процесс кипения протекает по-разному в зависимости от степени перегрева жидкости у дна сосуда. Всплывание пузырьков приводит либо к исчезновению перегрева на конечной высоте с последующим схлопыванием всех пузырьков, либо к асимптотическому поведению, аналогичному коалесценции.

Предварительные результаты работы докладывались на конференции в Риге [6].

2. Вначале рассмотрим временную эволюцию распределения пузырьков по размерам R , пренебрегая полем тяжести. В этом случае процесс кипения чистой жидкости аналогичен коалесценции зародышей в растворах [1, 2].

Эволюция функции распределения $f(t, R)$ описывается уравнением непрерывности

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R} (\dot{R}f) = 0. \quad (1)$$

При слабом перегреве пузырьки имеют макроскопические размеры. Это позволяет опустить в (1) член, ответственный за "диффузию" в пространстве размеров и малый по параметру $1/n_g R_c^3$, где n_g — плотность молекул пара, R_c — критический радиус (см. ниже).

Скорость роста пузырька в слабоперегретой чистой жидкости равна

$$\dot{R} = c(\Delta - R_0/R). \quad (2)$$

Здесь c — величина порядка скорости звука в паре, $R_0 = 2\sigma/p$, σ — коэффициент поверхностного натяжения, Δ — степень неравновесности (перегрева):

$$\Delta = \delta p/p = (q/T)(\delta T/T), \quad \delta p = p_s - p, \quad \delta T = T - T_b, \quad (3)$$

где q — теплота парообразования молекулы, p_s — давление насыщенных паров и T_b — температура кипения. Рамки применимости выражения (2) с учетом теплопроводности и вязкости подробно обсуждаются в [3].

Если система находится в теплоизолированных условиях, то степень неравновесности Δ зависит от времени и для решения уравнения (1) необходимо ввести дополнительное условие. Оно должно связать $\Delta(t)$ с функцией распределения. В пересыщенном растворе такое условие выводилось из закона сохранения числа молекул растворенного вещества [1, 2]. Для перегретой чистой жидкости эту роль играет закон сохранения энергии

$$E = C\delta T + \int dR \epsilon f(t, R). \quad (4)$$

Здесь справа первый член — энергия перегрева самой жидкости, C — ее теплоемкость. Второй член — энергия пузырьков. Энергия одного пузырька

$$\epsilon = 4\pi\sigma(R^2 - \frac{2}{3}R^3/R_c). \quad (5)$$

максимальна при $R = R_c$ ($R_c = R_0/\Delta$ — критический размер) и при $R > \frac{3}{2}R_c$ становится отрицательной.

Мы принимаем, что процессы испарения и конденсации являются адиабатическими, так что увеличение энтропии пузырька при его росте полностью компенсируется уменьшением энтропии жидкости.

Используя выражения (2) и (5), получаем скорость изменения энергии пузырька:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial \epsilon}{\partial R} \dot{R} = -8\pi\sigma c R_0 (1 - R/R_c)^2. \quad (6)$$

Это означает, что пузырьки в перегретой жидкости как при рассасывании ($R < R_c$), так и при росте ($R > R_c$) выделяют энергию и разогревают окружающие слои жидкости. В этом заключается качественное отличие от эволюции зародышей в пересыщенном растворе, в котором закритические зародыши

уменьшают концентрацию раствора, а докритические — увеличивают ее.

Продифференцируем равенство (4) по времени:

$$0 = C\dot{T} + \int dRf\dot{\epsilon} = C\dot{T} - \int dR\epsilon \frac{\partial \dot{R}f}{\partial R} = C\dot{T} + \int dRf\dot{R} \frac{\partial \epsilon}{\partial R}. \quad (7)$$

Отсюда, используя (6), получаем

$$\dot{T} = -C^{-1} \int dRf\dot{\epsilon} > 0. \quad (8)$$

Мы видим, что перегретая жидкость с пузырьками в теплоизолированных условиях саморазогревается и, тем самым, степень перегрева Δ и давление насыщенных паров p_s растут. Подчеркнем, что данный вывод относится к системе с постоянным объемом. С ростом температуры будет расти давление системы p . Конкуренция давлений $p(t)$ и $p_s(t)$ определит, произойдет ли тепловой взрыв или установится слабоперегретое состояние с медленно растущими температурой и давлением.

3. В более реалистической постановке задачи о кипении тепло подается ко дну сосуда и уходит через верхнюю поверхность жидкости. Пузырьки рождаются на донной поверхности и всплывают со скоростью

$$\dot{z} = \alpha R^2, \quad (9)$$

определяемой из равенства сил Архимеда и Стокса.

Функция распределения и энергия начинают зависеть от координаты высоты z . Их совместная эволюция описывается системой уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\dot{z}f) + \frac{\partial}{\partial R}(\dot{R}f) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

Здесь E — плотность энергии на высоте z (см. (4)), величина Q — плотность потока энергии:

$$Q = -\kappa \nabla(\delta T) + \int dRf\dot{\epsilon}z, \quad (12)$$

где первый член справа — поток тепла в жидкости, κ — коэффициент теплопроводности. Последний член в (12) — поток энергии пузырьков. Предполагается, что перегрев мал и можно пренебречь конвективным переносом энергии.

Рассмотрим стационарное кипение. В этой задаче уравнение непрерывности (10) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \varphi' + \frac{\partial}{\partial R} (v\varphi') = 0, \quad \varphi' = \dot{z}f, \quad v = \dot{R}/\dot{z}. \quad (13)$$

Мы видим, что высота играет роль времени, а поток пузырьков $\dot{z}f$ — функции распределения. Для не зависящего от высоты перегрева уравнение (13) имеет простое решение:

$$\begin{aligned} \varphi' &= v^{-1} F(z - Z(R/R_c)), \\ Z(u) &= \int dRv^{-1} = z_{\Delta} \int du u^3/(u-1), \end{aligned} \quad (14)$$

$$z_{\Delta} = \alpha R_0^3 / c \Delta^4.$$

Вид функции F задается видом распределения при $z = 0$. Решение дает физически очевидный результат — пузырек, имеющий размер меньше критического радиуса R_c , схлопывается на высоте порядка z_{Δ} . Большие пузырьки растут как $z^{1/3}$.

Теперь учтем зависимость степени перегрева и R_c от высоты. Будем пренебрегать уходом тепла через боковые стенки. Тогда поток энергии (12) постоянен и от высоты не зависит. Его величина Q задается подводом тепла ко дну сосуда. В обозначениях

$$x = R(z)/R_c(0), \quad y = \Delta(z)/\Delta(0), \quad t = z/z_0, \quad z_0 = \alpha R_0^3 / c \Delta^4(0),$$

$$B = Q/Q_0, \quad Q_0 = 4\pi\sigma R_c^2 J, \quad A = \Delta(0)\kappa T^2 / qz_0 Q_0, \quad (15)$$

$$\varphi = R_c(0)\dot{z}f, \quad J = \int dx\varphi|_{t=0}$$

уравнения (12), (13) принимают вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [x^{-3}(xy - 1)\varphi] = 0, \quad (16)$$

$$B = -A dy/dt + S(y), \quad (17)$$

$$S(y) = J^{-1} \int dx\varphi(x^2 - \frac{2}{3}x^3y). \quad (18)$$

Физический смысл параметра B — соотношение тепловых потоков в жидкости и пузырьках. Если основной тепловой поток переносится жидкостью, то $B \gg 1$. Отношение $A/B \sim \Delta^5(0)/Q$, как следует из уравнения (17), определяет “быстроту” остывания жидкости.

4. Для простоты анализа эволюции системы рассмотрим зарождение на дне пузырьков одинакового размера. В этом случае функция распределения имеет вид

$$\Phi(t, x) = J\delta(x - x(t)), \quad (19)$$

а уравнения (16), (17) сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{dx}{dt} = \frac{xy - 1}{x^3}, \quad (20)$$

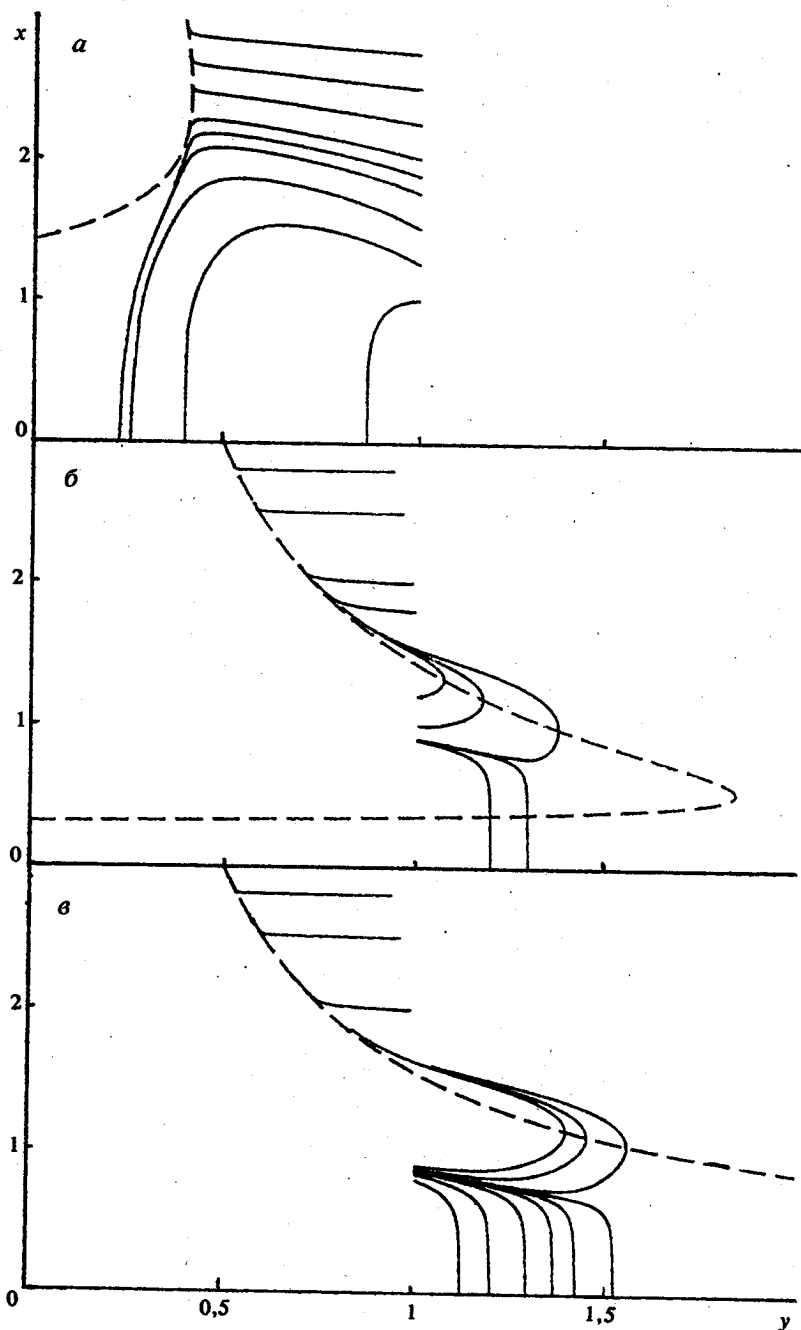
$$\frac{dy}{dt} = \frac{-B + x^2\left(1 - \frac{2}{3}xy\right)}{A} \quad (21)$$

с начальными условиями

$$y(0) = 1, \quad x(0) = x_0. \quad (22)$$

Из уравнения (21) следует, что характер траекторий $x(y)$ различен справа и слева от критической кривой $x^*(y)$, на которой $\dot{y} = 0$. Уравнение критической кривой имеет вид (см. рисунок)

$$B = x^*(y)^2 - \frac{2}{3}x^*(y)^3y. \quad (23)$$



Траектория эволюции системы пузырьков одинакового размера — сплошные кривые. Критическая кривая (23) изображена штриховой линией. Пояснения в тексте

Слева от этой кривой $dy/dt > 0$ и степень перегрева растет со "временем" — высотой, см. (15). Справа от кривой степень перегрева уменьшается.

Характер траекторий определяется отношением A/B . Если $A \ll B$, и $B \gg 1$, тогда почти всюду на плоскости xu имеем очевидное решение

$$dy/dt \approx -B/A, \quad x(t) \approx \text{const}, \quad (24)$$

Если начальный размер пузырьков достаточно велик, $x_0 > \sqrt{B}$, то траектория подходит по горизонтали к критической кривой и асимптотически сближается при $y \rightarrow 0$ либо с ее верхней ветвью $x^* \approx 3/2y$, либо с нижней, стремясь в точку \sqrt{B} . В первом случае имеет место асимптотический закон:

$$x = (2t)^{1/4}, \quad y = \frac{3}{2} (2t)^{-1/4}. \quad (25)$$

При $x_0 < \sqrt{B}$ траектория горизонтальна вплоть до $y = 0$ за исключением области $x_0 < A/B$, когда траектория уходит на ось абсцисс при конечном значении y .

Таким образом, когда подогрев дна сосуда и поток энергии велики, то остывание жидкости определяется в основном теплопроводностью и размер пузырьков почти не меняется до тех пор, пока весь поток энергии не перейдет в пузырьки. После этого наступает либо асимптотический режим (25), либо жидкость остывает до температуры кипения за конечное время. Пузырьки в последнем случае схлопываются либо при конечном значении перегрева, либо позже, когда $y < 0$.

При уменьшении потока энергии с ростом отношения A/B область, где кривая (23) влияет на траекторию, расширяется. Одновременно сужается пучок траекторий, уходящих в точку \sqrt{B} .

Если $A \gg B$ и $B > \sqrt{1/3}$, то, как видно из (21), степень перегрева y меняется медленно по сравнению со скоростью роста пузырьков. Если начальный размер $x_0 < 1$, то пузырьки схлопнутся на высоте порядка x_Δ . Если $x_0 > 1$, то пузырьки сначала будут расти. Одновременно из-за остывания увеличивается критический размер $1/y$. Асимптотический режим наступает, когда критический размер сравнивается с радиусом пузырьков. На рисунке *a* приведены результаты численного решения системы (20), (21) для отношения $A/B = 10$ и $B = 2$.

Если $0 < B < \sqrt{1/3}$, то критическая кривая (23) пересекает линию начальных значений $y = 1$. Появляется область значений x_0 слева от критической кривой, где поток энергии пузырьков превышает полный поток энергии B , и поток тепла по жидкости становится отрицательным (направлен вниз). В результате степень перегрева y около дна увеличивается по мере всплытия пузырьков. Для случая $A \ll B$ размер пузырьков вначале меняется мало: $x(y) \approx \text{const}$. Далее траектория подходит к критической кривой, при $x_0 > \sqrt{3B}$ заворачивает вверх и пересекает ее. В результате траектория оказывается в области, где жидкость остывает ($dy/dt < 0$), и по асимптотике, близкой к верхней ветви $x^*(y)$, идет к оси ординат. Если точка пересечения $x(y)$ и $x^*(y)$ лежит ниже $x = \sqrt{3B}$, то далее траектория идет к оси абсцисс. Если начальный размер пузырьков x_0 выше или ниже критической кривой, то остывание жидкости начинается с самого начала и задача сводится к предыдущему. При $A > B$ характер траекторий не меняется. Эволюция

системы для случая $B = 0,1$ и $A/B = 10$ приведена на рисунке 6.

Предположим теперь, что $B < 0$. Это означает, что источник тепла расположен сверху. В этом случае критическая кривая (21) является монотонно убывающей функцией. Опять для простоты примем $A \ll |B|$. Если начальное значение x_0 лежит выше критической кривой, то $dy/dt < 0$ (см. (21), (23)), поток тепла по жидкости идет вверх, степень перегрева убывает с ростом высоты и задача сводится к предыдущему. Если $x_0 < x^*(1)$, то вначале

градиент температуры положителен. Возрастание степени перегрева приводит к перераспределению полного потока энергии, направленного вниз, в пузырьки. Градиент температуры исчезает (пересечение траектории и критической кривой в точке $y^* > 1$). После этого снова начинается остывание жидкости с ростом высоты, и процесс принимает прежний асимптотический характер. И только если $x_0 \ll 1$, траектория уходит на ось абсцисс. Пузырьки исчезли.

При дальнейшем увеличении высоты степень перегрева растет, но пузырьки заново не возникают, поскольку вероятность флуктуационного зарождения пузырьков в чистой жидкости очень мала. При увеличении отношения $A/|B|$ траектории в плоскости xu становятся более вертикальными и границы перехода от одного режима к другому сдвигаются, но качественно картина не изменяется, см. рисунок 6.

5. Теперь рассмотрим эволюцию системы, когда начальное распределение пузырьков по размерам непрерывно. И в этом случае возможны два пути эволюции системы: либо жидкость остывает столь быстро, что на конечной высоте степень перегрева Δ обратится в нуль и кипение прекратится, либо имеет место асимптотическое приближение Δ к нулю и сохранение потока энергии в пузырьках.

Как и в случае пузырьков одинакового размера, анализ решения системы (16)—(18) легко провести в двух предельных случаях: $A \ll |B|$ и $A \gg |B|$. Пусть $A \ll |B|$. Тогда вид функции распределения изменяется значительно медленнее, чем перегрев. Поэтому поток энергии пузырьков $S(y)$ линейно зависит от величины y , увеличиваясь от значения $S(1)$ до $S(0)$. Если $S(0) < B$, то система теряет перегрев за конечное время (на высоте $z \approx (A/B)z_0$) и кипение прекращается. Если $S(1) < B < S(0)$, то вначале процесс идет, как и в предыдущем случае. Затем почти весь поток энергии переходит в пузырьки и наступает асимптотическая стадия, которая будет рассмотрена в следующем пункте. Если $S(1) > B$, то, согласно (17), на первом этапе $dy/dt > 0$ и перегрев растет с высотой. Затем эта производная меняет знак, начинается остывание и либо переход к асимптотическому режиму, либо схлопывание пузырьков.

В противоположном пределе, $A \gg |B|$, вначале перегрев медленно меняется по сравнению с эволюцией функции распределения пузырьков. На первом этапе все подкритические зародыши схлопываются, а закритические быстро растут и создают поток энергии, направленный вниз. В результате перегрев начинает быстро уменьшаться и наступает асимптотический режим. Мы видим, что в случае большого отношения $A/|B|$ асимптотическая стадия наступает после существенной перестройки начальной функции распределения. Поэтому эта фаза кипения слабо зависит как от начального распределения, так и от величины полного потока энергии B .

При произвольном соотношении A и B решение системы (16)—(18) выполнялось численно. Начальная функция распределения выбиралась в

форме $x^* \exp(-x/x_0)$. Было найдено, что в случае $B > 10$ граница между двумя путями эволюции лежит на линии $A \approx 45B$ и не зависит от значения x_0 . При $B < 10$ граничное значение A для $x_0 < 1$ лежит ниже этой линии, а для $x_0 > 1$ — выше.

6. Асимптотический режим кипения напоминает процесс коалесценции в пересыщенных растворах [1, 2] и может быть описан в рамках теории Лифшица — Слезова. На этой стадии перегрев $y = \Delta/\Delta(0)$ есть монотонно убывающая функция высоты. Удобно, следуя [1, 2], ввести новые переменные

$$\tau = \ln [\Delta(0)/\Delta(z)] = \ln(1/y), \quad u = R/R_c(z) = xy, \quad \psi = R_c z f = \varphi/y. \quad (26)$$

В этих переменных уравнения (16)–(18) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \psi - \frac{\partial}{\partial u} (w\psi) = 0, \quad (27)$$

$$w = u - \gamma u^{-3}(u - 1), \quad (28)$$

$$\gamma^{-1} = \frac{d}{du} \frac{1}{4y^4} = -\frac{\dot{y}}{y^5}, \quad (29)$$

$$B = Ay^{-1}e^{-5\tau} + J^{-1}e^{2\tau} \int du \psi(u^2 - \frac{2}{3}u^3). \quad (30)$$

Следуя [1, 2], примем, что при больших “временах” τ параметр (29) близок к своему асимптотическому пределу γ_0 . Пренебрегая зависимостью γ от τ , получаем решение уравнения (27) в форме

$$\psi = w^{-1}F(\tau + s), \quad s = \int du/w. \quad (31)$$

Чтобы удовлетворить условию (30), функция F должна иметь вид

$$F(\tau + s) \propto \exp[-2(\tau + s)], \quad (32)$$

причем

$$0 < \int du(u^2 - \frac{2}{3}u^3)e^{-2s} < \infty. \quad (33)$$

Интеграл s в (31) при больших u растет как $\ln u$, и поэтому в общем случае интеграл (33) расходится на верхнем пределе. Исключение составляет значение

$$\gamma_0 = 4u_0^3, \quad u_0 = 4/3, \quad (34)$$

когда “скорость” w в направлении начала координат при всех u положительна и касается оси абсцисс в точке u_0 . В этом случае интеграл s при $u > u_0$ обращается в бесконечность, функция распределения (31) становится локализованной на интервале $(0, u_0)$ и условие (33) выполняется.

Таким образом, если система выходит на асимптотический путь развития, то на большой высоте параметр $\gamma \approx 256/27$, критический размер растет как $z^{1/4}$ (см. (29)), а число зародышей падает как z^{-1} , так как

$$N = \int dRf = \int du \frac{\psi}{z} \sim e^{-4\tau}. \quad (35)$$

При этом функция распределения имеет универсальный вид (31), (32) и

локализована на интервале $(0, \frac{4}{3} R_c)$. Хотя поток энергии постоянен, энергия пузырьков убывает как $z^{-1/2}$. Это связано с тем, что основная масса пузырьков имеет размер порядка критического, а для этого размера скорость всплывания (9) пропорциональна $z^{-1/2}$. В связи с этим следует отметить, что принятое предположение о неподвижности жидкости нарушается не только при больших перегревах, когда жидкость увлекается большим числом всплывающих пузырьков, но и при степени перегрева, меньшей $\Delta_c \approx 10^{-4}$, когда скорость $\dot{z}(R_c)$ сравнима со скоростью звука.

7. В заключение приведем характерные значения параметров, введенных выше, для кипящей воды, если $\Delta = 10^{-2}$, $N = 10^{18} \text{ см}^{-3}$, $Q = 10^7 \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{с}$:

$$n_g \approx 10^{19} \text{ см}^{-3}, \quad R_c \approx 10^{-2} \text{ см}, \quad z_\Delta \approx 10^{-4} \text{ см}, \quad A \approx 1, \quad B \approx 1.$$

Мы благодарны Нидерландской Организации Научных Исследований (NWO) за поддержку.

Список литературы

1. Лифшиц И.М., Слезов В.В. // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 35. Lifshits I.M., Slezov V.V. // J. Phys. Chem. Solid. 1961. V. 19. P. 35.
2. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1960.
3. Казан Ю. // ЖФХ. 1960. Т. 34. С. 92.
4. Binder K., Stauffer D. // Adv. Phys. 1976. V. 25. P. 343.
5. Дубинко В.И., Кирюхин И.М., Остапчук П.Н. и др. Диффузионный распад под облучением. Теоретические аспекты. М.: ЦНИИАтоминформ, 1987.
6. Ильин А.В., Максимов Л.А. // Тезисы докладов. Теплофизика и гидрогазодинамика процессов кипения и конденсации (Рига, 1982). Т. 1.

Российский научный центр
"Курчатовский институт"

Поступила в редакцию
5.01.93

A.V. Il'in, L.A. Maximov, V.L. Tsymbalenko

THEORY OF TEA-URN. THE BOILING KINETICS OF PURE LIQUID IN THE GRAVITY FIELD

The problem on the boiling of pure liquid in the gravity field is solved. The law of energy conservation in the boiling liquid is formulated. The dependence for the distribution function of buoying bubbles upon the height is studied, involving the conservation of energy flow. It is shown that, depending on the degree of overheating, there is realized one of two scenarios. For small degree of overheating, bubbles disappear at a finite height. Then after exceeding the critical degree of overheating the process in which the total energy flow is transferred by bubbles arises. The reduction of their amount inverse to the height is compensated by the growth of the single bubble energy.